1. **POVRŠI**

Definicija 1.1. Parametrizovana regularna elementarna površ *klase* C^k, $k \geq 1$, *u* $\mathbb{R}^3$ *je* $1-1$ *preslikavanje* $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, *klase* C^k, *gde je* $\mathcal{U}$ *otvoren podskup od* $\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ *i* $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ *su linearno nezavisni za* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

$r(\mathcal{U})$ nazivamo "trag", "slika" od r.

Oznake: $r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)$ tj. $r(u,v) = r_1(u,v)e_1 + r_2(u,v)e_2 + r_3(u,v)e_3$, parcijalni izvod po u i v označavamo skraćeno sa r_u, r_v, pri čemu je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial u} &= r_u(u,v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u,v)\right), \\
\frac{\partial r}{\partial v} &= r_v(u,v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u,v)\right).
\end{aligned}$$

Jakobijeva matrica preslikavanja r je:

$$\mathcal{J}(r)(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial u} & \dfrac{\partial r_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial u} & \dfrac{\partial r_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Sledeći uslovi su ekvivalentni:
(1) $r_u(u_0,v_0)$ i $r_v(u_0,v_0)$ su linearno zavisni;
(2) $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) = 0$;
(3) Jakobijeva matrica ima rang manji od 2 u (u_0,v_0).

Primeri:

(1) $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, klase C^k i $1-1$

(2) $\mathcal{U} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2+v^2 < 1\}$; $r(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

(3) $\mathcal{V} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2+v^2 < 1\}$; $r(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

(4) $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(u_1,v_1) \in \mathcal{U} | v_1 < 0\}$; $\widetilde{\mathcal{V}} = \{(u_2,v_2) \in \mathcal{V} | v_2 > 0\}$;

$\phi : \widetilde{\mathcal{V}} \to \widetilde{\mathcal{U}}, \quad \phi(u_2,v_2) = (u_2, -\sqrt{1-u_2^2-v_2^2})$

$\phi^{-1} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \widetilde{\mathcal{V}}, \quad \phi^{-1}(u_1,v_1) = (u_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2})$

$$det(\mathcal{J}(\phi)(u_2,v_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{u_2}{\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}} & \dfrac{v_2}{\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}} \end{vmatrix}$$

$$r_1(u_1,v_1) = (u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2}), \quad r_2(u_2,v_2) = (u_2, -\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}, v_2), \quad r_1 \circ \phi = r_2$$

Definicija 1.2. Koordinatna transformacija *klase* C^k *je* C^k *difeomorfizam* $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, *gde su* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *otvoreni skupovi u* $\mathbb{R}^2$.

Lema 1.1. *Neka je $r_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k i $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ koordinatna transformacija klase C^k. Tada je $r_2 = r_1 \circ \phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k i ima istu sliku kao r_1.*

Definicija 1.3. *Površi r_1 i r_2 su ekvivalentne ($r_1 \sim r_2$) ukoliko zadovoljavaju uslove Leme 1.1.*

Relacija $\sim$ navedena u Definiciji 1.3 je relacija ekvivalencije.

Definicija 1.4. *Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ je* **regularna (neparametrizovana) elementarna površ***.*

Može se pokazati da je klasa ekvivalencije parametrizovane regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ u suštini odredjena skupom slika $r(\mathcal{U})$, naime važi:

Teorema 1.1. *Neka su $r_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ parametrizovane elementarne površi, takve da je $r_1(\mathcal{U}) = r_2(\mathcal{V})$. Tada za sve $p \in \mathcal{U}$ i $q \in \mathcal{V}$ takve da je $r_1(p) = r_2(q)$ postoje njihove okoline $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ takve da su $r_1|_{\mathcal{U}_1}$ i $r_2|_{\mathcal{U}}$ ekvivalentne povši, tj. postoji koordinana transformacija $\phi : V_1 \to \mathcal{U}_1$ tako da je $r_2 = r_1 \circ \phi$.*

Termini: regularna elementarna površ, lokalna površ, zakrpa.
Uočimo dve prirodno definisane krive na lokalnoj površi.

Definicija 1.5. *Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i fiksirajmo $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$. Krive*

$$u \mapsto r(u, v_0), \qquad v \mapsto r(u_0, v)$$

su **u-parametarska kriva** *i* **v-parametarska kriva** *od r.*

Termini: koordinatne krive, parametarske krive, koje sadrže tačku $P(u_0, v_0)$ su krive $\alpha(u) = r(u, v_0)$ i $\beta(v) = r(u_0, v)$. Odrediti vektore brzine ovih kivih.
Postoji pogodan način kako možemo predstaviti proizvoljnu krivu čiji je trag sadržan u tragu lokalne površi.

Lema 1.2. *Neka je $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, takve da je $r : \mathcal{U} \to r(\mathcal{U})$ homeomorfizam. Tada postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $\alpha_1, \alpha_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ takve da*

$$\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \qquad a < t < b.$$

Sada možemo definisati pojam tangentnog vektora na regularnu elementarnu površ.

Definicija 1.6. *Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i $P \in r(\mathcal{U})$.* **Tangentni vektor** *na r u P je vektor $X \in \mathbb{R}^3$ za koji postoji kriva $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ takva da je*

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)), \quad (a < t < b),$$

pri čemu su $u(t)$ i $v(t)$ diferencijabilne funkcije i $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$.

Koristeći Lemu 1.2 to znači da je X vektor brzine za neku krivu koja "pripada površi".

Lema 1.3. *Skup svih tangentnih vektora na regularnu elementarnu površ $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0) \in r(\mathcal{U})$ je vektorski prostor čija je baza $[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]$.*

Skup svih tangentih vektora na r u P označavaćemo sa $T_P(r)$ i nazivaćemo ga **tangentni prostor**.

Posledica 1. *Neka je $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, takve da je $r : \mathcal{U} \to r(\mathcal{U})$ homeomorfizam. Tada postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ takve da*

$$\alpha' = u' r_u + v' r_v.$$

Ova posledica sledi direktno iz dokaza Leme 1.3.

Definicija 1.7. *Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Za vektor $Z \in \mathbb{R}^3$ kažemo da je* **normalan** *na r u $P \in r(\mathcal{U})$ ukoliko je $Z \circ X = 0$ za sve vektore X tangentne na r u P.*

Definicija 1.8. Vektorsko polje *V na regularnoj elementarnoj površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ je diferencijabilno preslikavanje koje svakoj tački $q \in \mathcal{U}$ dodeljuje vektor $V(q) \in \mathbb{R}^3$. Kažemo da je V* **tangentno vektorsko polje** *na r ukoliko $V(q) \in T_{r(q)}(r)$ i* **normalno vekorsko polje** *ukoliko je $V(q) \circ X = 0$ za sve $X \in T_{r(q)}(r)$ i sve $q \in \mathcal{U}$. Vektorska polja r_u i r_v nazivamo* **koordinatna vektorska polja**.

Stav 1. *Svako tangentno vektorsko polje na regularnoj elementarnoj površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ može se predstaviti u obliku*

$$X(q) = X_1(q) r_u(q) + X_2(q) r_v(q), \quad q \in \mathcal{U}.$$

Funkcije X_1, X_2 su jedinstvene i diferencijabilne. Takodje, par diferencijabilnih funkcija $X_1, X_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ odredjuje jedinstveno tangentno vektorsko polje.

Definicija 1.9. Tangentna ravan *na regularnu elementarnu površ $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0)$ je ravan koja sadrži tačku P i paralelna je vektorima $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$. Vektor normale na površ r u tački P je $n(u_0, v_0) = \dfrac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}(u_0, v_0)$.* **Normala** *na površ u taǩi P je prava odredjena tačkom P i vektorom n.*

Da li su tangentna ravan i normala geometrijski pojmovi?

Definicija 1.10. *Regularna elementarna površ $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ je* **svojstvena** *ukoliko je inverzna funkcija $r^{-1} : r(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ neprekidna u svim tačkama iz $r(\mathcal{U})$.*

Definicija 1.11. Površ *klase C^k u $\mathbb{R}^3$ je podskup $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ koji je unija slika svojstvenih regularnih elementarnih površi klase C^k, takvih da je za proizvoljne regularne elementarne površi $r_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ iz unije, preslikavanje*

$$r_2^{-1} \circ r_1 : r_1^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}') \to r_2^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}')$$

koordinatna transformacija klase C^k, pri čemu je $\mathcal{U}' = r_1(\mathcal{U})$, $\mathcal{V}' = r_2(\mathcal{V})$.

Teorema 1.2. *Neka je $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ u svim tačkama $\mathcal{P} = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$. Tada je $\mathcal{P}$ površ.*

Specijalno, ukoliko je $F_z \neq 0$ u tački $P \in \mathcal{P}$, tada postoji elementarna regularna površ $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ tako da $P \in r(\mathcal{U})$.
Dokaz: teorema o implicitnoj funkciji.

Definicija 1.12. *Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Kvadratnu formu*

$$I_P(w) =< w, w >_P = |w|^2 \geq 0, \; w \in T_P(r)$$

nazivamo **prva osnovna (fundamentalna) forma** *površi r u tački $P \in r(\mathcal{U})$.*

Kako je tangentni vektor $w \in T_P(r)$ (po definiciji) tangetni vektor neke krive $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in (a, b)$, sa $P = \alpha(0) = r(u_0, v_0)$, to je

$$\begin{aligned}
I_P(\alpha'(0)) &= \; < \alpha'(0), \alpha'(0) >_P \\
&= \; < u' r_u + v' r_v, u' r_u + v' r_v >_P \\
&= \; (u')^2 < r_u, r_u >_P + 2u'v' < r_u, r_v >_P + (v')^2 < r_v, r_v >_P \\
&= \; E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2,
\end{aligned}$$

pri čemu je $E(u_0, v_0) =< r_u, r_u >_P$, $F(u_0, v_0) =< r_u, r_v >_P$, $G(u_0, v_0) =< r_v, r_v >_P$, (**koeficijenti prve osnovne forme**) i u', v' su izračunati u $t = 0$.

U okolini tačke P možemo definisati funkcije $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$, koje su tu i diferencijabilne. Da li su E, F, G geometrijski pojmovi?

Često se koriste i oznake $g_{ij}(u,v) =< r_i(u,v), r_j(u,v) >$, $r_1 = r_u$, $r_2 = r_v$. Ove funkcije definišu simetričnu matricu u svakoj tački $r(\mathcal{U})$. Nekada se nazivaju metrički koeficijenti, koeficijenti metričkog tenzora, koeficijenti Riemann-ove metrike.

Neka je $\alpha(t)$ kriva čija slika pripada $r(\mathcal{U})$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$. Tada je dužina luka krive α:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t ||\alpha'(\tau)||\,d\tau = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\tau))}d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}d\tau. \end{aligned}$$

Zbog ovoga, mnogi matematičari govore o "elementu" dužine luka, ds od $\mathcal{P}$, i pišu

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Takodje, za ugao θ izmedju dve krive α i β čije slike pripadaju $r(\mathcal{U})$ i koje se seku u tački $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ važi

$$\cos\theta = \frac{< \alpha'(t_0), \beta'(t_0) >}{||\alpha'(t_0)||\,||\beta'(t_0)||}.$$

Specijalno, za ugao ϕ izmedju koordinatnih krivih važi $\cos\phi = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

Definicija 1.13. *Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i neka je $\mathcal{S}$ kompaktan podskup od $r(\mathcal{U})$. Tada je* **površina** *od $\mathcal{S}$*

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \int\int_{r^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Može se pokazati da je ova definicija geometrijska (ne zavisi od parametrizacije, od izbora r).

Neka je α regularna prirodno parametrizovana kriva čija slika pripada tragu regularne elementarne površi r. Neka je $\{T, N, B\}$ Frenet-Serret-ov reper krive α, κ njena krivina i n vektorsko polje normala na r.

Definicija 1.14. Normalna krivina *regularne prirodno parametrizovane krive α je normalna komponenta od α''.* **Geodezijska krivina** *regularne prirodno parametrizovane krive α je komponenta od α'' u pravcu vektora unutrašnje normale ($S = n \times T$).*

$$\kappa(s) = T'(s) = \alpha''(s) = \kappa_n(s)\,n(s) + \kappa_g(s)\,S(s).$$

Definicija 1.15. Koeficijenti druge osnovne (fundamentalne) forme *regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ su funkcije definisane na $\mathcal{U}$ sa:*

$$e(u,v) =< r_{uu}, n >,\ f(u,v) =< r_{uv}, n >,\ g(u,v) =< r_{vv}, n > .$$