Geometrija 3, 14.06.2011. Ime i prezime, broj indeksa, grupa

1. (a) Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regularna kriva i $v \in \mathbb{R}^3$ vektor takav da je $(\alpha(t) - v) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je α sferna kriva.

(b) Dokazati da je normalna krivina proizvoljne sferne krive konstantna.

2. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regularna prirodno parametrizovana kriva, s prirodni parametar i $[T,\ N,\ B]$ Freneov reper krive α. Data je površ $f(s,v) = \alpha(s) + r(N(s)\cos v + B(s)\sin v)$, $(s,v) \in I \times (0, 2\pi)$, $r = \text{const} > 0$.

(a) Skicirati površ f. Izračunati vektor normale površi f. Da li je površ f regularna?

(b) Dokazati da površina površi f ne zavisi od torzije krive α.

3. Data je površ parametrizacijom $r(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) + \cos u)$, $(u,v) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$.

(a) Odrediti Gausovu i srednju krivinu površi r.

(b) Ako je α koordinatna kriva odredjena sa $u = 1$, odrediti joj Freneov reper, krivinu i torziju.

(c) Ako je β koordinatna kriva odredjena sa $v = \frac{\pi}{4}$, odrediti joj krivinu, geodezijsku i normalnu krivinu.

(d) Neka je γ ravanska kriva čijom rotacijom oko $z-$ose koordinatnog sistema $Oxyz$ nastaje površ r. Dokazati da je rastojanje svake tačke krive γ do preseka tangente na krivu u toj tački sa $z-$osom konstantno.

4. Data je površ $r(u,v) = (u\cos v, u \sin v, \sqrt{2}u)$, $(u,v) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

(a) Skicirati površ r. Da li je površ r rotaciona? A pravolinijska? Napisati još neku parametrizaciju.

(b) Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \displaystyle\int \frac{C\sqrt{3}}{u\sqrt{u^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka realna konstanta.

(c) Odrediti najkraće rastojanje izmedju tačaka $A(0, -1, \sqrt{2})$ i $B(0, -2, \sqrt{8})$ na površi r.

(d) Odrediti jednačine krivih na površi r koje sa meridijanima zaklapaju konstantan ugao $\frac{\pi}{3}$.

5. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \dfrac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(0,3)$, $B(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4})$, $C(4, \sqrt{7})$ i $D(4,5)$. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ Lambertov, izračunati njegov oštar ugao i dužinu stranice CD.

Dodatni poeni se mogu iskoristiti za popravljanje predispitnih obaveza.

Formule:

$$\kappa = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}, \quad \kappa_g = \frac{[n, \alpha', \alpha'']}{||\alpha'||^3}, \quad \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{||\alpha' \times \alpha''||^2}, \quad N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{||\alpha'||\,||\alpha' \times \alpha''||}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||},$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$