

## 1. KRIVE

**Definicija 1.1.** Regularna (parametrizovana) kriva u  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , je preslikavanje  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , klase  $C^k$  za neko  $k \geq 1$ , tako da je  $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ , za sve  $t \in (a, b)$ .

Oznake:  $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ ;  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \dots, \alpha''_n(t))$ .

**Definicija 1.2.** Vektor brzine regularne krive  $\alpha(t)$  u  $t = t_0$  je  $\frac{d\alpha}{dt}$  izračunat u  $t = t_0$ . Brzina krive  $\alpha$  u  $t = t_0$  je dužina vektora brzine u  $t = t_0$ , tj.  $\left\| \frac{d\alpha}{dt}(t_0) \right\|$ .

Za krivu  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  kažemo da je **jedinične brzine** ukoliko je  $\|\alpha'(t)\| = 1$  za  $a < t < b$ .

**Definicija 1.3.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  kriva. **Vektorsko polje (polje vektora) duž krive  $\alpha$**  je funkcija  $Y$  koja svakom  $t \in (a, b)$  dodeljuje vektor  $Y(t)$  u tački  $\alpha(t)$ .

$$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

**Definicija 1.4.** **Tangentno vektorsko polje** na regularnu krivu  $\alpha(t)$  je polje vektora

$$T(t) = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|}$$

**Tangentna linija (tangenta)** na regularnu krivu  $\alpha$  u tački  $t = t_0$  je prava:

$$l = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w = \alpha(t_0) + sT(t_0), s \in \mathbb{R}\}.$$

**Definicija 1.5.** Neka su  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dve regularne parametrizovane krive klase  $C^k$ . Tada se kaže da su one **ekvivalentne** (piše se  $\alpha \sim \beta$ ) ako postoji difeomorfizam  $\phi : (c, d) \rightarrow (a, b)$  klase  $C^k$  tako da je  $\beta = \alpha \circ \phi$ . Kriva  $\beta$  je **reparametrizacija** krive  $\alpha$ . Za  $\beta$  se kaže da je **pozitivna reparametrizacija** krive  $\alpha$  ukoliko je  $\phi' > 0$ , a **negativna reparametrizacija** krive  $\alpha$  ukoliko je  $\phi' < 0$ .

**Lema 1.1.** Relacija  $\sim$  navedena u Definiciji 1.5 je relacija ekvivalencije.

**Definicija 1.6.** Klasa ekvivalencije  $[\alpha]$  relacije  $\sim$  je **regularna geometrijska (neparametrizovana) kriva**, tj. **regularna kriva**, ili **samo kriva**.

Napomenimo da se termin "kriva" često se koristi i za skup slika, tj. za  $\mathcal{S} = \alpha((a, b))$ , naročito ukoliko ne postoji mogućnost zabune. Za preslikavanje  $\alpha$  kažemo da je "parametrizacija skupa"  $\mathcal{S}$ , "parametarski oblik" skupa  $\mathcal{S}$ , da "parametarski definiše" skup  $\mathcal{S}$ , ili, slobodnije, da je "parametrizacija krive"  $\mathcal{S}$ . Tako kažemo i da je "kriva  $\alpha$  parametarski zadana, definisana".

Koja je relacija između brzine krive  $\alpha$  i brzine njene reparametrizacije?

**Lema 1.2.** Neka je  $\beta$  reparametrizacija od  $\alpha$ . Tada je

$$(1.1) \quad \beta'(u) = \phi'(u) \alpha'(\phi(u)),$$

pri čemu je  $\beta = \alpha \circ \phi$ ,  $\phi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ ,  $c < u < d$ .

Da li su krive  $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ ,  $\beta(t) = (t^3, 0, 0)$ ,  $\gamma(t) = (t^3 + t, 0, 0)$  regularne? Koje su njihove slike (tragovi) ?

Da li su krive  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$  i  $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 4\pi$  ekvivalentne u smislu Definicije 1.5?

Da li je prava  $p = \{w \in \mathbb{R}^3 | w = \alpha(t_0) + \lambda \frac{d\alpha}{dt}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}\}$  tangenta linija?

Da li tangenta linija zavisi od parametrizacije? Da li vektor brzine zavisi od parametrizacije? A tang vektor?

Da li skup tačaka u  $\mathbb{R}^2$  možemo zadati i na neki drugi način?

**Definicija 1.7.** Neka je  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ne obavezno neprekidna funkcija. **Skup nula funkcije**  $F$  je skup  $F^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 | F(p) = 0\}$ . **Implicitno definisana kriva** u  $\mathbb{R}^2$  je skup nula diferencijabilne funkcije  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Čak i kada pretpostavimo da je  $F$  diferencijabilna, skup nula od  $F$  može da ima "vrhova". Medjutim, postoji važan slučaj kada je moguće naći parametrizaciju skupa nula od  $F$ .

**Teorema 1.1.** Neka je  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilna funkcija i  $q$  tačka takva da je  $F(q) = 0$ . Ukoliko je  $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_q \neq 0$ , tada postoji okolina  $\mathcal{U}$  od  $q$  u  $\mathbb{R}^2$  i (parametrizovana) kriva  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  takav da je slika od  $\alpha$   $\{p \in \mathcal{U} | F(p) = 0\}$ .

Koristeći polarne koordinate  $x = r \cos t, y = r \sin t$ , ravansku krivu možemo zadati preslikavanjem  $\alpha(\theta) = \rho_\alpha(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ , za  $\rho_\alpha(\theta) \geq 0, a < \theta < b$ . Tada kažemo da je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  **polarna parametrizacija**, a funkciju  $\rho_\alpha$  zovemo **radijus funkcija** krive  $\alpha$ . Radijus funkcija potpuno određuje polarnu parametrizaciju krive, pa često krivu definišemo koristeći samo radijus funkciju.

**Definicija 1.8.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna kriva. Pretpostavimo da je  $\alpha$  definisana na otvorenom intervalu  $(c, d)$ , sa  $c < a < b < d$ , tako da je  $\alpha$  definisana i diferencijabilna u  $a$  i  $b$ . **Dužina luka krive** na intervalu  $[a, b]$  je

$$(1.2) \quad L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Neka je kriva  $\alpha$  zadana polarnom parametrizacijom  $\rho = \rho(\theta)$ . Dokazati da je dužina krive  $\alpha$  na segmentu  $[a, b]$  data formulom:

$$(1.3) \quad L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta.$$

Neka je kriva  $\alpha$  zadana sa  $y = f(x)$ . Tada je dužina krive  $\alpha$  na segmentu  $[a, b]$  data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2} dx.$$

Za neko svojstvo krive kažemo da je geometrijsko ako ono ne zavisi od parametrizacije, ili ako samo zavisi od izbora orijentacije.

**Teorema 1.2.** Neka je  $\beta$  reparametrizacija od  $\alpha$ . Tada je  $L(\alpha) = L(\beta)$ .

**Definicija 1.9.** Fiksirajmo broj  $c$  sa  $a < c < b$ . **Funkcija dužine luka**  $s_\alpha$  sa početkom u  $c$  krive  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  je definisana sa

$$(1.4) \quad s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du,$$

za  $c \leq t \leq b$ .

**Teorema 1.3.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna kriva. Tada postoji njena reparametrizacija  $\beta$ , čija je brzina jedinična.

Funkcija dužine luka proizvoljne krive jedinične brzine (npr.  $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) zadovoljava

$$s = s(t) = \int_c^t \|\beta'(u)\| du = t - c,$$

tj. funkcija  $s$  meri dužinu.

**Posledica 1.** Neka je  $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  kriva dobijena reparametrizacijom definisanom Teoremom 1.3. Tada kažemo da je  $\beta$  **parametrizovana dužinom luka** ili da je to **prirodna parametrizacija**.

Određiti prirodnu parametrizaciju prave, kružnice, elipse, parabole, heliksa...

**Posledica 2.** Dve proizvoljne prirodne parametrizacije date krive razlikuju se za konstantu.

**Posledica 3.** Neka je  $\alpha$  regularna kriva i  $s = s(t)$  dužina luka te krive. Tada je

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{ds}{dt} &= \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \|\alpha'(t)\| \\ (2) \quad \alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt} T \\ (3) \quad T &= \frac{d\alpha}{ds} \end{aligned}$$

**Definicija 1.10.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva.

Krivina krive  $\alpha$  je

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|.$$

Vektorsko polje **glavnih normala** krive  $\alpha$  je

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}, \quad \kappa \neq 0$$

a vektorsko polje **binormala** je

$$B(s) = T(s) \times N(s), \quad \kappa \neq 0.$$

**Torzija** krive  $\alpha$  je funkcija

$$\tau(s) = - \langle B'(s), N(s) \rangle, \quad \kappa \neq 0.$$

**Definicija 1.11.** Frenet-Serret-ov reper prirodno parametrizovane krive  $\alpha$  je  $\{T(s), N(s), B(s)\}$ .

**Lema 1.3.** Neka je  $\alpha$  prirodno parametrizovana kriva. Tada je **Frenet-Serret-ov** reper ortonormiran, u tačkama gde je  $\kappa(s) \neq 0$ .

**Teorema 1.4.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva i  $\kappa(s) \neq 0, s \in (a, b)$ . Tada je

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

za sve  $s \in (a, b)$ .

**Definicija 1.12.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna kriva i neka je  $\tilde{\alpha} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva  $\alpha$ . Naime,  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$ , pri čemu je  $s(t)$  dužina luka. Označimo sa  $\tilde{\kappa}$  i  $\tilde{\tau}$  krivinu i torziju krive  $\tilde{\alpha}$ , a sa  $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$  Frenet-ovu bazu krive  $\tilde{\alpha}$ . **Krivina krive proizvoljne brzine**,  $\alpha$ , je reparametrizacija krivine krive  $\tilde{\alpha}$ , tj.  $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t))$ . Slično:  $\tau(t) = \tilde{\tau}(s(t))$ ,  $T(t) = \tilde{T}(s(t))$ ,  $N(t) = \tilde{N}(s(t))$ ,  $B(t) = \tilde{B}(s(t))$ , za torziju i Frenet-ovu bazu.

**Teorema 1.5.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna kriva sa brzinom  $v = \|\alpha'\| = s'$ . Tada su "uopštene" Frenet-ove formule:

$$\begin{aligned} T'(s) &= v\kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -v\kappa(s)T(s) + v\tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -v\tau(s)N(s). \end{aligned}$$

**Lema 1.4.** Brzina i ubrzanje regularne krive  $\alpha$  su dati formulama

$$(1.5) \quad \alpha' = vT,$$

$$(1.6) \quad \alpha'' = \frac{dv}{dt}T + v^2\kappa N,$$

gde  $v$  označava brzinu krive  $\alpha$ .

**Teorema 1.6.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna kriva i  $\kappa > 0$ . Tada je:

$$(1) \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|};$$

$$(2) \quad N = B \times T;$$

$$(3) \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3};$$

$$(4) \quad \tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

**Definicija 1.13.** Oskulatorna ravan krive  $\alpha$  parametrizovane dužinom luka u tački  $\alpha(s)$  je ravan koja sadrži  $\alpha(s)$  i ortogonalna je na vektor binormale. slično, **normalna ravan** je ortogonalna na  $T$ , a rektificiona ravan je ortogonalna na  $N$ .

**Teorema 1.7.** Izometrije prostora  $\mathbb{R}^3$  čuvaju krivinu, torziju i izvod funkcije dužine luka. Znak torzije se menja ukoliko je izometrija indirektna.

**Teorema 1.8.** Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  prirodno parametrizovane krive u  $\mathbb{R}^3$  definisane na istom intervalu  $(a, b)$  i pretpostavimo da imaju istu torziju i istu pozitivnu krivinu. Tada postoji izometrija koja preslikava  $\alpha$  u  $\beta$ .

**Teorema 1.9.** Neka su  $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\kappa > 0$  i  $\tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferencijabilne funkcije. Tada postoji kriva jedinične brzine  $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  čija je krivina  $\kappa$  i torzija  $\tau$ .

**Definicija 1.14.** Neka je  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  prirodno parametrizovana kriva i  $N_z$  vektor normale takav da je  $[T, N_z]$  pozitivno orijentisana ortonormirana baza. Tada je  $\kappa_z$  "uopštena" krivina krive  $\alpha$ , pri čemu je  $\alpha'' = \kappa_z N_z$ .

**Teorema 1.10.** Neka je  $k_z : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna glatka funkcija. Tada postoji prirodno parametrizovana kriva  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  čija je "uopštena" krivina  $k_z$ .

Ukoliko je  $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  neka druga prirodno parametrizovana kriva čija je "uopštena" krivina  $k_z$ , tada postoji direktna izometrija  $M$  u  $\mathbb{R}^2$ , takva da je  $\beta(t) = M(\alpha(t))$ , za sve  $t \in (a, b)$ .

**Posledica 4.** Kriva  $\alpha$  iz Teoreme 1.10 je:  $\alpha(t) = \left( \int_{s_0}^t \cos \theta(u) du, \int_{s_0}^t \sin \theta(u) du \right)$ ,  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k_z(u) du$ .

**Posledica 5.** Jedan od klasičnih načina da se opiše ravanska kriva  $\alpha$  je pomoću **prirodnih jednačina**, tj. jednačina oblika  $F(\kappa, s) = 0$ , gde  $s$  označava funkciju dužine luka krive  $\alpha$ . Ove jednačine jasno pokazuju kako se krivina menja pri promeni dužine luka i invarijantne su pri translaciji i rotaciji. Ipak, ove jednačine nisu baš korisne za račun.