

Geometrija 3, jun 2, 2012.

1. Neka je α kriva data svojom parametrizacijom $\alpha(t) = e^t(a \cos t, a \sin t, b)$, $a, b > 0$, $t \in \mathbb{R}$.
 - a) Dokazati da je kriva α regularna i skicirati je.
 - b) Odrediti Freneov reper, krivinu i torziju krive α .
 - c) Izračunati geodezijsku i normalnu krivinu krive α na konusu $b^2(x^2 + y^2) = a^2z^2$ na kome leži, kao i ugao koji zaklapa sa izvodnicama konusa.
2. Neka je $\alpha(s)$ prirodno parametrizovana regularna kriva na sferi poluprečnika R .
 - a) Ako je κ krivina krive α , dokazati da važi nejednakost $\kappa \geq \frac{1}{R}$.
 - b) Ako je sfera sa centrom u koordinatnom početku, dokazati da je α deo velikog kruga akko važi $\alpha'' = -\alpha$ (vektor ubrzanja krive α suprotan je vektoru položaja).
3. Neka je površ f data parametrizacijom

$$f(u, v) = (\operatorname{sh} u \cos v - \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v + \operatorname{sh} u \sin v, u + v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- a) Ispitati regularnost površi f i odrediti koeficijente prve i druge fundamentalne forme, Gausovu, srednju i glavne krivine. Odrediti eliptičke, hiperboličke i paraboličke tačke na površi.
 - b) Dokazati da su geodezijske linije date jednačinom $v = \pm \int \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 2c^2}}{c\sqrt{2}} du$, $c = \operatorname{const} > 0$. Da li postoje geodezijske medju koordinatnim linijama?
 - c) Za koje vrednosti parametra q su linije $u = qv$ asimptotske, a za koje glavne?
4. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije dato je preslikavanje $\tau(u, v) = (ku, kv)$, $k = \operatorname{const} > 0$, $k \neq 1$.
 - a) Dokazati da je preslikavanje τ izometrija hiperboličke ravni i odrediti sliku kruga $u^2 + (v - \operatorname{ch} 3)^2 = \operatorname{sh}^2 3$ pri preslikavanju τ .
 - b) Predstaviti preslikavanje τ kao kompoziciju dve refleksije čije su ose hiperparalelne prave (to znači da je u pitanju translacija hiperboličke ravni).
 - c) Da li je (hiperbolička) dužina duži $\|A\tau(A)\|$ konstantna za sve tačke A hiperboličke ravni?

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$