Površi (zadaci)

1. (a) Parametrizovati jediničnu polusferu, sferu bez jednog meridijana i sferu bez jedne tačke. Da li su parametrizacije regularne? Da li je cela sfera regularna površ?

   (b) Naći jednačinu tangentne ravni na jediničnu sferu u tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Dokazati da zapremina tetraedra koji se dobija u preseku koordinatnih osa i tangentne ravni površi $xyz = a^3$ ne zavisi od izbora tačke površi u kojoj je se razmatra tangentna ravan.

3. Dokazati da je skup rešenja jednačine $f(x, y, z) = x^3 + x^5 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ regularna površ i naći njenu tangentnu ravan u proizvoljnoj tački (x_0, y_0, z_0) površi.

4. (a) Dokazati da gornja polovina kružnog konusa $z^2 = x^2 + y^2$ nije regularna površ.

   (b) Dat je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$. Odrediti prvu fundamentalnu formu ove površi.

5. **Pravolinijske površi.**

   Neka je $\alpha(u)$ regularna kriva i neka je $\beta(u) \neq 0$ vektorsko polje duž krive α. Odrediti uslove pod kojima je $r(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ regularna elementarna površ. Da li je helikoid pravolinijska površ? Da li je Mebijusova traka pravolinijska površ?

6. **Rotacione površi.**

   Neka je $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a < t < b$, regularna, $1-1$ kriva klase C^k i $f > 0$.

   (a) Dokazati da je slika površi $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $a < u < b, 0 < v < 2\pi$ dobijena rotacijom slike krive α oko z-ose.

   (b) Dokazati da je r regularna elementarna površ.

   (c) Odrediti koordinatne krive površi r i uglove koje one zaklapaju.

   (d) Da li je katenoid rotaciona površ? Da li je torus rotaciona površ? Navesti još neki primer.

7. Data je površ $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$. Odrediti ugao između krivih $v = u+1$ i $v = 3-u$.

8. Odrediti ugao između krivih $v = 2u$ i $v = -2u$ na površi čija je prva fundamentalna forma data sa $ds^2 = du^2 + 2dv^2$.

9. Dokazati da familije krivih $u_1(v) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ i $u_2(v) = C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ polove uglove između koordinatnih linija površi $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $u > 0$.

10. Neka je $\alpha(t) = r(2\mathrm{arctg}t, \ln t)$ kriva čija slika leži na $r(\mathcal{U})$ za $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $\mathcal{U} = \{(u, v) | -\dfrac{\pi}{2} \leq u < \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\}$. Odrediti ugao koji zaklapaju u-parametarske krive površi r i kriva α.

11. Izračunati površinu torusa.

12. Ispitati da li je površ $r(u, v) = \Big((1 + u \sin \dfrac{v}{2}) \cos v, (1 + u \sin \dfrac{v}{2}) \sin v, u \cos \dfrac{v}{2}\Big)$, $-\dfrac{1}{2} < u < \dfrac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$ regularna. Izračunati normalno vektorsko polje $n(q)$ za $q = (0, v)$, $-\pi < v < \pi$. Dokazati da je $\lim_{v \to -\pi} r(0, v) = \lim_{v \to \pi} r(0, v)$, $\lim_{v \to -\pi} n(0, v) = -\lim_{v \to -\pi} n(0, v)$.

13. Izaberimo parametrizaciju jedinične sfere sa priloženog spiska površi.

    (a) Izračunati površinu dela jedinične sfere između dva meridijana i dve paralele.

    (b) Dokazati da su krive (*loksodrome*) na sferi koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima date jednačinama

$$\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = \pm(v + C)\mathrm{ctg}\alpha, \quad C \in \mathbb{R}.$$

    (c) Izračunati dužinu jedne od tih krivih.