Geometrija 3
Zadaci po kojima se drže vežbe

1 Krive

1. Ispitati da li su sledeće parametrizacije regularne:
   (a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\pi, \pi)$;
   (b) $\beta(t) = (\cos t^3, \sin t^3)$, $t \in (-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$.

2. Dokazati da su sledeći skupovi tačaka regularne krive:
   (a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$;
   (b) $K = \{(t^2, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

3. Dokazati da skup $A = \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ nije regularna kriva.

4. Dokazati da je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ dovoljan uslov da kriva $F(x, y) = 0$ bude regularna u tački (x_0, y_0). Da li je taj uslov i potreban?

5. Parametrizovati i skicirati cikloidu, epicikloidu i hipocikloidu. Da li su ove krive regularne?

6. Dokazati da slika Vivijanijeve krive $v(t) = a(1+\cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ pripada preseku sfere i cilindra.

7. Izračunati dužinu luka sledećih krivih:
   (a) $y = \ln \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{3})$;
   (b) $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$ između preseka sa x - osom;
   (c) $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $t \in (0, 2)$;
   (d) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $t \in (0, \sqrt{2})$;
   (e) $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$;
   (f) $\rho = a(1 + \cos \theta)$; (kardioida)
   (g) $\rho = a\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$. (Arhimedova spirala)

8. Naći prirodnu parametrizaciju krivih:
   (a) kruga $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$;
   (b) heliksa $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;
   (c) lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $a > 0$;
   (d) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Naći tangentu krive $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1)$ koja je paralelna pravoj $p : 2x - y + 3 = 0$.

10. Odrediti presečne tačke i ugao između krivih:
    (a) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 9$;
    (b) $x^2 - y^2 = a^2$, $xy = b$.

11. Dokazati da je ugao između vektora položaja i tangente logaritamske spirale $\rho = ca^\theta$ ($a > 0$, $c > 0$) konstantan.

12. Dokazati da je dužina odsečka, određenog koordinatnim osama, tangentne linije astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, konstantna.

13. Naći Freneov reper, krivinu i torziju sledećih krivih:

    (a) $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, $r > 0$;

    (b) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$.

14. Dokazati da vektor $X = \tau T + \kappa B$ (Darbuov vektor) zadovoljava:

$$T' = X \times T$$

$$N' = X \times N$$

$$B' = X \times B.$$

15. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Ako je $\kappa(s) = 0$, tada je α deo prave. Dokazati.

16. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0$. Dokazati da su sledeći stavovi ekvivalentni:

    (a) α je ravanska kriva;

    (b) B je konstantan vektor;

    (c) $\tau(s) = 0$ za sve $s \in I$.

17. Dokazati da je sledeća kriva ravanska $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$ i naći ravan u kojoj leži.

18. Ako sve tangentne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada slika te krive pripada nekoj pravoj.

19. Ako sve normalne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada je slika te krive sadržana u krugu.

20. Sferna kriva konstantne krivine je deo kruga. Dokazati.

21. Neka je $\alpha(s) : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati da je $[x - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$ jednačina oskulatorne ravni u tački $\alpha(0)$.

22. Dokazati da se sve oskulatorne ravni neke regularne krive sa krivinom različitom od nule seku u jednoj tački akko je ta kriva ravanska.

23. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ regularna kriva čija krivina je različita od nule. Neka je $L(s_0, s_1, s_2)$ krug određen tačkama $\alpha(s_0)$, $\alpha(s_1)$ i $\alpha(s_2)$ za $s_0 < s_1 < s_2$ i $s_0, s_1, s_2 \in I$. Odrediti centar i poluprečnik graničnog kruga kada $s_0, s_1, s_2 \to s$, $s \in I$.

24. Dokazati da važe Freneove formule za regularnu krivu $\alpha(t)$, $\kappa \neq 0$ parametrizovanu proizvoljnim parametrom t ($v = s' = ||\alpha'||$):

$$\begin{aligned} T'(t) &= \quad\quad\quad v\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -v\kappa(t)T(t) \quad\quad\quad + v\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= \quad\quad\quad -v\tau(t)N(t). \end{aligned}$$

25. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati:

    (a) $[T, B, B'] = \tau$;

    (b) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\tau \neq 0$;

    (c) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

26. Dokazati da važe sledeće formule za krivu α parametrizovanu proizvoljnim parametrom:

    (a) $T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||}$;

(b) $B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||}$;

(c) $N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{||\alpha'|| \, ||\alpha' \times \alpha''||}$

(d) $\kappa = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}$;

(e) $\tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{||\alpha' \times \alpha''||^2}$.

27. Neka je kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho = \rho(\theta)$.

(a) Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta.$$

(b) Dokazati da je krivina krive α data sa:

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2|}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Odrediti krivinu Bernulijeve lemniskate ($\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$).

28. Odrediti ravansku krivu (do na izometrijsku transformaciju) ako je data krivina:

(a) $\kappa(s) = \frac{1}{as+b}$, $a, b \neq 0$;

(b) $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

29. Data je kriva $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, \sqrt{2}\sin t + 2, \sqrt{2}\cos t + \sin t + 3)$.

(a) Izračunati krivinu i torziju.

(b) Detaljno opisati krivu.

30. Regularna parametrizovana kriva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, ($\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$) je Bertranova kriva ako postoji kriva $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ takva da se normalne linije od α i $\bar{\alpha}$ poklapaju. Dokazati da je kriva α Bertranova akko postoje konstante $C, D \neq 0$ takve da je $C\kappa + D\tau = 1$.

31. Uopštena zavojna linija (heliks)je prostorna kriva čiji tangentni vektor zaklapa konstantan ugao sa fiksiranim nenula vektorom. Prava određena ovim vektorom se naziva osa heliksa. Dokazati da je kriva uopštena zavojna linija akko važi jedan od uslova:

(a) normale su normalne na osu;

(b) binormale grade konstantan ugao sa osom;

(c) $\frac{\kappa}{\tau} = const.$

32. Neka je $\alpha(t)$, $t \in I$, regularna kriva. Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}^3$ tako da je $(\alpha(t) - a) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je $\alpha(t)$ sferna kriva.

33. Slika prirodno parametrizovane krive $\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ krivine κ leži na sferi poluprečnika c. Dokazati nejednakost $\kappa \geqslant \frac{1}{c}$.

34. Neka za krivinu i torziju krive α važi $\kappa \neq 0$, $\kappa' \neq 0$ i $\tau \neq 0$. Dokazati da je kriva sferna akko je $R^2 + (R')^2 P^2$ konstantno, gde je $R = \frac{1}{\kappa}$ i $P = \frac{1}{\tau}$.

35. Dokazati da krajevi duži fiksirane dužine c na binormali zavojne linije pripadaju nekoj zavojnoj liniji.

36. Data je kriva α i tačke P i Q van nje. Neka je M_0 tačka krive u kojoj zbir rastojanja $||PM|| + ||MQ||$, $M \in \alpha$ dostiže minimum. Dokazati da je simetrala ugla $\measuredangle PM_0Q$ normalna na tangentu krive u tački M_0.

37. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva, P tačka na njoj, takva da je $\kappa(P) \neq 0$, A presek krive α i prave na rastojanju h od tangente krive u tački P i d rastojanje tačke A od normale krive u P. Dokazati da je $\kappa(P) = \lim\limits_{d \to 0} \frac{2h}{d^2}$.