Matematka 1
Zadaci za vežbe

1 Skupovi

1.1. Dokazati da za skupove A,B,$C \subseteq X$ važi

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(b) $A \cup B = B \cup A$
(c) $A \cup \emptyset = A$
(d) $A \cup A = A$
(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(f) $A \cap B = B \cap A$
(g) $A \cap X = A$
(h) $A \cap A = A$
(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(j) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(k) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(l) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.2. Pokazati da za skupove A,B,$C \subseteq X$ važi

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$
(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
(c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

1.3. Za skupove

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
(2) $A = [0, 2]$, $B = (1, 3] \cup \{5\}$ i $C = [0, 1] \cup (2, 4)$
(3) $A = (1, 3)$, $B = [1, 4)$ i $C = [2, 3] \cup \{1, -1\}$

izračunati

(a) $A \cup C$
(b) $B \cap C$
(c) $B \setminus A$
(d) $A \triangle (B \triangle C)$
(e) B^c, $X = A \cup B \cup C$

1.4. Odrediti partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$

1.5. Dokazati da za skupove A,B,C, $D \subseteq X$ važi

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
(c) $A \times C \cup B \times D \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$
(d) $A \times C \cap B \times D = (A \cap B) \times (C \cap D)$

2 Kompleksni brojevi

2.1. Predstaviti kompleksni broj u algebarskom zapisu:

(a) $z = (2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$

(b) $z = \left(\frac{i^5+2}{i^{15}+1}\right)^2$

(c) $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

(d) $z = \frac{2+4i}{-3+5i}$

2.2. Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja:

(a) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $z = \frac{1}{i+1}$

(c) $z = \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(d) $z = (1+i)^4$

2.3. Predstaviti kompleksni broj u trigonometrijskom zapisu:

(a) $z = -3$

(b) $z = -i$

(c) $z = 1+i$

(d) $z = -1+i\sqrt{3}$

2.4. Odrediti moduo i argument kompleksnog broja:

(a) $(-4+3i)^3$

(b) $1+\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

2.5. Predstaviti kompleksni broj u algebarskom zapisu:

(a) $z = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^6$

(b) $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20}$

(c) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$

(d) $z = (-\sqrt{3} - i)^7$

(e) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$

(f) $z = e^{\sqrt{2}+\frac{125\pi i}{6}}$

(g) $z = e^{\sqrt{5}+2-\frac{2\pi i}{3}}$

(h) $z = e^{\frac{177\pi i}{4}}$

2.6. Izračunati:

(a) $\sqrt[4]{1}$

(b) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$

(c) $\sqrt[3]{i}$

(d) $\sqrt[4]{-1+i}$

(e) $\sqrt[6]{-64}$

2.7. Predstaviti kompleksni broj u Ojlerovom zapisu:

(a) $\frac{1+5i}{4-7i}$

(b) $\frac{2-i^3}{5-i+4i^2}$

(c) $\sqrt{3}+i$

(d) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

3 Matematička indukcija

3.1. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važe sledeći iskazi

(a) $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $1+4+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1+8+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(e) $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

(f) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

(g) $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

3.2. Koristeći matematičku indukciju dokazati da je

(a) $7|2^{n+1}+3^{2n-1}$

(b) $9|n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

(c) $3|5^n+2^{n+1}$

(d) $7|11^{n+2}+5^{2n+1}$

(e) $30|n^5+5n^3-6n$

(f) $64|3^{2n+3}+40n-27$

3.3. Dokazati da za prirodne brojeve važe sledeće nejednakosti

(a) $\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots (4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

(b) $2^n > n^2$, za $n \geq 5$

(c) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(d) $(2n)! \leq \frac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}$

(e) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$

3.4. Ako je niz zadat rekurentnom formulom $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, dokazati da je za svako $n \geq 0$ $a_n = 2^n + 3^n$.

4 Analitička geometrija u prostoru

4.1. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jedinični vektori za koje važi: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Izračunati $< \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{c} > + < \vec{c}, \vec{a} >$.

4.2. Izračunati intenzitet vektora $\vec{a} - \vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 19$ i $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$.

4.3. Ako je $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ i $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$, odrediti ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

4.4. Dati su vektori $\vec{a} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$. Odrediti realne parametre p i q tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu ortogonalni, a vektor $\vec{a}$ zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$ sa pozitivnim delom x-ose.

4.5. Odrediti parametar $p \in \mathbb{R}$ takav da vektor $\vec{a} = 2p\vec{i} + \vec{j} + (1-p)\vec{k}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\,\vec{k}$.

4.6. Odrediti parametar $p \in \mathbb{R}$ takav da vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = p\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 9\vec{i} + 14\vec{j} + 16\vec{k}$ budu koplanarni.

4.7. Ispitati da li su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ koplanarni. Ako jesu, izraziti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

4.8. Neka su dati vektori $\vec{a} = (-1,\ 0,\ 5)$, $\vec{b} = (2,\ -8,\ -4)$ i $\vec{c} = (-3,\ -2,\ 3)$. Izračunati:

(a) $||\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}||$

(b) $\vec{a} \times \vec{b}$

(c) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

(d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

(e) $proj_{2\vec{b}}(\vec{a} - \vec{c})$

4.9. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Odrediti realne paramete α, β i γ tako da važi $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,(\vec{a} \times \vec{b})$.

4.10. Date su tačke $A(2,\ 1,\ 0)$, $B(-1,\ 3,\ 3)$ i $D(1,\ 0,\ -5)$. Odrediti koordinate tačke C tako da četvorougao $ABCD$ bude paralelogram, a zatim izračunati njegovu površinu.

4.11. Da li su tačke $A(0,\ 1,\ -2)$, $B(3,\ -1,\ -1)$, $C(4,\ 0,\ -5)$ i $D(-2,\ -4,\ 0)$ koplanarne? Kolika je zapremina tetraedra $ABCD$?

4.12. Odrediti tačku prodora prave $p:\ \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ kroz ravan $\alpha:\ 3x + y - 4z + 5 = 0$.

4.13. Odrediti rastojanje izmedju prave $p:\ x+1 = -2y+6 = 2z+4$ i ravni $\alpha:\ -x+3y+5z-7 = 0$.

4.14. U kakvom položaju stoje prave p i q?

(a) $p:\ x = -1 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = -5 + 3t,\quad q:\ x = 2 + s,\ y = -3 + 4s,\ z = 3 - 2s,\quad t, s \in \mathbb{R}$

(b) $p:\ \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1},\quad q:\ \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

(c) $p: \begin{array}{l} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{array}$, $q: \frac{x+3}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{5}$

4.15. Odrediti rastojanje izmedju mimoilaznih pravih
$p: \frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$ i $q: x=-2+t,\ y=4-3t,\ z=2,\ t\in\mathbb{R}$.

4.16. Odrediti jednačinu zajedničke normale mimoilaznih pravih $a: \frac{x}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{0}$ i $b: \frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-3}$

4.17. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku $P(5,\,-2,\,1)$ i normalna je na pravu $q: \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{2}$.

4.18. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $P(5,-2,1)$ i paralelna je pravoj $q: \frac{x+4}{-2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{1}$.

4.19. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

4.20. Odrediti jednačinu ravni koja sa ravni $\alpha: x-4y-8z+12=0$ obrazuje ugao $\frac{\pi}{4}$ i sadrži pravu $p: x+y+z=0,\ 2x-2z+3=0$.

5 Krive drugog reda

5.1. Naći poluose, žiže i ekscentricitet elipse

(a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(b) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$

(c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$

(d) $x^2+10(y-1)^2=10$

5.2. Naći poluose, žiže, ekscentricitet i asimptote hiperbole

(a) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$

(b) $\frac{(x-3)^2}{5}-\frac{(y+2)^2}{2}=1$

(c) $y^2-x^2=1$

(d) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$

5.3. Odrediti tangentu na krivu iz date tačke

(a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1,\ A(2,7)$.

(b) $x^2+4y^2=20,\ A(-6,-1)$.

(c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\ A(2,-1)$.

(d) $3x^2+4y^2=48,\ A(6,1)$.

(e) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1,\ A(-3,1)$.

5.4. Pokazati da središta paralelnih tetiva elipse (hiperbole) pripadaju jednoj pravoj koja sadrži centar elipse (hiperbole).

5.5. Naći žižu, teme i prametar p parabole.

(a) $y^2=2x$

(b) $y^2=6x-12$

(c) $y^2=-14x$

(d) $y^2=-5x+4$

5.6. Naći jednačine tangenti na parabolu $y^2=4x$ u presečnim tačkama sa pravom $p: 2x-3y+4=0$.

5.7. Odrediti zajedničke tangente krivih

(a) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ i $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

(b) $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ i $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

5.8. Odrediti parametar p parabole $y^2=2px$ tako da je ona normalna na krug $k: x^2+y^2+6x-63=0$.

5.9. Odrediti jednačinu normale na krivu iz date tačke

(a) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{48} = 1$, $B(\sqrt{2}, 6)$

5.10. Odrediti hiperbolu ako je prava $t:\ 5x - 6y - 8 = 0$ njena tangenta, a prave $a_{1,2}:\ y = \pm\frac{x}{2}$ su njene asimptote.

5.11. Odrediti jednačinu parabole ako je njena osa simetrije Ox - osa i prava $t:\ y = x - 3$ njena tangenta.

5.12. Krug k i parabola $y^2 = 12x$ u tački $T(3, 6)$ imaju zajedničku tangentu. Naći jednačinu kruga k ako on dodiruje Ox - osu.

5.13. Odrediti one tangente elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ čiji je odsečak između koordinatnih osa prepolovljen dodirnom tačkom.

6 Nizovi

6.1. Dokazati po definiciji

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{-1}{2})^n$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_2(1 + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}) = 0$

6.2. ispitati koji od sledećih nizova su ograničeni.

(a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

(b) $b_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$

(c) $c_n = \max\{n, 5\}$

(d) $d_n = \frac{2^n}{n!}$

6.3. Ispitati koji od navedenih nizova su monotoni

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(b) $b_n = n^2 - 8n + 12$

6.4. Izračunati

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-n}{n^2+2n+3}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-4n+5}{n^4+n^3-1}$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{2n+3} - \dfrac{1-3n^3}{3n^2+1}$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+3}}$

6.5. Odrediti granične vrednosti

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{2n})^n$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{n^2+3n+4}{n^2+2n+2})^{2n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{n^2+3}{n^2+1})^{3n}$

6.6. Dokazati da su sledeći nizovi konvergentni i odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

(a) $a_n = \frac{1}{n!}$

(b) $a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$

(c) $a_n = \frac{c^n}{n!}$, $c > 0$

(d) $a_n = q^n$, $|q| < 1$

6.7. Dokazati da važe sledeće jednakosti

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$, $|q| < 1$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k q^n = 0$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$,

6.8. Izračunati primenom teoreme o policajcima

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n \sin n!}{n^2+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(2^n(n+3))}{2^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

6.9. Izračunati primenom Štolcove teoreme

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \right)$, $p \in \mathbb{N}$

6.10. Odrediti granične vrednosti

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n+1}} + 3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n} \right)$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{n^2} - 3\sqrt[5]{n^3}}{3\sqrt[5]{n^2} + 2\sqrt[5]{n^3}}$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}}}{\sqrt{10n + \sqrt{8n + \sqrt{6n + \sqrt{4n + \sqrt{2n}}}}}}$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^{\frac{3}{2}} + 2n + \sqrt{n}}{5n^{\frac{3}{2}} + 5n - 3\sqrt{n}}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2n+3} \right)^{n(n+1)}$

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \right)^{3\sqrt{n}}$

7 Redovi

7.1. Odrediti sumu reda

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5} \right)^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n(n+1)}$

7.2. Ispitati konvergenciju redova sa pozitivnim članovima

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

7.3. Ispitati konvergenciju redova sa pozitivnim članovima

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n,\ 0<q<1,\ k\in\mathbb{N}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 11\cdot\ldots(10n-9)}{(2n-1)!!}$

7.4. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju alternirajućih redova

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$

8 Limesi funkcija i neprekidnost

8.1. Dokazati po definiciji

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3-x}=\frac{3}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(-x)=+\infty$

8.2. Odrediti levi i desni limes funkcije u datoj tački

(a) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\ x=0$

(b) $g(x)=\frac{1}{x-3},\ x=3$

(c) $h(x)=[x],\ x=4$

(d) $f(x)=x^2+5,\ x=3$

(e) $g(x)=\frac{x+2}{x-5},\ x=5$

(f) $h(x)=[x^2],\ x=3$

8.3. Važni limesi

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

8.4. Izračunati sledeće limese

(a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$

8.5. Izračunati granične vrednosti

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x-a}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

8.6. Izračunati granične vrednosti

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-3x+x^3+3x^4}}{(2x+\frac{1}{2})(1-x)}$

8.7. Ispitati neprekidnost funkcije u tački $x=0$

(a) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(b) $f(x)=\operatorname{sgn} x$

(c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

(d) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

8.8. Ispitati neprekidnost i odrediti tip prekida funkcije

(a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}, & x\notin\{-1,0,1\} \\ 0, & x\in\{-1,0,1\} \end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-2x^2-3x}{x-3}, & x\neq 3 \\ 10, & x=3 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x<0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & 0\le x<2 \\ \sqrt{x^2+5}-3, & x\ge 2 \end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases} \cos x+\sqrt{2}, & x<0 \\ \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x\ge 0 \end{cases}$

(g) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0 \end{cases}$

8.9. Odrediti $A\in\mathbb{R}$ tako da je funkcija $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$ neprekidna

(a) $f(x)=\frac{(1+x)^3-1}{x}$

(b) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

(c) $f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

9 Izvod funkcije

9.1. Izračunati izvod funkcije (tablični izvodi)

(a) $f(x)=x^5-4x^3+2x-3$

(b) $f(x)=\frac{\pi}{x}+\ln 2$

(c) $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$

(d) $f(x)=x^2\sqrt[3]{x^7}$

(e) $f(x)=5\sin x+3\cos x$

(f) $f(t)=\arcsin t+2$

9.2. Izračunati izvod funkcije (izvod proizvoda i količnika)

(a) $f(x)=x\operatorname{ctg}x$

(b) $f(x)=e^x\cos x$

(c) $f(x)=\sin x\ln x 2^x$

(d) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

(e) $f(t)=\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$

(f) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

(g) $f(t)=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$

(h) $f(t)=\frac{t^2}{\ln t}$

(i) $f(x)=x^{-1}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$

(j) $f(z)=z\operatorname{arctg}z$

(k) $f(t)=\frac{2}{3t+1}-\frac{2}{t}$

(l) $f(x)=x^7e^x$

9.3. Izračunati izvod funkcije (izvod složene funkcije)

(a) $f(x)=\sqrt{xe^x+x}$

(b) $f(x)=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+(\ln x)^5$

(c) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{arctg}x}$

(d) $f(x)=\ln^2 x-\ln\ln x$

(e) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$

(f) $f(x)=e^{-x^2}+\sin 3x$

(g) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(h) $f(x)=\operatorname{ctg}\arcsin x^2$

(i) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$

(j) $f(x)=x^{x^2}$

(k) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

(l) $f(x)=x^{x^x}$

9.4. Izračunati izvod implicitno zadate funkcije $y=y(x)$

(a) $x^2+y^2=1$

(b) $x^2+2xy-y^2=4x$

(c) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$

(d) $e^y\sin x+\ln y\cos x=\operatorname{arctg}x$

9.5. Izračunati izvod parametarske funkcije

(a) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$

(b) $x = 4 + 2\cos t$, $y = -1 + 2\sin t$

(c) $x = 5(e^t + e^{-t})$, $y = 3(e^t - e^{-t})$

9.6. Dokazati da je funkcija $f(x)$ rešenje diferencijalne jednačine

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$, $1 + y'^2 = 2yy''$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$, $y'' - 2y' + y = e^x$

9.7. Izračunati drugi izvod (po x) parametarske funkcije

(a) $x = \ln t$, $y = t^3$

(b) $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1 + t^2)$

(c) $x = 5(e^t + e^{-t})$, $y = 3(e^t - e^{-t})$

9.8. Izračunati sledeći limes i objasniti zašto ne može da se izračuna primenom lopitalovog pravila

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

9.9. Izračunati primenom lopitalovog pravila

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$

(f) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x})$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

9.10. Odrediti minimum i maksimum funkcije $f(x)$ na datom intervalu

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-1, 5]$

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-10, 12]$

(c) $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 3]$

(d) $f(x) = x^4 + 2$, $x \in [-5, 5]$

9.11. Odrediti lokalne ekstremume funkcije

(a) $f(x) = x \ln x$

(b) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(c) $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

(d) $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$

9.12. Naći intervale zakrivljenosti i prevojne tačke funkcije

(a) $f(x) = (x + 1)^4$

(b) $f(x) = x^2 \ln x$

(c) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(d) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

(e) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

9.13. Naći asimptote grafika funkcije

(a) $f(x) = x + \ln x$

(b) $f(x) = e^{-x^2} + 2$

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+9}$

(d) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(e) $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$

(f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

9.14. Skicirati grafik funkcije

(a) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

(c) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

(e) $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$

(f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(g) $f(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$

(h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(i) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(j) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$

(k) $f(x) = (1+x)\ln \frac{x+1}{x+2}$

(l) $f(x) = 1 - e^{2x-x^2}$

10 Neodređeni integral

10.1. Izračunati integrale

(a) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$

(b) $\int (6x^2+8x+3)\,dx$

(c) $\int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x})\,dx$

(d) $\int (5^x + x^5)\,dx$

(e) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2})\,dx$

(f) $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x)\,dx$

10.2. Izračunati integrale (smena promenljive)

(a) $\int \frac{dx}{x-a}$

(b) $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

(e) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

(f) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

(g) $\int \frac{x}{a^2+x^2}\,dx$

(h) $\int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx$

10.3. Izračunati integrale (smena promenljive)

(a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

(b) $\int \cos^2 2x\,dx$

(c) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

10.4. Izračunati integrale (parcijalna integracija)

(a) $\int x\ln x\,dx$

(b) $\int x^2\ln x\,dx$

(c) $\int \ln^2 x\,dx$

(d) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

(e) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\int x\sin x\,dx$

(g) $\int x\cos 3x\,dx$

(h) $\int e^x\cos x\,dx$

(i) $\int \arcsin x\,dx$

(j) $\int x\arctan x\,dx$

10.5. Izračunati integrale (parcijalna integracija)

(a) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

(b) $\int 3^x \cos x\,dx$

(c) $\int x\sin x\cos x\,dx$

(d) $\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx$

(e) $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\,dx$

(f) $\int \sin(\ln x)\,dx$

(g) $\int \sin 2x e^{3x}\,dx$

(h) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

10.6. Izračunati integrale (racionalne funkcije)

(a) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

(b) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$

(c) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

(d) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

(e) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

(f) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

(g) $\int \frac{x^2+1}{x^6+1}\,dx$

(h) $\int \frac{x^5-2x^4+3x^3-4x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

10.7. Izračunati integrale (trigonometrijske funkcije)

(a) $\int \sin^{10} x\ \cos^3 x\,dx$

(b) $\int \sin^4 x\ \cos^2 x\,dx$

(c) $\int \sin^5 x\,dx$

(d) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\ \cos^2 x}$

(e) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(f) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

(g) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,dx$

(h) $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx$

(i) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$

(j) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$

10.8. Izračunati integrale (neke iracionalne funkcije)

(a) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

11 Određeni integral i primene integrala

11.1. Izračunati vrednost odredjenih integrala

(a) $\int_0^1 (2x+1)^{50}\,dx$

(b) $\int_0^3 \frac{t\,dt}{t^2+1}$

(c) $\int_4^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$

(d) $\int_0^8 |x^2-6x+8|\,dx$

(e) $\int_0^3 x^2 e^{-x}\,dx$

(f) $\int_1^{e^{2\pi}} \sin\ln t\,dt$

(g) $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$

(h) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

(i) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

(j) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(l) $\int_1^e \ln x\,dx$

11.2. Izračunati površinu lika u ravni, ograničenog krivama

(a) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$

(b) $y=x-1,\ y^2=2x+6$

(c) $y^2=x,\ x-2y=3$

(d) $y=\cos x,\ y=\sin 2x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$

(e) $y=|x|,\ y=(x+1)^2-7,\ x=-4$

(f) $y=x^{-1},\ y=x^{-2},\ x=1,\ x=2$

(g) $4x+y^2=0,\ y=2x+4$

(h) $y=x,\ y=x^3$

(i) $y=x^2,\ y=\frac{2}{x^2+1}$

(j) $y=e^x,\ y=e^{3x},\ x=1$

(k) $x^2+4y^2=4,\ x^2-y^2=\frac{1}{4}$

(l) $x^2+y^2=1,\ y=x^2-1,\ y=-x$

11.3. Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom krive

(a) $y=\sqrt{x},\ x\in[0,\ 1]$ oko x-ose

(b) $y=x^3,\ y=8,\ x=0$ oko y-ose

(c) $y=x,\ y=x^2$ oko x-ose

(d) $y=x,\ y=x^2$ oko prave $y=2$

(e) $y=x^4,\ y=1$ oko prave $y=2$

(f) $y=x^2,\ y^2=x$ oko x-ose

(g) $y=2x-x^2,\ y=0,\ x=0,\ x=1,$ oko y-ose

(h) $y=x,\ y=x^2$ oko y-ose

11.4. Izračunati dužinu krive

(a) $y=\sin x$ između dva uzastopna preseka sa x - osom

(b) $y=2\sqrt{x},\ x\in[0,1]$

(c) $y=\ln x,\ x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}]$

(d) $y=\ln\cos x,\ x\in(0,\frac{\pi}{3})$

(e) $y=\arcsin e^{-x},\ x\in[0,1]$

(f) $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}$ između preseka sa x - osom

(g) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y,\ y\in[1,e]$

12 Nesvojstveni integral

12.1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenih integrala

(a) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$

(b) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

(d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

12.2. Izračunati vrednost nesvojstvenih integrala

(a) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$