

Matematka 1

Zadaci za vežbe

Oktoabar 2016

1 Uvod

1.1. Uprostiti izraze:

- a) $\left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$
- b) $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{y+z}} : \frac{1}{x+\frac{1}{y}}\right) - \frac{1}{y\left(\frac{xy}{z}+x+\frac{1}{z}\right)}$
- c) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}$
- d) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}\right)^{-2}$

1.2. Ispitati tačnost jednakosti:

- a) $\left(4 \sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\right) \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}} = 3$
- b) $\frac{\sqrt{7+5\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2$

1.3. Ispitati kada su obe strane izraza definisane, a potom dokazati da u tim slučajevima važe identiteti:

- a) $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} + \frac{x}{1-x} \equiv 1 - \frac{1}{x}$
- b) $\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{a^2+a}{a^3-1} \cdot \left(\frac{1}{a^2-a} - \frac{a}{1-a^2}\right) \equiv -\frac{4a}{a^4-2a^2+1}$
- c) $\left(\sqrt{a(1-a)} + \sqrt{\frac{a^3}{1-a}}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{1-a}\right) \equiv \sqrt{a-a^2}$
- d) $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \equiv (x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
- e) $\left(\frac{x\sqrt{x-y}\sqrt{y}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}} + \sqrt{xy}\right) \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2 \equiv 1$

1.4. Rastaviti na proste činioce (faktore) polinome:

- a) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$
- b) $P(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$
- c) $P(x) = x^4 + 4$

1.5. Za koje vrednosti parametara a i b je polinom $P(x) = x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x + b$ deljiv:

- a) binomom $x^2 + 1$
- b) trinomom $x^2 - 2x + 1$

1.6. Rešiti sisteme linearnih jednačina:

- a) $2x + 3y + 1 = 0$
 $3x - y - 4 = 0$
- b) $2x - 3y + 1 = 0$
 $-4x + 6y - 2 = 0$
- c) $-x + 3y = 1$
 $2x - 6y = -1$
- d) $5x - 8y = -1$
 $x + y = 1$
 $x - 6y = 14$

1.7. Rešiti jednačine:

- a) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
- b) $y^2 - 2y - 24 = 0$
- c) $2x^2 - 5x - 3|x - 2| = 0$
- d) $|x^2 + 2x| - |3 - x| = x^2$

1.8. Uprostiti izraze:

- a) $6^{2x+6} - 3^{3x+3} \cdot 2^{x+9}$
- b) $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x}$
- c) $\ln(x+2) - 2\ln(x-3) + \ln(3x-5)$
- d) $\log_2(x-5) + \log_x 64$

1.9. Izračunati: $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{17\pi}{4}$, $\cos(7\pi + \frac{5\pi}{3})$, $\sin(\frac{11\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $\sin \frac{15\pi}{2} + 4 \cos 6\pi$

2 Matematička indukcija

2.1. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važe sledeći iskazi

- (a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- (b) $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (c) $1 + 8 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- (d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2.2. Koristeći matematičku indukciju dokazati da je

- (a) $7|2^{2n+1} + 3^{2n-1}$
- (b) $3|5^n + 2^{n+1}$
- (c) $64|3^{2n+3} + 40n - 27$

3 Kompleksni brojevi

3.1. Predstaviti kompleksan broj u algebarskom zapisu:

- (a) $z = (2 - i)(2 + i)^2 - (3 - 2i) + 7$
- (b) $z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{15} + 1}\right)^2$
- (c) $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$
- (d) $z = \frac{2+4i}{-3+5i}$

3.2. Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja:

- (a) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (b) $z = \frac{1}{i+1}$
- (c) $z = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$
- (d) $z = (1 + i)^4$

3.3. Predstaviti kompleksan broj u trigonometrijskom zapisu:

- (a) $z = -3$
- (b) $z = -i$
- (c) $z = 1 + i$
- (d) $z = -1 + i\sqrt{3}$

3.4. Odrediti moduo i argument kompleksnog broja:

- (a) $(-4 + 3i)^3$
- (b) $1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$

3.5. Predstaviti kompleksan broj u algebarskom zapisu:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 & \text{(e)} \quad z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12} \\
\text{(b)} \quad z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20} & \text{(f)} \quad z = e^{\sqrt{2} + \frac{125\pi i}{6}} \\
\text{(c)} \quad z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11} & \text{(g)} \quad z = e^{\sqrt{5} + 2 - \frac{2\pi i}{3}} \\
\text{(d)} \quad z = (-\sqrt{3} - i)^7 & \text{(h)} \quad z = e^{\frac{177\pi i}{4}}
\end{array}$$

3.6. Izračunati:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \sqrt[4]{1} & \text{(d)} \quad \sqrt[4]{-1+i} \\
\text{(b)} \quad \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} & \\
\text{(c)} \quad \sqrt[3]{i} & \text{(e)} \quad \sqrt[6]{-64}
\end{array}$$

3.7. Rešiti jednačine

$$\text{(a)} \quad z^4 = 1 - i\sqrt{3} \qquad \text{(b)} \quad z^3 = 1 + \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \qquad \text{(c)} \quad z^4 + \frac{1}{1-i} = 0$$

3.8. Predstaviti kompleksan broj u Ojlerovom zapisu:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \frac{1+5i}{4-7i} & \text{(c)} \quad \sqrt{3} + i \\
\text{(b)} \quad \frac{2-i^3}{5-i+4i^2} & \text{(d)} \quad \sqrt{2} + i\sqrt{2}
\end{array}$$

4 Funkcije

4.1. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Odrediti funkcije $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f^{-1}(x)$ i $f \circ f(x)$.

4.2. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$. Odrediti $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $g \circ g(3)$.

4.3. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$. Odrediti funkcije $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$.

5 Krive drugog reda

5.1. Naći poluose, žiže i ekscentricitet elipse

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 & \text{(c)} \quad \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1 \\
\text{(b)} \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1 & \text{(d)} \quad x^2 + 10(y-1)^2 = 10
\end{array}$$

5.2. Naći poluose, žiže, ekscentricitet i asimptote hiperbole

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \frac{x^2}{16} - y^2 = 1 & \text{(c)} \quad y^2 - x^2 = 1 \\
\text{(b)} \quad \frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+2)^2}{2} = 1 & \text{(d)} \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1
\end{array}$$

5.3. Odrediti tangentu na krivu iz date tačke

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1, A(2, 7). & \text{(d)} \quad 3x^2 + 4y^2 = 48, A(6, 1). \\
\text{(b)} \quad x^2 + 4y^2 = 20, A(-6, -1). & \\
\text{(c)} \quad \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, A(2, -1). & \text{(e)} \quad \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1, A(-3, 1).
\end{array}$$

5.4. Naći žižu, teme i prametar p parabole.

(a) $y^2 = 2x$

(c) $y^2 = -14x$

(b) $y^2 = 6x - 12$

(d) $y^2 = -5x + 4$

5.5. Naći jednačine tangenti na parabolu $y^2 = 4x$ u presečnim tačkama sa pravom $p: 2x - 3y + 4 = 0$.

5.6. Odrediti hiperbolu ako je prava $t: 5x - 6y - 8 = 0$ njena tangenta, a prave $a_{1,2}: y = \pm \frac{x}{2}$ su njene asimptote.

5.7. Formulirati i dokazati optička svojstva elipse, hiperbole i parabole. Nacrtati sliku.

6 Analitička geometrija u prostoru

6.1. Izračunati intenzitet vektora $\vec{a} - \vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$.

6.2. Ako je $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ i $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$, odrediti ugao koji zaklapaju vektori \vec{a} i \vec{b} .

6.3. Dati su vektori $\vec{a} = p\vec{i} + q\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$. Odrediti realne parametre p i q tako da vektori \vec{a} i \vec{b} budu ortogonalni, a vektor \vec{a} zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$ sa pozitivnim delom x-ose.

6.4. Odrediti parametar $p \in \mathbb{R}$ takav da vektor $\vec{a} = 2p\vec{i} + \vec{j} + (1-p)\vec{k}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.

6.5. Odrediti parametar $p \in \mathbb{R}$ takav da vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = p\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 9\vec{i} + 14\vec{j} + 16\vec{k}$ budu koplanarni.

6.6. Ispitati da li su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ koplanarni. Ako jesu, izraziti vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .

6.7. Neka su dati vektori $\vec{a} = (-1, 0, 5)$, $\vec{b} = (2, -8, -4)$ i $\vec{c} = (-3, -2, 3)$. Izračunati:

(a) $\|\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}\|$

(b) $\vec{a} \times \vec{b}$

(c) $\langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle$

(d) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$

(e) $pr_{\vec{b}}(\vec{a} - \vec{c})$

6.8. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Odrediti realne parametre α , β i γ tako da važi $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$.

6.9. Date su tačke $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 3, 3)$ i $D(1, 0, -5)$. Odrediti koordinate tačke C tako da četvorougao $ABCD$ bude paralelogram, a zatim izračunati njegovu površinu.

6.10. Da li su tačke $A(0, 1, -2)$, $B(3, -1, -1)$, $C(4, 0, -5)$ i $D(-2, -4, 0)$ koplanarne? Kolika je zapremina tetraedra $ABCD$?

6.11. Odrediti tačku prodora prave $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ kroz ravan $\alpha: 3x + y - 4z + 5 = 0$.

6.12. U kakvom položaju stoje prave p i q ?

(a) $p: x = -1 + 2t, y = 3 - t, z = -5 + 3t, q: x = 2 + s, y = -3 + 4s, z = 3 - 2s, t, s \in \mathbb{R}$

(b) $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}, q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

(c) $p: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}, q: \frac{x+3}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}$

6.13. Odrediti rastojanje između mimoilaznih pravih

$$p: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1} \text{ i } q: x = -2 + t, y = 4 - 3t, z = 2, t \in \mathbb{R}.$$

- 6.14. Odrediti jednačinu zajedničke normale mimoilaznih pravih $a : \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{0}$ i $b : \frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-3}$.
- 6.15. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku $P(5, -2, 1)$ i normalna je na pravu $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{2}$.
- 6.16. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $P(5, -2, 1)$ i paralelna je pravoj $q : \frac{x+4}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{1}$.
- 6.17. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.
- 6.18. Odrediti jednačinu ravni koja sa ravni $\alpha : x - 4y - 8z + 12 = 0$ obrazuje ugao $\frac{\pi}{4}$ i sadrži pravu $p : x + y + z = 0, 2x - 2z + 3 = 0$.

7 Nizovi

7.1. Dokazati po definiciji

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n+1}}\right) = 0$$

7.2. ispitati koji od sledećih nizova su ograničeni.

$$(a) a_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$(c) c_n = \max\{n, 5\}$$

$$(b) b_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$$

$$(d) d_n = \frac{2^n}{n!}$$

7.3. Ispitati koji od navedenih nizova su monotoni

$$(a) a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(b) b_n = n^2 - 8n + 12$$

7.4. Izračunati

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{2n+3} + \frac{1-3n^3}{3n^2+1}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-n}{n^2+2n+3}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+3}}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-4n+5}{n^4+n^3-1}$$

7.5. Odrediti granične vrednosti

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+3n+4}{n^2+2n+2}\right)^{2n}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{3n}$$

7.6. Dokazati da važe sledeće jednakosti

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0, |q| < 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k q^n = 0, |q| < 1, k \in \mathbb{N}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
 (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1,$

7.7. Izračunati primenom teoreme o policajcima

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2^n(n+3))}{2^n}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

7.8. Izračunati primenom Štolcove teoreme

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, p \in \mathbb{N}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

8 Limesi funkcija i neprekidnost

8.1. Dokazati po definiciji

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{3}{2}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$

8.2. Odrediti levi i desni limes funkcije u datoj tački

- (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x, x = 0$
 (b) $g(x) = \frac{1}{x-3}, x = 3$
 (c) $h(x) = [x], x = 4$
 (d) $f(x) = x^2 + 5, x = 3$
 (e) $g(x) = \frac{x+2}{x-5}, x = 5$
 (f) $h(x) = [x^2], x = 3$

8.3. Važni limesi

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

8.4. Izračunati sledeće limese

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$

8.5. Izračunati granične vrednosti

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x(x+2)} - x \right)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

8.6. Izračunati granične vrednosti

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$
- (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - 3x + x^3 + 3x^4}}{(2x + \frac{1}{2})(1-x)}$

8.7. Ispitati neprekidnost funkcije u tački $x = 0$

- (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
- (b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$
- (c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- (d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

8.8. Ispitati neprekidnost i odrediti tip prekida funkcije

- (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \notin \{-1, 0, 1\} \\ 0, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x-2}, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 5} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$
- (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
- (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- (f) $f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{2}, & x < 0 \\ \frac{(1+x)\sqrt{2} - 1}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$
- (g) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$

8.9. Odrediti $A \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ neprekidna

- (a) $f(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$
- (b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

$$(c) f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

8.10. Odrediti konstante a i b tako da funkcije budu neprekidne

$$(a) f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

9 Izvod funkcije

9.1. Izračunati izvod funkcije (tablični izvodi)

$$(a) f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$$

$$(b) f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$$

$$(c) f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$$

$$(d) f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^7}$$

$$(e) f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$$

$$(f) f(t) = \arcsin t + 2$$

9.2. Izračunati izvod funkcije (izvod proizvoda i količnika)

$$(a) f(x) = x \operatorname{ctg} x$$

$$(b) f(x) = e^x \cos x$$

$$(c) f(x) = \sin x \ln x^{2^x}$$

$$(d) f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$$

$$(e) f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

$$(f) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(g) f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$$

$$(h) f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$$

$$(i) f(x) = x^{-1} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$(j) f(z) = z \operatorname{arctg} z$$

$$(k) f(t) = \frac{2}{3t+1} - \frac{2}{t}$$

$$(l) f(x) = x^7 e^x$$

9.3. Izračunati izvod funkcije (izvod složene funkcije)

$$(a) f(x) = \sqrt{x e^x + x}$$

$$(b) f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$$

$$(d) f(x) = \ln^2 x - \ln \ln x$$

$$(e) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$(f) f(x) = e^{-x^2} + \sin 3x$$

$$(g) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$(h) f(x) = \operatorname{ctg} \arcsin x^2$$

$$(i) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$$

$$(j) f(x) = x^{x^2}$$

$$(k) f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

$$(l) f(x) = x^{x^x}$$

9.4. Izračunati izvod implicitno zadate funkcije $y = y(x)$

$$(a) x^2 + y^2 = 1$$

$$(b) x^2 + 2xy - y^2 = 4x$$

$$(c) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$(d) e^y \sin x + \ln y \cos x = \operatorname{arctg} x$$

9.5. Izračunati izvod parametarske funkcije

$$(a) x = 2(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)$$

$$(b) x = 4 + 2 \cos t, y = -1 + 2 \sin t$$

$$(c) x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t})$$

9.6. Izračunati drugi izvod (po x) parametarske funkcije

$$(a) x = \ln t, y = t^3$$

- (b) $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1 + t^2)$
 (c) $x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t})$

9.7. Izračunati sledeći limes i objasniti zašto ne može da se izračuna primenom Lopitalovog pravila

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

9.8. Izračunati primenom Lopitalovog pravila

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

9.9. Razviti u Tejlorov polinom sledeće funkcije

- (a) $f(x) = \sin x$ (c) $f(x) = e^x$
 (b) $f(x) = \cos x$ (d) $f(x) = (x + a)^n$

9.10. Izračunati primenom razvoja u Tejlorov polinom

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3},$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3},$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right),$ (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}.$

10 Ispitvanje toka grafik funkcije

10.1. Odrediti minimum i maksimum funkcije $f(x)$ na datom intervalu

- (a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-1, 5]$ (c) $f(x) = x^3, x \in [-1, 3]$
 (b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-10, 12]$ (d) $f(x) = x^4 + 2, x \in [-5, 5]$

10.2. Odrediti lokalne ekstremume funkcije

- (a) $f(x) = x \ln x$ (c) $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$
 (b) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ (d) $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$

10.3. Naći intervale zakrivljenosti i prevojne tačke funkcije

- (a) $f(x) = (x + 1)^4$ (d) $f(x) = (1 + x^2)e^x$
 (b) $f(x) = x^2 \ln x$
 (c) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ (e) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

10.4. Naći asimptote grafika funkcije

- (a) $f(x) = x + \ln x$ (d) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$
 (b) $f(x) = e^{-x^2} + 2$ (e) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$
 (c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 9}$ (f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

10.5. Skicirati grafik funkcije

- (a) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
(b) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$
(c) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$
(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$
(e) $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$
(f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
(g) $f(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$
(h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
(i) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
(j) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$
(k) $f(x) = (1+x) \ln \frac{x+1}{x+2}$
(l) $f(x) = 1 - e^{2x-x^2}$

11 Neodređeni integral

11.1. Izračunati integrale

- (a) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$
(b) $\int (6x^2 + 8x + 3) dx$
(c) $\int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}) dx$
(d) $\int (5^x + x^5) dx$
(e) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}) dx$
(f) $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x) dx$

11.2. Izračunati integrale (smena promenljive)

- (a) $\int \frac{dx}{x-a}$
(b) $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
(e) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
(f) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$
(g) $\int \frac{x}{a^2+x^2} dx$
(h) $\int \frac{x^3}{x^8-2} dx$

11.3. Izračunati integrale (smena promenljive)

- (a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
(b) $\int \cos^2 2x dx$
(c) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$
(d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$
(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

11.4. Izračunati integrale (parcijalna integracija)

- (a) $\int x \ln x dx$
(b) $\int x^2 \ln x dx$
(c) $\int \ln^2 x dx$
(d) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
(e) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
(f) $\int x \sin x dx$
(g) $\int x \cos 3x dx$
(h) $\int e^x \cos x dx$
(i) $\int \arcsin x dx$
(j) $\int x \arctan x dx$

11.5. Izračunati integrale (parcijalna integracija)

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx & \text{(e)} \int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx \\
\text{(b)} \int 3^x \cos x dx & \text{(f)} \int \sin(\ln x) dx \\
\text{(c)} \int x \sin x \cos x dx & \text{(g)} \int \sin 2x e^{3x} dx \\
\text{(d)} \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx & \text{(h)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}
\end{array}$$

11.6. Izračunati integrale (racionalne funkcije)

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx & \text{(e)} \int \frac{dx}{x^4+1} \\
\text{(b)} \int \frac{x}{x^3-3x+2} dx & \text{(f)} \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} \\
\text{(c)} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} & \text{(g)} \int \frac{x^2+1}{x^6+1} dx \\
\text{(d)} \int \frac{dx}{x^3+1} & \text{(h)} \int \frac{x^5-2x^4+3x^3-4x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx
\end{array}$$

11.7. Izračunati integrale (trigonometrijske funkcije)

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \sin^{10} x \cos^3 x dx & \text{(d)} \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx \\
\text{(b)} \int \sin^4 x \cos^2 x dx & \text{(e)} \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx \\
\text{(c)} \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}
\end{array}$$

11.8. Izračunati integrale (neke iracionalne funkcije)

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx & \text{(c)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} \\
\text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}
\end{array}$$

12 Određeni integral i primene integrala

12.1. Izračunati vrednost određenih integrala

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int_0^1 (2x+1)^{50} dx & \text{(g)} \int_1^3 \sqrt{x+1} dx \\
\text{(b)} \int_0^3 \frac{t dt}{t^2+1} & \text{(h)} \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\
\text{(c)} \int_4^1 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx & \text{(i)} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \\
\text{(d)} \int_0^8 |x^2-6x+8| dx & \text{(j)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\
\text{(e)} \int_0^3 x^2 e^{-x} dx & \text{(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \\
\text{(f)} \int_1^{e^{2\pi}} \sin \ln t dt & \text{(l)} \int_1^e \ln x dx
\end{array}$$

12.2. Izračunati površinu lika u ravni, ograničenog krivama

- (a) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$
 (b) $y = x - 1$, $y^2 = 2x + 6$
 (c) $y^2 = x$, $x - 2y = 3$
 (d) $y = \cos x$, $y = \sin 2x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$
 (e) $y = |x|$, $y = (x + 1)^2 - 7$, $x = -4$
 (f) $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $x = 1$, $x = 2$

- (g) $4x + y^2 = 0$, $y = 2x + 4$
 (h) $y = x$, $y = x^3$
 (i) $y = x^2$, $y = \frac{2}{x^2+1}$
 (j) $y = e^x$, $y = e^{3x}$, $x = 1$
 (k) $x^2 + 4y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$
 (l) $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 - 1$, $y = -x$

12.3. Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom krive

- (a) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ oko x -ose
 (b) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ oko y -ose
 (c) $y = x$, $y = x^2$ oko x -ose
 (d) $y = x$, $y = x^2$ oko prave $y = 2$
 (e) $y = x^4$, $y = 1$ oko prave $y = 2$

- (f) $y = x^2$, $y^2 = x$ oko x -ose
 (g) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, oko y -ose
 (h) $y = x$, $y = x^2$ oko y -ose

13 Nesvojstveni integral

13.1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenih integrala

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$
 (b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

- (c) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$
 (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

13.2. Izračunati vrednost nesvojstvenih integrala

(a) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$