

- (a) Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva i $v \in \mathbb{R}^3$ vektor takav da je $(\alpha(t) - v) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je α sferna kriva.

(b) Dokazati da je normalna krivina proizvoljne sferne krive konstantna.
- Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna prirodno parametrizovana kriva, s prirodni parametar i $[T, N, B]$ Freneov reper krive α . Data je površ $f(s, v) = \alpha(s) + r(N(s) \cos v + B(s) \sin v)$, $(s, v) \in I \times (0, 2\pi)$, $r = \text{const} > 0$.

(a) Skicirati površ f . Izračunati vektor normale površi f . Da li je površ f regularna?

(b) Dokazati da površina površi f ne zavisi od torzije krive α .
- Data je površ parametrizacijom $r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln(\text{tg } \frac{u}{2}) + \cos u)$, $(u, v) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$.

(a) Odrediti Gausovu i srednju krivinu površi r .

(b) Ako je α koordinatna kriva određena sa $u = 1$, odrediti joj Freneov reper, krivinu i torziju.

(c) Ako je β koordinatna kriva određena sa $v = \frac{\pi}{3}$, odrediti joj krivinu, geodezijsku i normalnu krivinu.

(d) Neka je γ ravanska kriva čijom rotacijom oko z -ose koordinatnog sistema $Oxyz$ nastaje površ r . Dokazati da je rastojanje svake tačke krive γ do preseka tangente na krivu u toj tački sa z -osom konstantno.
- Data je površ $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{5}u)$, $(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

(a) Skicirati površ r . Da li je površ r rotaciona? A pravolinijska? Napisati još neku parametrizaciju.

(b) Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \int \frac{C\sqrt{6}}{u\sqrt{u^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka realna konstanta.

(c) Odrediti najkraće rastojanje između tačaka $A(0, -1, \sqrt{5})$ i $B(0, -2, \sqrt{20})$ na površi r .

(d) Odrediti jednačine krivih na površi r koje sa meridijanima zaklapaju konstantan ugao $\frac{\pi}{4}$.
- U poluravanskom modelu \mathcal{L}^2 hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(4, \sqrt{7})$, $B(4, 5)$, $C(0, 3)$ i $D(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4})$. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ Lambertov, izračunati njegov oštar ugao i dužinu stranice AB .

Dodatni poeni se mogu iskoristiti za popravljnje predispitnih obaveza.

Formule:

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \kappa_g = \frac{[n, \alpha', \alpha'']}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}, \quad N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$