

Geometrija 3 januar 2013

1. Neka je α kriva data svojom parametrizacijom $\alpha(t) = (3e^t \cos t, 3e^t \sin t, ke^t - 2)$, $k < 0$, $t \in \mathbb{R}$.
- Dokazati da je kriva α regularna i skicirati je.
 - Odrediti Freneov reper, krivinu i torziju krive α .
 - Izračunati geodezijsku i normalnu krivinu krive α na konusu $k^2(x^2 + y^2) = 9(z + 2)^2$ na kome leži, kao i ugao koji zaklapa sa izvodnicama konusa.

2. Neka je $\alpha(s)$, $s \in I$, regularna kriva parametrizovana dužinom luka, pri čemu za torziju važi $\tau(s) > 0$. Kriva β zadata je sa $\beta(s) = \int_0^s B(u)du$, gde je $B(s)$ vektor binormale krive α .

- Dokazati da je kriva β takodje parametrizovana dužinom luka i izraziti krivinu $\bar{\kappa}$, torziju $\bar{\tau}$, tangentno, normalno i binormalno vektorsko polje $[\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}]$ krive β preko odgovarajućih elemenata krive α .
- Dokazati da je pravolinijska površ \mathcal{M} određena krivom β i vektorskim poljem binormala \bar{B} regularna i izraziti vektore baze $[n, \bar{T}, S]$ duž krive β površi \mathcal{M} .

3. U xz -ravni data je ravanska kriva parametrizacijom $\gamma(u) = (\text{ch } u, \frac{\sqrt{2}}{2}u)$, $u \in \mathbb{R}$.

- Napisati parametrizaciju površi r koja se dobija rotacijom krive γ oko z -ose koordinatnog sistema $Oxyz$ i odrediti najveći skup \mathcal{U} na kome je r regularna parametrizovana površ. Skicirati dobijenu površ.
- Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu površi r .
- Dokazati da su geodezijske linije na površi r oblika $v = v(u)$ zadate jednačinama $v^2 = \left(\int \frac{C\sqrt{\text{ch}^2 u + \text{sh}^2 u} du}{2\text{ch } u \sqrt{\text{ch}^2 u - C^2}} \right)^2$, pri čemu je C neka realna konstanta. Odrediti sve meridijane i paralele među geodezijskim linijama.
- Odrediti jednačine asimptotskih linija i linija krivine.

4. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije date su prave

$$p : u = -7, \quad q : (u + 3)^2 + v^2 = 4, \quad v > 0.$$

Odrediti:

- slike pravih p i q pri refleksijama S_q i S_p , tj. $S_p(q)$ i $S_q(p)$;
- hiperboličko rastojanje između hiperparalelnih pravih p i q .

Formule:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$