

**Geometrija 3, R,V i L smer**  
**septembar 2, 20.09.2013.**

1. Neka je  $\alpha(s)$  regularna kriva, koja pripada sferi  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
  - (a) Izraziti vektor položaja krive  $\alpha(s)$  u freneovoj bazi.
  - (b) Dokazati da za krivinu i torziju krive  $\alpha(s)$  važi  $\tau^2 \left( R^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$ .
2. Odrediti jednačinu oskulatorne ravni krive  $\alpha(s) = ((1+s)^{\frac{3}{2}}, (1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{2}s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .
3. Data je elementarna površ  $r(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u)$ ,  $(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ ,  $a > 0$ .
  - (a) Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.
  - (b) Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  sa koordinatnim linijama  $v = \text{const}$ .
  - (c) Odrediti geodezijske linije među koordinatnim linijama. Dokazati da se geodezijske oblika  $v = v(u)$ , dobijaju iz  $v = \pm \int \frac{C\sqrt{1+a^2}du}{au\sqrt{u^2-C^2}}$ .
  - (d) Odrediti sve asimptotske i glavne linije (linije krivine) na datoj površi.
4. U poluravanskom modelu  $\mathcal{L}^2$  hiperboličke geometrije date su tačke  $A(-2\sqrt{2}, 1)$ ,  $B(-2\sqrt{3}, 1)$  i  $C(-2\sqrt{2}, 7-2\sqrt{6})$ . Odrediti hiperbolički centar, poluprečnik i jednačinu kruga opisanog oko trougla  $ABC$ .

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$


---

**Geometrija 3, R,V i L smer**  
**septembar 2, 20.09.2013.**

1. Neka je  $\alpha(s)$  regularna kriva, koja pripada sferi  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
  - (a) Izraziti vektor položaja krive  $\alpha(s)$  u freneovoj bazi.
  - (b) Dokazati da za krivinu i torziju krive  $\alpha(s)$  važi  $\tau^2 \left( R^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$ .
2. Odrediti jednačinu oskulatorne ravni krive  $\alpha(s) = ((1+s)^{\frac{3}{2}}, (1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{2}s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .
3. Data je elementarna površ  $r(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u)$ ,  $(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ ,  $a > 0$ .
  - (a) Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.
  - (b) Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  sa koordinatnim linijama  $v = \text{const}$ .
  - (c) Odrediti geodezijske linije među koordinatnim linijama. Dokazati da se geodezijske oblika  $v = v(u)$ , dobijaju iz  $v = \pm \int \frac{C\sqrt{1+a^2}du}{au\sqrt{u^2-C^2}}$ .
  - (d) Odrediti sve asimptotske i glavne linije (linije krivine) na datoj površi.
4. U poluravanskom modelu  $\mathcal{L}^2$  hiperboličke geometrije date su tačke  $A(-2\sqrt{2}, 1)$ ,  $B(-2\sqrt{3}, 1)$  i  $C(-2\sqrt{2}, 7-2\sqrt{6})$ . Odrediti hiperbolički centar, poluprečnik i jednačinu kruga opisanog oko trougla  $ABC$ .

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$