

1. Data je kriva parametrizacijom  $\alpha(t) = (3 + 2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Odrediti prirodnu parametrizaciju krive  $\alpha$  i skicirati je.
  - (b) Odrediti krivinu, torziju i Freneov reper krive  $\alpha$ .
  - (c) Dokazati da tangentne i normalne linije zaklapaju konstantne uglove sa  $z$ -osom.
  - (d) Dokazati da je kriva  $\alpha$  geodezijska linija na cilindru  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ .
  - (e) Dokazati da je kriva  $\alpha$  asimptotska linija na helikoidu zadatim parametrizacijom  $(3 + u \cos v, u \sin v, \sqrt{5}v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ .
  
2. Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna prirodno parametrizovana kriva nenula krivine,  $s$  prirodni parametar i  $B$  vektor binormale krive  $\alpha$ . Data je površ  $f(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$ ,  $(s, v) \in I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dokazati da je  $f$  regularna parametrizovana površ na kojoj je kriva  $\alpha$  geodezijska i skicirati je.
  
3. (a) U  $xz$ -ravni data je ravnska kriva parametrizacijom  $\gamma(u) = (\operatorname{ch} u, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Napisati parametrizaciju površi  $r$  koja se dobija rotacijom krive  $\gamma$  oko  $z$ -ose koordinatnog sistema  $Oxyz$  i odrediti najveći skup  $\mathcal{U}$  na kome je  $r$  regularna parametrizovana površ. Skicirati dobijenu površ.
  - (b) Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu površi  $r$ .
  - (c) Odrediti sve meridijane i paralele među geodezijskim linijama.
  - (d) Odrediti najkraće rastojanje između tačaka  $A(0, 1, 0)$  i  $B(0, \operatorname{ch} 2, 2)$  na površi  $r$ .
  - (e) Odrediti jednačine krivih na površi  $r$  koje polove ugao između meridijana i paralela.
  
4. U poluravanskom modelu  $\mathcal{L}^2$  hiperboličke geometrije sa prvom formom  $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$  date su tačke  $A(-1, 2)$ ,  $B(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$  i  $C(-1, \sqrt{2} + \sqrt{6})$ . Naći unutrašnje uglove, dužine stranica i površinu trougla  $ABC$ .

**Formule:**

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \kappa_g = \frac{[n, \alpha', \alpha'']}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}, \quad N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$