Geometrija 3
oktobar 2012

1. Neka je ravanska kriva α data parametrizacijom $\alpha(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Ispitati regularnost krive α i odrediti Freneov reper, krivinu i torziju.

b) Odrediti ugao koji zaklapa kriva α sa meridijanima na jediničnoj sferi.

c) Pokazati da kriva α pripada cilindru $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Da li je α geodezijska linija na ovoj površi? Da li je asimptotska linija?

2. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regularna prirodno parametrizovana kriva, s prirodni parametar i $[T, N, B]$ Freneov reper krive α. Data je površ $f(s, v) = \alpha(s) + r(N(s)\cos v - B(s)\sin v)$, $(s, v) \in I \times (0, 2\pi)$, $r = \text{const} > 0$.

a) Skicirati površ f. Izračunati vektor normale površi f. Da li je površ f regularna?

b) Dokazati da površina površi f ne zavisi od torzije krive α.

3. Neka je površ dobijena rotacijom krive $\alpha(u) = (-1 - \operatorname{ch} u + \sqrt{3}u, -\sqrt{3}\operatorname{ch} u - u)$, $u \in \mathbb{R}$, u $xz-$ravni, oko $z-$ose.

a) Parametrizovati površ, dokazati da je regularna.

b) Odrediti Gausovu, srednju i glavne krivine date površi.

c) Odrediti geodezijske, asimptotske i glavne linije među koordinatnim linijama.

d) Odrediti jednačine linija na površi koje zaklapaju jednake uglove sa meridijanima i paralelama.

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije date su prave

$$p : \ (u-2)^2 + v^2 = 4, \quad q : \ (u-8)^2 + v^2 = 16, \ v > 0.$$

a) Odrediti prave r i s koje su paralelne i sa p i sa q i ugao između njih;

b) Odrediti ugao koji zaklapaju normale na prave p i q iz tačke $M(9, 3\sqrt{3})$

Formule:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$