Geometrija 3
septembar 2, 2012.

1. Neka je ravanska kriva α data parametrizacijom $\alpha(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Ispitati regularnost krive α i izračunati njenu dužinu i krivinu.

b) Odrediti ugao koji zaklapa sferna kriva $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 2\sqrt{3}\cos t)$ ($\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ su koordinatne funkcije parametrizacije krive α) sa meridijanima na sferi.

c) Pokazati da kriva α predstavlja putanju tačke koja leži na krugu poluprečnika 1 koji se spolja kotrlja po krugu poluprečnika 2 centriranog u koordinatnom početku, pri čemu parametar t predstavlja polarni ugao centra manjeg ugla. Skicirati krivu α.

2. Neka je $\alpha(s)$, $s \in I$, regularna kriva parametrizovana dužinom luka, pri čemu za torziju važi $\tau(s) > 0$. Kriva β zadata je sa $\beta(s) = \displaystyle\int_0^s B(u)du$, gde je $B(s)$ vektor binormale krive α.

a) Dokazati da je kriva β takodje parametrizovana dužinom luka i izraziti krivinu $\overline{\kappa}$, torziju $\overline{\tau}$, tangentno, normalno i binormalno vektorsko polje $[\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}]$ krive β preko odgovarajućih elemenata krive α.

b) Dokazati da je pravolinijska površ $\mathcal{M}$ odredjena krivom β i vektorskim poljem binormala $\overline{B}$ regularna i izraziti vektore baze $[n, \overline{T}, S]$ duž krive β površi $\mathcal{M}$.

3. Neka je površ dobijena rotacijom hiperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, $x > 0$, u $xz-$ravni, oko $z-$ose $(a, b > 0)$.

a) Parametrizovati površ, dokazati da je regularna i skicirati je.

b) Odrediti koeficijente prve i druge fundamentalne forme, Gausovu, srednju i glavne krivine date površi, kao i tip tačaka na površi.

c) Odrediti asimptotske linije na ovoj površi. Ispitati da li su koordinatne linije geodezijske, odnosno glavne linije na ovoj površi.

Napomena: Možete uvesti smene za izraze koji se često pojavljuju, radi lakšeg računanja.

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije date su prave

$$p:\ u = 5, \quad q:\ (u-1)^2 + v^2 = 4,\ v > 0.$$

Odrediti:

a) slike pravih p i q pri refleksijama S_q i S_p, tj. $S_p(q)$ i $S_q(p)$;

b) hiperboličko rastojanje izmedju hiperparalelnih pravih p i q;

c) skup tačaka na hiperboličkom rastojanju 1 od prave p (tj. ekvidistantu).

Formule:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$