

1. Data je kriva parametrizacijom $\alpha(t) = (e^{4t} \cos 4t, e^{4t} \sin 4t, e^{4t})$, $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Odrediti prirodnu parametrizaciju krive α , skicirati je i odrediti maksimalan podskup skupa \mathbb{R} na kome je α regularna.
 - (b) Odrediti krivinu, torziju i Freneov reper krive α .
 - (c) Odrediti normalnu krivinu krive α na konusu $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Da li je α asimptotska linija ovog konusa?
 - (d) Dokazati da je α glavna linija (linija krivine) na konusu iz prethodne tačke.
 - (e) Odrediti ugao između vektora položaja i normalne linije u proizvoljnoj tački krive α .

2. Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna prirodno parametrizovana kriva konstantne torzije. Kriva β je data sa $\beta(s) = \alpha(s) + cB(s)$, $c \in \mathbb{R}$. Razložiti vektor B_β binormale na krivu β u Freneovoj bazi krive α . Izračunati ugao između binormalnih vektora krivih α i β u odgovarajućim tačkama.

3. (a) U xz -ravni data je ravnska kriva parametrizacijom $\gamma(u) = (u, u^2 + 1)$, $u > 0$. Napisati parametrizaciju površi r koja se dobija rotacijom krive γ oko z -ose koordinatnog sistema $Oxyz$ i odrediti najveći skup \mathcal{U} na kome je r regularna parametrizovana površ. Napisati još neku parametrizaciju površi r i skicirati dobijenu površ.
 - (b) Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu površi r .
 - (c) Izračunati površinu dela površi r ograničenog sa ravni $z = 25$.
 - (d) Odrediti sve koordinatne linije koje su geodezijske.
 - (e) Dokazati da su sve koordinatne linije glavne linije (linije krivine).

4. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ data su preslikavanja $f : x' = 4 - x$, $y' = y$ i $g : x' = 4 + \frac{x-4}{(x-4)^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{(x-4)^2 + y^2}$, tačke $A(1, \sqrt{3})$ i $B(1, \sqrt{5})$. Dokazati da je kompozicija $g \circ f$ izometrija i odrediti rastojanje tačaka $(g \circ f)(A)$ i $(g \circ f)(B)$.

Formule:

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \kappa_g = \frac{[n, \alpha', \alpha'']}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}, \quad N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$