

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

—задаци за вежбе—

Линеарна алгебра

1 Системи линеарних једначина

1.1. Решити системе:

а) $2x + 3y = 1,$
 $5x + 7y = 3.$

б) $2x + 4y = 10,$
 $3x + 6y = 15.$

в) $4x - 2y = 5,$
 $-6x + 3y = 1.$

1.2. Решити системе:

а) $2x + y - 3z = 5,$
 $3x - 2y + 2z = 5,$
 $5x - 3y - z = 16.$

б) $2x + 3y - 2z = 5,$
 $x - 2y + 3z = 2,$
 $4x - y + 4z = 1.$

в) $x + 2y + 3z = 3,$
 $2x + 3y + 8z = 4,$
 $3x + 2y + 17z = 1.$

1.3. Решити системе:

а) $x + 2y + 2z = 2,$
 $3x - 2y - z = 5,$
 $2x - 5y + 3z = -4,$
 $x + 4y + 6z = 0.$

б) $x + 5y + 4z - 13w = 3,$
 $3x - y + 2z + 5w = 2,$
 $2x + 2y + 3z - 4w = 1,$

1.4. Решити системе:

а) $x + 2y - 3z + 2w = 2,$
 $2x + 5y - 8z + 6w = 5,$
 $x - y + 3z - 4w = -1,$
 $4x + 9y - 10z + 10w = 9.$

б) $x - y - 2z + 2w = -1,$
 $2x + 2y - 2z - w = 2,$
 $3x - 5y + 4z + 3w = -5,$
 $x + 5y - 6z - 2w = 5.$

1.5. Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да систем

$$\begin{aligned}x + y + \alpha z &= 2, \\3x + 4y + 2z &= \alpha, \\2x + 3y - z &= 1,\end{aligned}$$

а) има јединствено решење; б) нема решења; в) има бесконачно решења.

1.6. У зависности од реалног параметра α , решити систем

$$\begin{aligned}x - 3z &= -3, \\2x + \alpha y - z &= -2, \\x + 2y + \alpha z &= 1.\end{aligned}$$

2 Вектори

2.1. Одредити $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да важи $\alpha \vec{a} = \beta \vec{b}$, где су $\vec{a} = (2, \beta)$ и $\vec{b} = (1, -2)$.

2.2. Дати су вектори $\vec{a} = (2, -1, 0, -3)$, $\vec{b} = (1, -1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (1, 3, -2, 2)$. Одредити вектор $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c}$, скаларне производе $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ и $\vec{b} \cdot \vec{c}$, норме $\|\vec{a}\|$ и $\|\vec{b}\|$, као и $d(\vec{a}, \vec{b})$.

2.3. Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $d(\vec{a}, \vec{b}) = 6$, где су $\vec{a} = (2, \alpha, 1, -4)$ и $\vec{b} = (3, -1, 6, -3)$.

2.4. Одредити $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, где су $\vec{a} = (2, 6, -2, 6)$ и $\vec{b} = (-2, 4, 2, 4)$.

2.5. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ су вектори $\vec{a} = (2, 3\alpha, -4, 1, 5)$ и $\vec{b} = (6, -1, 3, 7, 2\alpha)$ ортогонални?

- 2.6.** Испитати да ли је вектор $\vec{d} = (1, -2, 5)$ линеарна комбинација вектора $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (2, -4, -1)$ и $\vec{c} = (1, -5, 7)$. Проверити исто за вектор $\vec{e} = (1, -1, -3)$.
- 2.7.** Испитати да ли су вектори:
 а) $\vec{a} = (1, 4, -2, 3)$, $\vec{b} = (1, 6, -1, 4)$ и $\vec{c} = (3, 8, -8, 7)$;
 б) $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0, 0)$,
 линеарно зависни.
- 2.8.** Одредити вектор $\vec{b}$ нормалан на вектор $\vec{a} = (5, 3)$.
- 2.9.** Одредити вектор $\vec{c}$ нормалан на векторе $\vec{a} = (1, 3, 4)$ и $\vec{b} = (2, 6, -5)$.
- 2.10.** Одредити вектор $\vec{c}$ нормалан на векторе $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ и $\vec{b} = (1, -1, 2, 4)$.

3 Матрице

- 3.1.** Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Одредити $A + B$, $2A - 3B$ и A^T .
- 3.2.** Одредити $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ тако да $3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$.
- 3.3.** Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.
 Израчунати AB , BA , $A(BC)$ и $(AB)C$.
- 3.4.** Одредити скуп свих матрица које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.
- 3.5.** Решити матричну једначину $XA = B$, где су $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -30 & -12 \end{bmatrix}$.
- 3.6.** Одредити $k \in \mathbb{R}$ такво да матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ поништава полином $f(x) = x^2 - 25$.
- 3.7.** Израчунати $(A + B)^2$, где су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.
- 3.8.** Ако су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, израчунати $A^2 - C^2 + AB - AC + CA + CB$.
- 3.9.** Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Одредити када је A инвертибилна и наћи јој инверз.
- 3.10.** Доказати:
 а) Ако су A и B инвертибилне, онда је и AB инвертибилна и важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 б) Ако је A инвертибилна, онда је и A^T инвертибилна и важи $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- 3.11.** Елементарним трансформацијама врста одредити инверз матрице:
 а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{bmatrix}$; в) $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.
- 3.12.** Решити систем користећи проширену матрицу:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 3x + 8y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

4 Векторски простори

4.1. Доказати да је $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ векторски потпростор од $\mathbb{R}^3$.

4.2. Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$. Доказати да је $W \leq V$, ако је:

а) $W = \{A \in V \mid A^T = A\}$.

б) $W = \{A \in V \mid AT = TA\}$, где је $T \in V$ дата матрица.

Пример: $V = M_2(\mathbb{R})$, $T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

4.3. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$. Испитати да ли је скуп

а) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = 0 \right\}$;

б) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = 1 \right\}$,

затворен за сабирање и множење скаларом.

4.4. Нека је $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ и $W = \{f \in V \mid f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Доказати да је $W \leq V$.

4.5. Испитати да ли је $W \leq \mathbb{R}^3$, ако је:

а) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2b\}$;

б) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq b \leq c\}$;

в) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \cdot b = 0\}$;

г) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\}$;

д) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b^2\}$.

4.6. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$. Доказати да су $U = \{p \in V \mid p(0) + p(1) = 0\}$ и $W = \{p \in V \mid p(1) = p'(1) = 0\}$ векторски потпростори од V и одредити $U \cap W$.

4.7. Изразити полином $p = t^2 + 4t - 3$ као линеарну комбинацију полинома $p_1 = t^2 - 2t + 5$, $p_2 = 2t^2 - 3t$ и $p_3 = t + 3$.

4.8. Испитати да ли су следећи вектори линеарно независни:

а) $u = (1, -2, 1)$, $v = (2, 1, -1)$ и $w = (7, -4, 1)$;

б) $u = (1, 3, -1, 4)$, $v = (3, 8, -5, 7)$ и $w = (2, 9, 4, 23)$.

4.9. Испитати да ли су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ линеарно независне.

4.10. Нека је $V = \mathbb{R}^3[t]$. Испитати линеарну независност полинома $u = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$, $v = t^3 + 2t^2 + 4t - 1$ и $w = 2t^3 - t^2 - 3t + 5$.

4.11. Нека је $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Доказати да су функције $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ и $h(t) = t$ линеарно независне.

4.12. Нека су u, v и w линеарно независни вектори. Доказати да су тада и $u + v$, $u - v$ и $u - 2v + w$ линеарно независни.

4.13. Да ли вектори $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ и $u_3 = (2, -1, 1)$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

4.14. Нека је $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, -2, 1, 3, -1)$, $u_2 = (-2, 4, -2, -6, 2)$, $u_3 = (1, -3, 1, 2, 1)$ и $u_4 = (3, -7, 3, 8, -1)$. Одредити бар једну базу за W као и његову димензију.

4.15. Нека је $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, 1, 1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 2, -1, -2, 1)$, $u_3 = (3, 5, -1, -2, 5)$ и $u_4 = (1, 2, -1, -1, 4)$. Наћи подскуп скупа вектора $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ који формира базу за W .

4.16. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$. Наћи базу и димензију потпростора W који је генерисан векторима

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.17. Наћи базу и димензију потпростора W векторског простора $\mathbb{R}^3[t]$ генерисаног полиномима

$$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1, \quad v = t^3 + 3t^2 - t + 4, \quad w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7.$$

4.18. Нека је W векторски потпростор свих симетричних матрица у $M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је $\dim W = 3$.

4.19. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ дати са $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\}$ и $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c\}$. Наћи бар по једну базу за U и W , као и за $U \cap W$.

- 4.20.** Нека су $U, W \leq V$. Доказати да је тада $U \cap W \leq V$ и $U + W \leq V$.
- 4.21.** Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^3$ дати са $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\}$ и $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 0\}$. Показати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
- 4.22.** Дати су потпростори U_1, U_2 и U_3 векторског простора $\mathbb{R}^3$ са $U_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$, $U_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c\}$ и $U_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 0, b = 0\}$. Доказати да је:
- $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$;
 - $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$;
 - $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.
- Када је сума директна?
- 4.23.** Нека је $U \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $e_1 = (1, 3, -3, -1, -4)$, $e_2 = (1, 4, -1, -2, -2)$ и $e_3 = (2, 9, 0, -5, -2)$, а $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан са $f_1 = (1, 6, 2, -2, 3)$, $f_2 = (2, 8, -1, -6, -5)$ и $f_3 = (1, 3, -1, -5, -6)$. Наћи:
- $\dim(U + W)$;
 - $\dim(U \cap W)$.
- 4.24.** Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (1, 1, 0, -1)$, $e_2 = (1, 2, 3, 0)$ и $e_3 = (2, 3, 3, -1)$, а $W \leq \mathbb{R}^4$ генерисан са $f_1 = (1, 2, 2, -2)$, $f_2 = (2, 3, 2, -3)$ и $f_3 = (1, 3, 4, -3)$. Наћи бар једну базу за U , W , $U + W$ и $U \cap W$.
- 4.25.** Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$.
- Показати да је $V = U \oplus W$, где је U потпростор симетричних матрица ($A^T = A$) и W потпростор антисиметричних матрица ($A^T = -A$).
 - Показати да $V \neq U \oplus W$, где је U потпростор горње троугаоних матрица и W потпростор доњетроугаоних матрица.
- 4.26.** Нека су U и W различити седмодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од вредности.

4.27. Наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$.

5 Линеарна пресликавања

- 5.1.** Нека је $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ пројекција на Oxy раван, тј. $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Доказати да је F линеарно пресликавање.
- 5.2.** Нека је $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ translација за вектор $(1, 2)$, тј. $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Доказати да F није линеарно пресликавање.
- 5.3.** Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$ и нека је M фиксирана ненула матрица. Дата су пресликавања $T_i : V \rightarrow V$ са $T_1(A) = MA$, $T_2(A) = MA - AM$, $T_3(A) = M + A$. Која пресликавања су линеарна?
- 5.4.** Нека је $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ и $T(0, 1) = (2, 1, -1)$. Наћи формулу за T , тј. $T(a, b)$.
- 5.5.** Нека је $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $G(x, y, z) = (x + y, y + z)$.
- Доказати да је G линеарно;
 - Наћи базу и димензију за $\text{Im}G$;
 - Наћи базу и димензију за $\text{Ker}G$.
- 5.6.** Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ дефинише пресликавање $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ са $F(v) = A \cdot v$. Наћи базу и димензију за $\text{Im}F$ и $\text{Ker}F$.
- 5.7.** Нека су $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ пресликавања дата са $F(x, y, z) = (y, x + z)$, $G(x, y, z) = (2z, x - y)$ и $H(x, y) = (y, 2x)$. Наћи формуле за $F + G$, $3F - 2G$, $H \circ F$, $H \circ F$, $F \circ H$ и $G \circ H$.
- 5.8.** Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\text{Ker}L \cap \text{Im}L = \{0\} \iff \text{Ker}L^2 = \text{Ker}L.$$

- 5.9.** Нека је $A : V \rightarrow V$ линеарни оператор такав да је $V = \text{Ker} A \oplus \text{Im} A$. Доказати да је $V = \text{Ker} A^2 \oplus \text{Im} A^2$.
- 5.10.** Дата су пресликавања $F, G, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $F(x, y, z) = x + y + z$, $G(x, y, z) = y + z$ и $H(x, y, z) = x - z$. Показати да су ова пресликавања линеарно независна.
- 5.11.** Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато са $L(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z)$. Испитати да ли је L инвертибилан и ако јесте наћи формулу за L^{-1} .
- 5.12.** Наћи матрицу линеарног оператора $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ у односу на канонску базу E простора $\mathbb{R}^3$ и у односу на базу $S = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (1, 3, 5)\}$ ако је
- $T(x, y, z) = (x, y, 0)$;
 - $T(x, y, z) = (2x - 7y - 4z, 3x + y + 4z, 6x - 8y + z)$;
 - $T(x, y, z) = (z, y + z, x + y + z)$.
- 5.13.** Нека је D оператор диференцирања, $D(f) = f'(t)$. Наћи матрицу оператора D у бази
- $E = \{e^{5t}, te^{5t}, t^2e^{5t}\}$;
 - $F = \{1, t, \sin 3t, \cos 3t\}$.
- 5.14.** Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ дата матрица. Наћи матрицу следећих линеарних оператора $T : V \rightarrow V$ у односу на канонску базу простора V :
- $T(A) = MA$;
 - $T(A) = AM$;
 - $T(A) = MA - AM$.
- 5.15.** Дате су две базе $E = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ и $F = \{f_1 = (1, 2), f_2 = (2, 3)\}$ у $\mathbb{R}^2$.
- Наћи матрицу P преласка са базе E на F и матрицу Q преласка са базе F на E . Проверити да ли је $P = Q^{-1}$.
 - За линеарни оператор $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, x + y)$. Одредити матрице $[T]_e$ и $[T]_f$.
- 5.16.** Нека је $S = \{v_1, v_2\}$ база за V и $T : V \rightarrow V$ линеарни оператор за који је $T(v_1) = 3v_1 - 2v_2$ и $T(v_2) = v_1 + 4v_2$. Нека је $S' = \{w_1, w_2\}$ друга база за V где је $w_1 = v_1 + v_2$ и $w_2 = 2v_1 + 3v_2$. Наћи матрицу оператора T у бази S' .
- 5.17.** Нека је $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ линеарно пресликавање дефинисано са $F(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Наћи матрицу пресликавања F у односу на базе $S = \{w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\}$ и $S' = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (1, 4)\}$ простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.
- 5.18.** Нека је L линеарни оператор простора $\mathbb{R}^3$ задат са $L(x, y, z) = (x + y, x + 2y + 2z, x + 2y + 5z)$.
- Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.
 - Доказати да је оператор L инвертибилан.
 - Одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.
- 5.19.** Нека је $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(a, b, c, d) = (a + 3b + 5c + 9d, a + b + c - d, a + 2b + 3c + 4d)$.
- Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонске базе.
 - Одредити ранг, дефект и бар по једну базу језгра и слике пресликавања L .

6 Детерминанте

6.1. Израчунати следеће детерминанте:

$$\text{а) } |-5|; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

6.2. Ако је A ортогонална тј. $A^T A = E$, доказати да је $\det A = \pm 1$.

6.3. Израчунати следеће детерминанте:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

6.4. Израчунати $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$.

6.5. Не рачунајући је до краја, доказати да је $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

6.6. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $\det(kA) = k^n \det A$, $k \in \mathbb{R}$.

6.7. Израчунати:

а) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b & b & b & \dots & b \\ b & a & b & b & \dots & b \\ b & b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$.

6.8. Користећи адјунговану матрицу, одредити A^{-1} ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.9. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ произвољна матрица реда 2.

а) Одредити $\text{adj } A$;

б) Показати да је $\text{adj}(\text{adj } A) = A$.

6.10. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инвертибилна матрица. Доказати да је $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$.

6.11. Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалних параметара $a, b, c \in \mathbb{R}$, таквих да је $ab \neq 0$, решити систем

$$\begin{aligned} ax - 2by &= c, \\ 3ax - 5by &= 2c. \end{aligned}$$

6.12. Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити системе

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= 1, \\ x + y + az &= 1, \end{aligned} & \text{б)} \quad & \begin{aligned} -2x + ay + 3z &= a + 1, \\ -2x + 2y + (a-2)z &= 1, \\ x - 3y + 4z &= 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

6.13. Наћи запремину паралелепипеда у $\mathbb{R}^3$ разапетог векторима $\vec{a} = (1, 2, 4)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$ и $\vec{c} = (5, 7, 9)$.

7 Карактеристични и минимални полином. Дијагонализација матрица

7.1. Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$.

7.2. Нека је $A \in M_3(\mathbb{R})$. Доказати да је $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \text{tr} A - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A$.

7.3. Доказати да A и A^T имају исти карактеристични полином.

7.4. Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином.

7.5. Наћи карактеристични полином матрице:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.6. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи:

- а) сопствене вредности и сопствене векторе матрице A ;
- б) инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}AP$ дијагонална.
- в) A^5 .

7.7. Нека је $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A слична дијагоналној матрици D .

7.8. Нека је $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Наћи A^n , $n \in \mathbb{N}$.

7.9. Нека је $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

- а) Наћи минимални полином $\mu_A(x)$ матрице A .
- б) Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .
- в) Испитати да ли је A дијагоналног типа.
- г) Наћи A^n , $n \in \mathbb{N}$.

7.10. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- а) Наћи минимални полином $\mu_A(x)$ матрице A .
- б) Наћи сопствене вредности и сопствене векторе.
- в) Испитати да ли је A дијагоналног типа.

7.11. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

7.12. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити карактеристични и минимални полином матрице A .

8 Скаларни производ

8.1. Доказати да је са $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ дефинисан скаларни производ у $\mathbb{R}^2$.

8.2. Нека је $V = M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T A)$.

Ако је $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Наћи $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$ и $\|B\|$.

8.3. Доказати да је:

- а) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$;
- б) $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

8.4. Наћи растојање и угао између вектора u и v , где

- а) $u = (1, 3, 5, 7)$, $v = (4, -2, 8, 1)$ са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^4$;
- б) $u = (1, -3, 2)$, $v = (2, 1, 5)$ са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^3$.

8.5. Ако је $S \leq V$, доказати да је и $S^\perp$ векторски потпростор простора V .

8.6. Нека је $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, -3), u_3 = (5, -4, -1)\}$.

- а) Доказати да је S ортогоналан скуп и база простора $\mathbb{R}^3$ у односу на стандардни скаларни производ.
- б) Написати $v = (1, 5, -7)$ као линеарну комбинацију вектора u_1 , u_2 и u_3 .

- 8.7. Грам-Шмитовим поступком одредити ОНБ потпростора W простора $\mathbb{R}^4$ генерисаног векторима $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ и $f_3 = (-1, 2, 0, 1)$. Затим одредити базу потпростора $W^\perp$.
- 8.8. Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Користећи Грам-Шмитов поступак наћи ОНБ за V .
- 8.9. Одредити угао који вектор $v = (1, 0, -1)$ заклапа са скупом W решења једначине $-2x + y + z = 0$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$. Затим одредити растојање вектора v од потпростора W .
- 8.10. Дат је векторски простор W решења система једначина $4x + 2y - 4z + 2t = 0$, $5x + y - 3z + 3t = 0$.
 а) Наћи базу и димензију W .
 б) Наћи базу и димензију $W^\perp$.
 в) Растојање вектора $v = (2, 6, -2, 6)$ од W .
 г) Угао између вектора $v = (2, 6, -2, 6)$ и W .
- 8.11. Нека је V векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (1, 2, 1, 2)$ и $e_2 = (4, 3, 1, 2)$.
 а) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $w = (1, 2, -1, -2)$ на V и $V^\perp$.
 б) Којем од потпростора V и $V^\perp$ је ближи w ?
- 8.12. Дат је векторски потпростор $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$.
 а) Наћи базу и димензију W .
 б) Одредити угао који матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ заклапа са простором W у односу на скаларни производ $A \circ B = \text{Tr}(AB^T)$.
- 8.13. Ако је на простору $V = \mathbb{R}^3[x]$ скаларни производ дефинисан са
- $$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0)q'''(0),$$
- и $W = \{p \in V \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити угао који полином $p(x) = -x^2 - x + 2$ заклапа са W .
- 8.14. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $A \circ B = \text{Tr} \left(A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} B \right)$ и нека је дат потпростор $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0\}$.
 а) Одредити ортогоналну пројекцију јединичне матрице I на W и $W^\perp$.
 б) Ком простору је вектор I ближи?
- 8.15. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $A \circ B = \text{Tr}(B^T A)$. Ако је $W = \{A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, наћи ортогоналну базу за $W^\perp$.

Аналитичка геометрија

9 Геометрија у $\mathbb{R}^2$

- 9.1. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(1, 2)$ и има вектор нормале $\vec{n}_p = (1, -2)$.
- 9.2. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(2, 3)$ и има вектор правца $\vec{p} = (2, 1)$.
- 9.3. Одредити једначину праве p која садржи тачке $A(1, 2)$ и $B(5, 4)$. Записати p у канонском, параметарском и имплицитном облику.
- 9.4. Одредити углове које права $p : 3x - 2y + 4 = 0$ заклапа са координатним осама.
- 9.5. Одредити једначину нормале n праве $p : 2x + 3y - 4 = 0$ која садржи пресек правих $q : x + y + 2 = 0$ и $r : x - y = 0$.
- 9.6. Одредити растојање тачке $A(3, 6)$ од праве $p : x + 2y - 1 = 0$.
- 9.7. Одредити симетралу углова између правих $p : y = x - 2$ и $q : y = 3$.
- 9.8. Одредити једначину праве p чији је коефицијент правца -2 и налази се на растојању 2 од координатног почетка.

10 Геометрија у $\mathbb{R}^3$

- 10.1. Одредити једначину нормале n из тачке $A(2, 3, -1)$ на раван $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.
- 10.2. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(-1, 0, 3)$ и нормална је на $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.
- 10.3. Дате су раван $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Одредити:
а) пресек праве p и равни α . б) угао између праве p и равни α .
- 10.4. Одредити тачку C која је симетрична тачки $A(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$, као и пројекцију B тачке A на раван α .
- 10.5. Одредити тачку C која је симетрична тачки $A(-1, -2, 1)$ у односу на праву $p : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$, као и пројекцију B тачке A на праву p .
- 10.6. Дате су раван $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Одредити пројекцију праве p на раван α .
- 10.7. Дате су равни $\alpha : 8x + 2y - 3z - 7 = 0$ и $\beta : -6x + 4y + z - 7 = 0$ и права

$$\begin{aligned}x &= t, \\p : \quad y &= 2t - 14, \quad t \in \mathbb{R}, \\z &= -2t + 10,\end{aligned}$$

- а) Испитати узајамни положај равни α и β . Одредити растојање између њих, ако су паралелне, или угао између њих, ако се секу;
б) Одредити једначину праве q која је симетрична правој p у односу на раван β .
- 10.8. Израчунати површину троугла са теменима $A(1, 2, 3)$, $B(4, 7, -2)$ и $C(-3, 7, 8)$.
- 10.9. Одредити једначину равни α која:
а) је паралелна равни Oxz и садржи тачку $A(2, 3, 5)$;
б) садржи z -осу и тачку $B(-3, 1, 2)$;
в) је паралелна x -оси и садржи тачке $C(4, 0, -2)$ и $D(5, 1, 7)$.
- 10.10. Одредити једначину равни β која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.
- 10.11. Дате су права $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ и раван $\alpha : 3x - y + 6 = 0$. Одредити једначнину праве q која припада равни α и сече праву p под правим углом.
- 10.12. У каквом положају стоје праве p и q ?
 $x = -1 + 2t, \quad x = 2 + s,$
а) $p : y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad q : y = -3 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}$
 $z = -5 + 3t, \quad z = 3 - 2s,$
б) $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}, \quad q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$
в) $p : x + 5y + z = 0$
 $x - z + 4 = 0, \quad q : \frac{x+3}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}.$
- 10.13. Одредити параметар $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да се праве $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу и за такво λ наћи пресечну тачку као и раван α која садржи p и q .
- 10.14. Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$
- 10.15. Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$. Одредити праву l која садржи тачку L и сече праве p и q .
- 10.16. Кроз тачку $Q(-3, 1, 2)$ одредити праву q која је паралелна равни $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p : \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$