Geometrija 3, junski rok 2012.

1. Neka je α kriva data svojom polarnom jednačinom $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$, $a, b > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Skicirati krivu α, odrediti njenu prirodnu parametrizaciju i dužinu luka krive izmedju tačaka $\theta = 0$ i $\theta = t$, kao funkciju od t.

b) Dokazati da proizvoljna poluprava iz koordinatnog početka odseca na krivoj α duži čije dužine čine geometrijsku progresiju, dok sa tangentama u presečnim tačkama odredjuje konstantan ugao (i odrediti ga). Za koje vrednosti parametara se kriva približava kružnici?

c) Izračunati krivinu i torziju krive α. Da li krivina dostiže ekstremne vrednosti?

d) Dokazati da je slika krive α pri stereografskoj projekciji $\psi(x, y) = \left(\dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \dfrac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, loksodroma na sferi.

2. Neka su $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ regularne krive nenula krivine i torzije, takve da im se odgovarajuće normalne linije (za svako $t \in I$) poklapaju.

a) Dokazati da je rastojanje izmedju odgovarajućih tačaka krivih α i β konstantno.

b) Ako je kriva α kružni heliks, dokazati da kriva β takodje mora biti kružni heliks.

c) Dokazati da je pravolinijska površ $\mathcal{M}$ odredjena krivom α i vektorskim poljem normala regularna. Izraziti vektore baze $[n, T, S]$ duž krive α površi $\mathcal{M}$ u Freneovoj bazi $[T, N, B]$ krive α i skicirati ih u proizvoljnoj tački.

3. Eliptički torus je površ koja se dobija rotacijom oko $z-$ose elipse $\dfrac{(x-c)^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ u $xz-$ravni, $a, b, c > 0$, $c > a$.

a) Parametrizovati eliptički torus, dokazati da je regularna površ i skicirati ga. Koliko je karti potrebno da se prekrije cela površ?

b) Odrediti koeficijente prve i druge fundamentalne forme, Gausovu, srednju i glavne krivine eliptičkog torusa. Odrediti eliptičke, hiperboličke i paraboličke tačke i označiti ih na crtežu.

c) Izračunati geodezijsku i normalnu krivinu meridijana i paralela. Koje medju njima su geodezijske, odnosno asimptotske? Odrediti jednačine (svih) geodezijskih, asimptotskih i glavnih linija.

d) Ako je d rastojanje proizvoljne tačke sa geodezijske linije od z ose i δ ugao izmedju geodezijske i meridijana, dokazati da je $d \sin\delta = \text{const.}$

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije date su tačke $A(2\sqrt{2}, 1)$, $B(2\sqrt{3}, 1)$ i $C(2\sqrt{2}, 7 - 2\sqrt{6})$. Odrediti hiperbolički centar, poluprečnik i jednačinu kruga opisanog oko trougla ABC.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$