Dokazati da je normalna krivina sferne krive konstantna.

Rešenje Neka je $\alpha(t)$ sferna kriva koja lezi na sferi $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Parametrizacija sfere je

$$f(u,v)=(x_0+R\cos u\cos v, y_0+R\cos u\sin v, z_0+R\sin u).$$

Direktnim računom se dobija da su prva i druga fundamentalna forma sfere

$$I=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix} \qquad II=\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Neka je $\alpha(t)=(u(t),v(t))$ u karti, pa se normalna krivina dobija na sledeći način

$$\kappa_n=\frac{II(T,T)}{I(T,T)}=\frac{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} II \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}=\frac{1}{R}.$$

Poslednja jednakost važi jer su prva i druga fundamentalna forma sfere proporcionalne, tj. $I=R\,II$.