

Geometrija 3, 29.05.2011. Ime i prezime, broj indeksa, grupa

1. Data je površ parametrizacijom $r(u, v) = (2 \cos u \cos v + \sqrt{5} \cos v, 2 \cos u \sin v + \sqrt{5} \sin v, 2 \sin u)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.
- Odrediti koeficijente prve, druge fundamentalne forme i Kristofelove simbole površi r .
 - Skicirati površ r i odrediti Gausovu, srednju i glavne krivine.
 - Izračunati geodezijske krivine koordinatnih linija. Da li su neke od njih geodezijske linije?
 - Ako je ψ ugao između proizvoljne prirodno parametrizovane geodezijske linije i v -parametarske krive, dokazati da je izraz $(\sqrt{5} + 2 \cos u) \cos \psi$ konstantan. Koji ugao zaklapa geodezijska linija sa u -parametarskom krivom?
 - Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \int \frac{2C}{(\sqrt{5} + 2 \cos u) \sqrt{(\sqrt{5} + 2 \cos u)^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka konstanta. Skicirati nekoliko različitih geodezijskih linija na površi r .
2. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(2, 5)$ i prave $b : u = 5$, $c : (u - 4)^2 + v^2 = 4$.
- Izračunati ugao između pravih b i c . U kakvom su međusobnom položaju prave AB , b i c ?
 - Odrediti središte i dužinu duži AB .
 - Odrediti tačke simetrične tački A u odnosu na prave b i c .
 - Odrediti jednačine normala iz tačke A na pravama b i c .
 - Ispitati da li su (euklidske) homotetije sa centrima na u -osi i v -osi izometrije.

Formule:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Geometrija 3, 29.05.2011. Ime i prezime, broj indeksa, grupa

1. Data je površ parametrizacijom $r(u, v) = (2 \cos u \cos v + \sqrt{5} \cos v, 2 \cos u \sin v + \sqrt{5} \sin v, 2 \sin u)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.
- Odrediti koeficijente prve, druge fundamentalne forme i Kristofelove simbole površi r .
 - Skicirati površ r i odrediti Gausovu, srednju i glavne krivine.
 - Izračunati geodezijske krivine koordinatnih linija. Da li su neke od njih geodezijske linije?
 - Ako je ψ ugao između proizvoljne prirodno parametrizovane geodezijske linije i v -parametarske krive, dokazati da je izraz $(\sqrt{5} + 2 \cos u) \cos \psi$ konstantan. Koji ugao zaklapa geodezijska linija sa u -parametarskom krivom?
 - Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \int \frac{2C}{(\sqrt{5} + 2 \cos u) \sqrt{(\sqrt{5} + 2 \cos u)^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka konstanta. Skicirati nekoliko različitih geodezijskih linija na površi r .
2. U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(2, 5)$ i prave $b : u = 5$, $c : (u - 4)^2 + v^2 = 4$.
- Izračunati ugao između pravih b i c . U kakvom su međusobnom položaju prave AB , b i c ?
 - Odrediti središte i dužinu duži AB .
 - Odrediti tačke simetrične tački A u odnosu na prave b i c .
 - Odrediti jednačine normala iz tačke A na pravama b i c .
 - Ispitati da li su (euklidske) homotetije sa centrima na u -osi i v -osi izometrije.

Formule:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$