

# Matematka 1

## Zadaci za drugi kolokvijum

### 8 Limesi funkcija i neprekidnost

8.1. Dokazati po definiciji

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{3 - x} = \frac{3}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$$

8.2. Odrediti levi i desni limes funkcije u datoj tački

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn} x, x = 0$$

$$(b) g(x) = \frac{1}{x-3}, x = 3$$

$$(c) h(x) = [x], x = 4$$

$$(d) f(x) = x^2 + 5, x = 3$$

$$(e) g(x) = \frac{x+2}{x-5}, x = 5$$

$$(f) h(x) = [x^2], x = 3$$

8.3. Važni limesi

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

8.4. Izračunati sledeće limese

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$$

### 8.5. Izračunati granične vrednosti

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x(x+2)} - x \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

### 8.6. Izračunati granične vrednosti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-3x+x^3+3x^4}}{(2x+\frac{1}{2})(1-x)}$$

### 8.7. Ispitati neprekidnost funkcije u tački $x = 0$

$$(a) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(b) f(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(d) f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

### 8.8. Ispitati neprekidnost i odrediti tip prekida funkcije

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \notin \{-1, 0, 1\} \\ 0, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x-2}, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 5} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{2}, & x < 0 \\ \frac{(1+x)\sqrt{2}-1}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

### 8.9. Odrediti $A \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ neprekidna

$$(a) f(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$$

$$(b) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$(c) f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

## 9 Izvod funkcije

### 9.1. Izračunati izvod funkcije (tablični izvodi)

$$(a) f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$$

$$(b) f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$$

$$(c) f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$$

$$(d) f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^7}$$

$$(e) f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$$

$$(f) f(t) = \arcsin t + 2$$

**9.2.** Izračunati izvod funkcije (izvod proizvoda i količnika)

- (a)  $f(x) = x \operatorname{ctg} x$  (g)  $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$   
(b)  $f(x) = e^x \cos x$  (h)  $f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$   
(c)  $f(x) = \sin x \ln x 2^x$  (i)  $f(x) = x^{-1} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$   
(d)  $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$  (j)  $f(z) = z \operatorname{arctg} z$   
(e)  $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$  (k)  $f(t) = \frac{2}{3t+1} - \frac{2}{t}$   
(f)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$  (l)  $f(x) = x^7 e^x$

**9.3.** Izračunati izvod funkcije (izvod složene funkcije)

- (a)  $f(x) = \sqrt{x e^x + x}$  (g)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$   
(b)  $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$  (h)  $f(x) = \operatorname{ctg} \arcsin x^2$   
(c)  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$  (i)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$   
(d)  $f(x) = \ln^2 x - \ln \ln x$  (j)  $f(x) = x^{x^2}$   
(e)  $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$  (k)  $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$   
(f)  $f(x) = e^{-x^2} + \sin 3x$  (l)  $f(x) = x^{x^x}$

**9.4.** Izračunati izvod implicitno zadate funkcije  $y = y(x)$

- (a)  $x^2 + y^2 = 1$   
(b)  $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$   
(c)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$   
(d)  $e^y \sin x + \ln y \cos x = \operatorname{arctg} x$

**9.5.** Izračunati izvod parametarske funkcije

- (a)  $x = 2(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)$   
(b)  $x = 4 + 2 \cos t, y = -1 + 2 \sin t$   
(c)  $x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t})$

**9.6.** Dokazati da je funkcija  $f(x)$  rešenje diferencijalne jednačine

- (a)  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2), 1 + y'^2 = 2yy''$   
(b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x, y'' - 2y' + y = e^x$

**9.7.** Izračunati drugi izvod (po  $x$ ) parametarske funkcije

- (a)  $x = \ln t, y = t^3$   
(b)  $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1 + t^2)$   
(c)  $x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t})$

**9.8.** Izračunati sledeći limes i objasniti zašto ne može da se izračuna primenom lopitalovog pravila

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

**9.9.** Izračunati primenom lopitalovog pravila

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$   
(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

**9.10.** Odrediti minimum i maksimum funkcije  $f(x)$  na datom intervalu

$$(a) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-1, 5]$$

$$(c) f(x) = x^3, x \in [-1, 3]$$

$$(b) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-10, 12]$$

$$(d) f(x) = x^4 + 2, x \in [-5, 5]$$

**9.11.** Odrediti lokalne ekstremume funkcije

$$(a) f(x) = x \ln x$$

$$(c) f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$$

$$(b) f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$(d) f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$$

**9.12.** Naći intervale zakrivljenosti i prevojne tačke funkcije

$$(a) f(x) = (x+1)^4$$

$$(d) f(x) = (1+x^2)e^x$$

$$(b) f(x) = x^2 \ln x$$

$$(c) f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x+3}$$

**9.13.** Naći asimptote grafika funkcije

$$(a) f(x) = x + \ln x$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

$$(b) f(x) = e^{-x^2} + 2$$

$$(e) f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^3}{x^2+9}$$

$$(f) f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

**9.14.** Skicirati grafik funkcije

$$(a) f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$(h) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$$

$$(c) f(x) = \sin 2x + \cos 2x$$

$$(i) f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2-6x}$$

$$(j) f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$$

$$(e) f(x) = (x-x^2)e^{-x}$$

$$(f) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$(k) f(x) = (1+x) \ln \frac{x+1}{x+2}$$

$$(g) f(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$(l) f(x) = 1 - e^{2x-x^2}$$

## 10 Neodređeni integral

**10.1.** Izračunati integrale

$$(a) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$(d) \int (5^x + x^5) dx$$

$$(b) \int (6x^2 + 8x + 3) dx$$

$$(e) \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$(c) \int \left( \sin x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$(f) \int \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x \right) dx$$

**10.2.** Izračunati integrale (smena promenljive)

$$(a) \int \frac{dx}{x-a}$$

$$(b) \int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(d) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$(e) \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

$$(f) \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

$$(g) \int \frac{x}{a^2 + x^2} dx$$

$$(h) \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx$$

**10.3.** Izračunati integrale (smena promenljive)

$$(a) \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$(b) \int \cos^2 2x dx$$

$$(c) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$(d) \int \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$$

**10.4.** Izračunati integrale (parcijalna integracija)

$$(a) \int x \ln x dx$$

$$(b) \int x^2 \ln x dx$$

$$(c) \int \ln^2 x dx$$

$$(d) \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

$$(e) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$(f) \int x \sin x dx$$

$$(g) \int x \cos 3x dx$$

$$(h) \int e^x \cos x dx$$

$$(i) \int \arcsin x dx$$

$$(j) \int x \arctan x dx$$

**10.5.** Izračunati integrale (parcijalna integracija)

$$(a) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$(b) \int 3^x \cos x dx$$

$$(c) \int x \sin x \cos x dx$$

$$(d) \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$$

$$(e) \int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$(f) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(g) \int \sin 2x e^{3x} dx$$

$$(h) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

**10.6.** Izračunati integrale (racionalne funkcije)

$$(a) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$(b) \int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$$

$$(c) \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3}$$

$$(d) \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$(e) \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$(f) \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}$$

$$(g) \int \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} dx$$

$$(h) \int \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} dx$$

**10.7.** Izračunati integrale (trigonometrijske funkcije)

- (a)  $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$
- (b)  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
- (c)  $\int \sin^5 x dx$
- (d)  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$
- (e)  $\int \frac{dx}{\sin x}$
- (f)  $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$
- (g)  $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$
- (h)  $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$
- (i)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$
- (j)  $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

**10.8.** Izračunati integrale (neke iracionalne funkcije)

- (a)  $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$
- (b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$
- (c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

## 11 Određeni integral i primene integrala

**11.1.** Izračunati vrednost određenih integrala

- (a)  $\int_0^1 (2x+1)^{50} dx$
- (b)  $\int_0^3 \frac{t dt}{t^2+1}$
- (c)  $\int_4^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x x^2}} dx$
- (d)  $\int_0^8 |x^2 - 6x + 8| dx$
- (e)  $\int_0^3 x^2 e^{-x} dx$
- (f)  $\int_1^{e^{2\pi}} \sin \ln t dt$
- (g)  $\int_1^3 \sqrt{x+1} dx$
- (h)  $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$
- (i)  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
- (j)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
- (k)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$
- (l)  $\int_1^e \ln x dx$

**11.2.** Izračunati površinu lika u ravni, ograničenog krivama

- (a)  $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$
- (b)  $y = x - 1, y^2 = 2x + 6$
- (c)  $y^2 = x, x - 2y = 3$
- (d)  $y = \cos x, y = \sin 2x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$
- (e)  $y = |x|, y = (x+1)^2 - 7, x = -4$
- (f)  $y = x^{-1}, y = x^{-2}, x = 1, x = 2$
- (g)  $4x + y^2 = 0, y = 2x + 4$
- (h)  $y = x, y = x^3$
- (i)  $y = x^2, y = \frac{2}{x^2+1}$
- (j)  $y = e^x, y = e^{3x}, x = 1$
- (k)  $x^2 + 4y^2 = 4, x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$
- (l)  $x^2 + y^2 = 1, y = x^2 - 1, y = -x$

**11.3.** Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom krive

- (a)  $y = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$  oko  $x$ -ose
- (b)  $y = x^3, y = 8, x = 0$  oko  $y$ -ose
- (c)  $y = x, y = x^2$  oko  $x$ -ose
- (d)  $y = x, y = x^2$  oko prave  $y = 2$
- (e)  $y = x^4, y = 1$  oko prave  $y = 2$
- (f)  $y = x^2, y^2 = x$  oko  $x$ -ose
- (g)  $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 1,$  oko  $y$ -ose
- (h)  $y = x, y = x^2$  oko  $y$ -ose

#### 11.4. Izračunati dužinu krive

- (a)  $y = \sin x$  između dva uzastopna preseka sa  $x$  - osom
- (b)  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$
- (c)  $y = \ln x$ ,  $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$
- (d)  $y = \ln \cos x$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$
- (e)  $y = \arcsin e^{-x}$ ,  $x \in [0, 1]$
- (f)  $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$  između preseka sa  $x$  - osom
- (g)  $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} \ln y$ ,  $y \in [1, e]$

## 12 Nesvojstveni integral

### 12.1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenih integrala

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

(c)  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(b)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

### 12.2. Izračunati vrednost nesvojstvenih integrala

(a)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

(b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$