Геометрија 2

предавања

Основни појмови

- Скуп S, који зовемо простор и чије елементе зовемо тачке
- $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}(S)$, његове елементе зовемо правама
- $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(S)$, његове елементе зовемо равнима
- релација $\mathcal{B}$ дужине 3
- релација $\mathcal{C}$ дужине 4

Аксиоме су подељене у 5 група

- Аксиоме инциденције
- Аксиоме распореда
- Аксиоме подударности
- Аксиоме непрекидности
- Аксиома паралелности

Еуклидов V постулат

Ако права са друге две праве образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, онда ће се те две праве, бесконачно продужене сећи са оне стране са које су углови мањи од два права угла.

Плејферова аксиома

У равни одређеној правом a и тачком A која јој не припада постоји тачно једна права b таква да је $A \in b$ и $a \cap b = \emptyset$.

Аксиома Лобачевског

У равни одређеној правом a и тачком A која јој не припада постоји бар две праве b_1, b_2 такве да је $A \in b_1$, $A \in b_2$, $a \cap b_1 = \emptyset$ и $a \cap b_2 = \emptyset$.

Дефиниција 1

- Тачке су колинеарне ако постоји једна права која их садржи.
- Тачке су копланарне ако постоји једна раван која их садржи.
- Праве су конкурентне ако садрже заједничку тачку.
- Праве су мимоилазне ако не постоји раван која их садржи.

Аксиоме инциденције

I_1 Свака права саржи бар две разне тачке.

I_2 За две дате тачке постоји бар једна права која их садржи.

I_3 За две дате тачке постоји највише једна права која их садржи.

I_4 Свака раван садржи бар три неколинеарне тачке.

I_5 За три дате тачке постоји бар једна раван која их садржи.

I_6 За три дате неколинеарне тачке постоји највише једна раван која их садржи.

I_7 Ако две разне тачке неке праве припадају датој равни онда све тачке те праве припадају датој равни

I_8 Ако две равни имају бар једну заједничку тачку онда имају бар још једну заједничку тачку.

I_9 Постоје четири некопланарне тачке.

Теорема 1

Ако су A, B *и* C *неколинеарне тачке онда је* $A \neq B \neq C \neq A$.

Теорема 2

Постоји јединствена права која садржи две разне тачке A *и* B.

Теорема 3

Постоји јединствена раван која садржи три неколинеарне тачке A, B *и* C.

Теорема 4

Постоји јединствена раван која садржи дату праву и дату тачку која јој не припада.

Теорема 5

Постоји јединствена раван која садржи две праве које се секу.

Теорема 6

Постоје бар две мимоилазне праве.

Теорема 7

Ако се две разне равни секу у бар једној тачки онда је њихов пресек права.

Модел аксиома инциденције

$S = \{A, B, C, D\}$,
$\mathcal{L} = \{X | X \subset S, |X| = 2\}$,
$\mathcal{P} = \{X | X \subset S, |X| = 3\}$.

Проверите да важи свих девет аксиома.

Пример 1

Ако су p и q мимоилазне праве и тачка A која им не припада, онда постоји највише једна права a таква да је $A \in a$, $a \cap p \neq \emptyset$ и $a \cap q \neq \emptyset$.

Пример 2

Ако се сваке две од правих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ секу онда су или конкурентне или копланарне.

Аксиоме распореда

Аксиоме распореда описују својства релације $\mathcal{B}$.

Аксиоме инциденције

II_1 Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда су A, B, C три разне колинеарне тачке.

II_2 Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда је и $\mathcal{B}(C, B, A)$

II_3 Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда **није** $\mathcal{B}(A, C, B)$ тј. важи $\neg\mathcal{B}(A, C, B)$.

II_4 Ако су A и B две разне тачке, онда постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II_5 Ако су A, B, C три колинеарне тачке онда важи бар једна од релација $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II_6 (**Пашова аксиома**) Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и права p у равни њима одређеној таква да је $A \notin p$ $BC \cap p = \{P\}$ и $\mathcal{B}(B, P, C)$ онда важи бар један од исказа

- $p \cap CA = \{Q\}$ и $\mathcal{B}(C, Q, A)$
- $p \cap AB = \{R\}$ и $\mathcal{B}(A, R, B)$

Теорема 8

Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке, онда важи тачно један од распореда $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

Теорема 9

Нека су A, B две разне тачке и p права која их садржи. Тада је $X \in p$ акко $X = A$ или $X = B$ или важи неки од распореда $\mathcal{B}(A, B, X)$, $\mathcal{B}(B, X, A)$, $\mathcal{B}(X, A, B)$

Теорема 10

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке, и P, Q, R тачке такве да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(C, Q, A)$ и $\mathcal{B}(A, R, B)$. Тада су тачке P, Q и R неколинеарне.

Теорема 11

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и права p у равни њима одређеној таква да је $A \notin p$ $BC \cap p = \{P\}$ и $\mathcal{B}(B, P, C)$ онда важи тачно један од исказа

- $p \cap CA = \{Q\}$ *и* $\mathcal{B}(C, Q, A)$
- $p \cap AB = \{R\}$ *и* $\mathcal{B}(A, R, B)$

Теорема 12

Ако су A и B две разне тачке, онда постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Теорема 13

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је и $\mathcal{B}(A, C, D)$.

Дефиниција 2

Нека су $A_1, A_2, \dots A_n$ $(n \geq 3)$ разне тачке. Скуп $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ је линеарно уређен ако је $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$ за свако $1 \leq i < j < k \leq n$. Тада пишемо и $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Теорема 14

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је и $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.

Теорема 15

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$ и $C \neq D$ онда је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ или $\mathcal{B}(A, B, D, C)$.

Теорема 16

Сваки коначан скуп $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ *колинеарних тачака има тачно два уређења* $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ *и* $\mathcal{B}(A_n, A_{n-1}, \dots, A_1)$.

Дефиниција 3

Нека су A, B разне тачке. Тада је

- Скуп $(AB) = \{X | \mathcal{B}(A, X, B)\}$ је отворена дуж
- Скуп $[AB) = (AB) \cup \{A\}$ је полуотворена дуж
- Скуп $(AB] = (AB) \cup \{B\}$ је полуотворена дуж
- Скуп $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ је затворена дуж
- Скуп $(AA) = \emptyset$ је нула дуж.

Дефиниција 4

Лик F је конвексан ако за сваке две тачке $A, B \in F$ важи $(AB) \subset F$.

Теорема 17

Ако су ликови F_k, $k \in I$ конвексни онда је и $\bigcap_{k \in I} F_k$ конвексан.

Дефиниција 5

Нека су дате тачке $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$. Скуп $\{A_1, A_2, \ldots A_{n+1}\} \cup \bigcup_{k=1}^{n}(A_k A_{k+1})$ је полигонска линија (полигон) са теменима $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ и ивицама $(A_1A_2), (A_2A_3), \ldots (A_nA_{n+1})$.
Специјално ако је $A_1 = A_{n+1}$ и никоја три узастопна темена нису колинеарна онда је тај полигон затворен (многоугао).

Дефиниција 6

Полигон је прост ако никоје две ивице (осим суседних) немају заједничке тачке.

Пример 3

Нека права p сече дијагоналу равног четвороугла и не садржи ни једно његово теме. Доказати да права p сече тачно две ивице четвороугла.

Дефиниција 7

Тачке $A, B \in F$ су повезиве ако постоји полигонска линија $\mathcal{P}$ која их спаја и $\mathcal{P} \subset F$.

Дефиниција 8

Ако је $F_1, F_2, \dots F_n \subset F$ и релација повезивости на $F \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ је релација еквиваленције са класама $C_1, C_2, \dots C_m$ онда кажемо да $F_1, F_2, \dots F_n$ разлажу F на $C_1, C_2, \dots C_m$.

Пример 4

Тачка $C \in (AB)$ разлаже дуж (AB) на (AC) и (CB).

Дефиниција 9

Нека су $O, A, B \in p$ три разне тачке праве p.Тачке A и B су са исте стране тачке O ($A, B \ddot{-} O$) ако не важи $\mathcal{B}(A, O, B)$. Тачке A и B су са разних страна тачке O ($A, B \div O$) ако важи $\mathcal{B}(A, O, B)$.

Теорема 18

Нека су $O \in p$, онда је релација са исте стране тачке O релација еквиваленције на $p \setminus \{O\}$ са тачно две класе.

Дефиниција 10

Класе еквиваленције из претходне теореме називамо отвореним полуправама са почетком у O.

Дефиниција 11

Нека је p права која лежи у равни α. Тачке A, B су са исте стране праве p ($A, B \ddot{-} p$) ако је $p \cap (AB) = \emptyset$.

Теорема 19

Релација са исте стране праве p је релација еквиваленције на $\alpha \setminus p$ са тачно две класе.

Дефиниција 12

Класе еквиваленције из претходне теореме називамо отвореним полуравнима. Права p је њихова ивица (руб). Унија отворене полуравни и њеног руба је затворена полураван.

Теорема 20

Релација са исте стране праве p на $\alpha \setminus p$ и релација повезивости тачака на $\alpha \setminus p$ се поклапају.

Дефиниција 13

Нека је α дата раван. Тачке A, B су са исте стране равни α $(A, B \ddot{-} \alpha)$ ако је $\alpha \cap (AB) = \emptyset$.

Теорема 21

Релација са исте стране праве α је релација еквиваленције на $S \setminus \alpha$ са тачно две класе.

Дефиниција 14

Класе еквиваленције из претходне теореме називамо отвореним полупросторима. Раван α је њихова ивица (руб). Унија отвореног полупростора и његовог руба је затворени полупростор.

Теорема 22

Релација са исте стране равни α на $S \setminus \alpha$ и релација повезивости тачака на $S \setminus \alpha$ се поклапају.

Дефиниција 15

Нека су p и q затворене полуправе са заједничким почеком у тачки O. Унија $p \cup q$ је угаона линија $\angle pq$. Полуправе p и q су краци, а тачка O је теме угаоне линије.

Дефиниција 16

Нека је $\angle pq$ угаона линија и α раван која је њом одређена. Тачке A и B су са исте стране угаоне линије $(A, B \ddot{-} \angle pq)$ $\angle pq$ ако су повезиве у $\alpha \setminus \angle pq$.

Теорема 23

Релација саисте стране угаоне линије $\angle pq$ је релација еквиваленције са тачно две класе.

Дефиниција 17

Класе еквиваленције из претходне теореме су отворени углови $\angle(pq)$. Затворени угао $\angle[pq]$ је унија отвореног угла $\angle(pq)$ и угаоне линије $\angle pq$. Опружен угао је онај код кога су полуправе p и q комплементарне.

Теорема 24

Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n *копланарних полуправих са заједничким почетком у тачки* O *онда оне разлажу раван на* n *отворених углова.*

Теорема 25

Тачка X *припада отвореном конвексном углу* $\angle pOq$ *акко отворена полуправа* OX *сече неку дуж* PQ *где је* $P \in p$, $Q \in q$.

Теорема 26

Ако су A, B, C, D *разне копланарне тачке, такве да су сваке три од њих неколинеарне, онда праве* AD, BD *и* CD *секу редом дужи* (BC), (CA) *и* (AB) *у једној или трима тачкама.*

Теорема 27

Ако су A, B, C *неколинеарне тачке и* α *раван које оне одређују онда је* $X \in \alpha$ *акко припада правој* p *која задовољава неку од следћих тврдњи*

- $A \in p$, $p \cap [BC] \neq \emptyset$,
- $B \in p$, $p \cap [CA] \neq \emptyset$,
- $C \in p$, $p \cap [AB] \neq \emptyset$.

Дефиниција 18

Нека су α и β две разне затворене полуравни са заједничким рубом p. Њихова унија је диедарска површ $\alpha\beta$, p је њена ивица, а α и β су стране (пљосни).

Дефиниција 19

Нека су дате тачке $A, B \notin \alpha\beta$. Тачке A и B су са исте стране диедра $\alpha\beta (A, B \ddot{-} \alpha\beta)$ ако су повезиве у $S \setminus \alpha\beta$.

Теорема 28

Релација са исте стране диедра $\alpha\beta$ је релација еквиваленције са тачно две класе.

Дефиниција 20

Класе еквиваленције из претходне теореме су отворени диедри $\angle(\alpha\beta)$. Унија отвореног диедра $\angle(\alpha\beta)$ и диедарске површи је затворени диедар.

Теорема 29

Скуп од n разних полуравни са заједничким рубом разлаже простор на n отворених диедара.

Теорема 30

Свака тачка неке полуравни са рубом p припада конвексном неопруженом диедру $\angle(\alpha\beta)$ ако та полураван сече отворену дуж (AB) где је $A \in \alpha \setminus p$ и $B \in \beta \setminus p$

Теорема 31

Нека су A, B, C, D некопланарне тачке. Онда је X тачка простора акко припада равни α која задовољава неку од следћих тврдњи

- $AD \subset \alpha$, $\alpha \cap [BC] \neq \emptyset$,
- $BD \subset \alpha$, $\alpha \cap [CA] \neq \emptyset$,
- $CD \subset \alpha$, $\alpha \cap [AB] \neq \emptyset$.

Теорема 32

Нека је P прост раван полигон у равни α, тачка $O \in \alpha \setminus P$ и полуправе $a, b \subset \alpha$ са почетком у O које не садрже ни једно теме полигона P. Тада су бројеви $k(a)$ и $k(b)$ пресека полуправих a и b са полигоном P исте парности.

Дефиниција 21

Нека је P прост раван полигон у равни α, тачка $O \in \alpha \setminus P$ и a полуправа са почетком у O која не садржи темена полигона P. Ако је $k(a)$ непаран кажемо да тачка O унутрашња тачка полигона, а ако је $k(a)$ паран тачка O је спољашња тачка полигона.

Теорема 33

Унутрашњост и спољашњост простог, равног полигона су непразни скупови.

Теорема 34

Нека су A и B тачке равни α, L полигонска линијја у равни α која повезује A и B и P прост полигон у равни α. Ако је $L \cap P = \emptyset$ онда су тачке A и B или обе у унутрашњости полигона P или обе у спољашњости полигона P.

Теорема 35

Унутрашњост и спољашњост простог и равног полигона P су повезани ликови.

Дефиниција 22

Унутрашњост простог равног полигона P је отворена полигонска површ (P). Затворени полигон $[P]$ је унија $P \cup (P)$.

Дефиниција 23

Нека су P, Q, R узастопна темена полигонске површи. Угаона линија $\angle PQR$ разлаже раван на углове α и β. Ако је угао α такав да полуправа a са почетком Q, која не садржи темена полигонске површи и са њеним рубом има непаран број заједничких тачака. Тада је α унутрашњи угао те површи.

Дефиниција 24

Дуж која спаја несуседна темена полигонске површи је дијагонала. Ако су све тачке те дужи унутрашње тачке полигона онда је то унутрашња дијагонала.

Теорема 36

Свака полигонска површ са бар 4 *темена има бар једну унутрашњу дијагоналу.*

Дефиниција 25

Разлагање неког лика на троугаоне површи назива се триангулација.

Дефиниција 26

Нека су дате полуправе $a_1, a_2, \ldots a_n$ у простору са заједничким почетком O. Унија углова $\angle[a_1 a_2]$, $\angle[a_2 a_3]$, …, $\angle[a_{n-1} a_n]$, где су свака два узастопна угла некомпланарна је рогљаста површ, O је њено теме, $a_1, a_2, \ldots a_n$ су ивице и $\angle[a_1 a_2], \angle[a_2 a_3], \ldots, \angle[a_{n-1} a_n]$ су пљосни.

Дефиниција 27

Ако постоји (бар једна) раван α, таква да је $O \in \alpha$ и све тачке рогљасте површи $Oa_1 a_2 \ldots a_n$, осим O, су са исте стране равни α онда је та рогљаста површ једнострано раширена.
Рогљаста површ је проста ако сваке две несуседне пљосни се секу само у тачки O.

Теорема 37

За дату једнострано раширену рогљасту површ постоји раван која сече све њене ивице и пљосни. Тај пресек је многоугао и он је прост акко је рогљаста површ проста.

Дефиниција 28

Нека je $Oa_1a_2\ldots a_n$ проста једнострано раширена рогљаста површ и $A_1A_2\ldots A_n$ многогао из претходне теореме. Тачка X je у унутрашњости рогљасте површи ако полуправа OX сече унутрашњост многоугла $A_1A_2\ldots A_n$, иначе je у спољашњости.

Теорема 38

Унутрашњост и спољашњост рогљасте површи су непразни скупови.

Теорема 39

Ако су дате тачке A и B у простору и полигонска линија P их спаја и нема заједничких тачака са рогљастом површи $Oa_1a_2\ldots a_n$ онда су тачке A и B или обе у унутрасњости рогљасте површи или обе у спољашњости рогљасте површи.

Дефиниција 29

Две полигонске површи су суседне ако имају заједничку ивицу. Коначан низ полигонских површи у коме су сваке две узастопне површи суседне је ланац. Скуп полигонских површи је повезан, ако за сваке две површи у њему постоји ланац који их спаја.

Дефиниција 30

Коначан повезан скуп полигонских површи је полиедарска површ ако задовољава

1. Ако полигонске површи из тог скупа имају заједничко теме, онда унутрашњи углови у том темену су пљосни рогљасте површи која нема других пљосни.
2. Свака дуж која је подскуп неке ивице једне од полигонских површи је подскуп јос хајвише једне ивице неке другее полигонске површи.

Полигонске површи су пљосни полиедарске површи, а њихове ивице и темена су ивице и темена полиедарске површи.

Дефиниција 31

Полиедарска површ је проста ако сваке две пљосни осим суседних немају заједничких тачака.

Теорема 40

Нека је ω проста полиедарска површ и O тачка ван те површи. Ако су a и b полуправе са почетком у O које не секу ивице полиедарске површи ω. Тада су бројеви $k(a)$ и $k(b)$ пресека полиедарске површи са a и b исте парности. Ако је $k(a)$ непаран онда је O унутрашња тачка полиедарске површи, ако је $k(a)$ паран онда је O спољасња тачка полиедарске површи.

Теорема 41

Унутрахњост и спољасњост полиедарске површи су непразни повезани скупови.

Дефиниција 32

Унутрашњост полиедарске површи је отворени полиедар, полиедарска површ је њен руб, а унија полиедарске површи и њене унутрашности је затворени полиедар.

Дефиниција 33

Два полиедра су изоморфна ако постоји бијекција која слика редом инцидентна темена, ивице и пљосни у инцидентна темена ивице и пљосни.

Дефиниција 34

Два полиедра су дуална ако постоји бијекција која слика редом инцидентна темена, ивице и пљосни у инцидентна пљосни, ивице и темена.

Дефиниција 35

Прост полигон чије све ивице су ивице исаме полиедарске површи је повратни полигон те површи.

Дефиниција 36

Повратни полигон разлаже полигонску површ ако постоје две пљосни такве да сваки ланац који их спаја садрзи пар суседних пљосни чија је заједничка ивица уједно и ивица повратног полигона.

Дефиниција 37

Род полиедарске површи је максималан број дисјунктних повратних полигона који не разлажу полиедарску површ.

Теорема 42

Ојлерова формула Ако су T, I и P број темена, ивица и пљосни полиедарске површи рода 0*, онда је* $\chi = T - I + P = 2$.

Дефиниција 38

Полиедар је тополошки правилан ако је свако теме инцидентно са истим бројем ивица и свака пљосан је инцидентна са истим бројем ивица.

Теорема 43

Постоји тачно пет тополошки правилних полиедара рода 0.

Дефиниција 39

Дуж AB је оријентисана ако су јој темена компоненте уређеног пара (A, B). Дужи AB и CD су надовезане ако је $B = C$. Две оријентисане дужи AB и BC једне праве чине преоријентацију ако није $\mathcal{B}(A, B, C)$.

Дефиниција 40

Коначан низ оријентисаних дужи једне праве $A_0A_1, A_1A_2, \dots A_nA_{n+1}$ једне праве, такав да су сваке две суседне дужи надовезане је ланац $A_0A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$. Парност ланца је парност броја преоријентација у њему. Ланац је затворен ако је $A_0 = A_n$ и $A_1 = A_{n+1}$.

Теорема 44

За сваке две оријентисане дужи AB и CD постоји ланац који их спаја.

Теорема 45

Затворен ланац оријентисаних дужи је паран.

Теорема 46

Ланци који имају исти почетак и крај су исте парности.

Дефиниција 41

Две дужи d_1 и d_2 једне праве су истосмерне ако ланац који их спаја паран. Иначе, су d_1 и d_2 су супротносмерне.

Теорема 47

Релација истосмерности оријентисаних дужи једне праве је релација еквиваленције са тачно две класе.

Дефиниција 42

Троугао ABC је оријентисан ако су му темена компоненте уређене тројке (A, B, C). Троуглови ABC и DEF су надовезане ако је $B = D$ и $C = E$. Два оријентисана троугла ABC и BCD једне равни чине преоријентацију ако је $A, D \div BC$.

Дефиниција 43

Коначан низ оријентисаних троуглова једне равни $A_0A_1A_2, A_1A_2A_3, \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$, такав да су свака два суседна троугла надовезана је ланац $A_0A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Парност ланца је парност броја преоријентација у њему.
Ланац је затворен ако је $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$ и $A_2 = A_{n+2}$.

Теорема 48

За свака два оријентисана троугла ABC и DEF постоји ланац који их спаја.

Теорема 49

Затворен ланац оријентисаних троуглова је паран.

Теорема 50

Ланци који имају исти почетак и крај су исте парности.

Дефиниција 44

Два троугла t_1 и t_2 једне равни су истосмерна ако ланац који их спаја паран. Иначе, су t_1 и t_2 су супротносмерна.

Теорема 51

Релација истосмерности оријентисаних троуглова једне равни је релација еквиваленције са тачно две класе.

Дефиниција 45

Тетраедар $ABCD$ је оријентисан ако су му темена компоненте уређене четворке (A, B, C, D). Тетраедри $ABCD$ и $EFGH$ су надовезани ако је $B = E, C = F$ и $D = G$. Два оријентисана тетраедра $ABCD$ и $BCDE$ чине преоријентацију ако је $A, E \div BCD$.

Дефиниција 46

Коначан низ оријентисаних троуглова једне равни $A_0A_1A_2, A_1A_2A_3, \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$, такав да су свака два суседна троугла надовезана је ланац $A_0A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Парност ланца је парност броја преоријентација у њему.

Ланац је затворен ако је $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$ и $A_2 = A_{n+2}$.

Теорема 52

За свака два оријентисана тетраедра $ABCD$ и $EFGH$ постоји ланац који их спаја.

Теорема 53

Затворен ланац оријентисаних тетраедара је паран.

Теорема 54

Ланци који имају исти почетак и крај су исте парности.

Дефиниција 47

Два тетаедра t_1 и t_2 су истосмерна ако ланац који их спаја паран. Иначе, су t_1 и t_2 су супротносмерна.

Теорема 55

Релација истосмерности оријентисаних троуглова једне равни је релација еквиваленције са тачно две класе.

$\mathcal{C}(A, B, C, D) \Leftrightarrow (A, B) \cong (C, D)$.

Аксиоме подударности

- III_1 Ако је $(A, B) \cong (C, D)$ и $A = B$, тада је $C = D$.
- III_2 За сваке две тачке A и B имамо да је $(A, B) \cong (B, A)$.
- III_3 Ако је $(A, B) \cong (C, D)$ и $(A, B) \cong (E, F)$, тада је $(C, D) \cong (E, F)$.
- III_4 Ако су C и C' тачке отворених дужи (AB) и $(A'B')$ такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, тада је и $(A, B) \cong (A', B')$.
- III_5 Ако су A, B две разне тачке и Cp полуправа са теменом C, тада на тој полуправој постоји бар једна тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.
- III_6 Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и A', B' тачке руба неке полуравни α такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, тада у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.
- III_7 Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D, D' тачке полуправих BC и $B'C'$ такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$, $(B, D) \cong (B', D')$, тада је и $(A, D) \cong (A', D')$.

Теорема 56

Релација $\cong$ *је релација еквиваленције на скупу* $S \times S$.

Теорема 57

Ако су A, B *две разне тачке и* Cp *полуправа са теменом* C, *тада на тој полуправој постоји јединствена тачка* D *таква да је* $(A, B) \cong (C, D)$.

Теорема 58

Ако су A, B, C *три разне колинеарне тачке и* A', B' *такве да је* $(A, B) \cong (A', B')$ *тада у простору постоји јединствена тачка* C' *таква да је* $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. *При том* C' *припада правој* $A'B'$ *и чува се распоред* $(\mathcal{B}(A, B, C) \Rightarrow \mathcal{B}(A', B', C'))$.

Теорема 59

Ако су A, B, C *три неколинеарне тачке и* A', B', C' *такве да је* $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ *тада за сваку тачку* D *равни* ABC *постоји јединствена тачка* D' *у простору таква да је* $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$. *При том* D' *припада равни* $A'B'C'$ *и чува се распоред* $(\mathcal{B}(A, B, D) \Rightarrow \mathcal{B}(A', B', D')$ *и* $A, D \div BC \Rightarrow A', D' \div B'C')$.

Теорема 60

Ако су A, B, C, D *четири некопланарне тачке и* A', B', C', D' *такве да је* $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ *тада за сваку тачку* E *постоји јединствена тачка* E' *таква да је* $(A, B, C, D, E) \cong (A', B', C', D', E')$. *При том чува се распоред* $(\mathcal{B}(A, B, E) \Rightarrow \mathcal{B}(A', B', E')$, $A, E \div BC \Rightarrow A', E' \div B'C'$ *и* $A, E \div BCD \Rightarrow A', E' \div B'C'D')$.

Дефиниција 48

Бијекција J праве/равни/простора у себе за коју важи $(A, B) \cong (J(A), J(B))$ за сваке две тачке A, B из домена је изометрија.

Теорема 61

Скуп изометрија праве/равни/простора је група у одонсу на композицију функција.

Теорема 62

Изометријом се права слика у праву, раван у раван, полуправа у полуправу, полураван у полураван, полупростор у полупростор, дуж у дуж, полигонска линија у полигонску линију, полиедарска површ у полиедарску површ, полигонска површ у полигонску површ, полиедар у полиедар, конвексан угао у конвексан угао...

Теорема 63

Изометрија пресликава истосмерне дужи/троуглове/тетраедре у истосмерне дужи/троуглове/тетраедре.

Дефиниција 49

Изометрија која пресликава оријентисане дужи/троуглове/тетраедре у себи истосмерне дужи/троуглове/тетраедре назива се директна изометрија, а иначе је индиректна изометрија.

Теорема 64

Група директних изометрија праве/равни/простора је подгрупа групе изометрија праве/равни/простора. Индекс подгрупе је два.

Теорема 65

Ако су A, B две разне тачке праве p и A', B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ онда постоји јединствена изометрија J праве p таква да је $J(A) = A'$ и $J(B) = B'$.

Теорема 66

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке равни α и A', B', C' такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ онда постоји јединствена изометрија J равни α таква да је $J(A) = A'$, $J(B) = B'$ и $J(C) = C'$.

Теорема 67

Ако су A, B, C, D *четири некопланарне тачке и* A', B', C', D' *такве да је* $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ *онда постоји јединствена изометрија простора* J *таква да је* $J(A) = A'$, $J(B) = B'$, $J(C) = C'$ *и* $J(D) = D'$.

Последица 1

Изометрија праве/равни/простора која има бар две разне/три неколинеарне/четири некопланарне фиксне тачке је коинциденција (идентитет).

Дефиниција 50

Геометријски лик F је подударан геометријском лику F' ($F \cong F'$) акко постоји изометрија J таква да је $J(F) = F'$.

Теорема 68

Релација подударности геометријских ликова је релација еквиваленције.

Теорема 69

Нека су $A \neq B$ *и* $A_1 \neq B_1$ *два пара тачака. Тада је* $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ *акко* $AB \cong A_1B_1$.

Дефиниција 51

Тачка S је средиште дужи AB ако је $S \in AB$ и $AS \cong SB$.

Теорема 70

Средиште дужи је јединствено.

Дефиниција 52

Нека су дате дужи AB и CD. Дуж AB је већа од дужи CD ако постоји тачка $E \in AB$ тако да је $(A, E) \cong (C, D)$ $(AB > CD)$. Дуж CD је мања од дужи AB $(CD < AB)$.

Дефиниција 53

Дуж AB је збир дужи CD и EF ако постоји тачка $G \in AB$ тако да је $AG \cong CD$ и $GB \cong EF$.

Теорема 71

Постоји изометрија која слика угао $\angle pq$ у себе а полуправе p и q редом у q и p.

Теорема 72

Два конвексна (неконвексна) угла $\angle pq$ и $\angle rs$ са теменима O и O' су подударна ако постоје тачке $P \in p \setminus \{O\}$, $Q \in q \setminus \{O\}$, $R \in r \setminus \{O'\}$, $S \in s \setminus \{O'\}$ такве да је $(P, O, Q) \cong (R, O', S)$.

Теорема 73

Напоредни углови подударних углова су подударни. Унакрсни углови су подударни.

Дефиниција 54

Бисектриса угла је полуправа тог угла која га разлаже на два подударна угла.

Теорема 74

Бисектриса угла је јединствена.

Дефиниција 55

Угао $\angle pq$ је већи од угла $\angle rs$ ако постоји полуправа $t \subset \angle pq$ тако да је $\angle pt \cong \angle rs$ $(\angle pq > \angle rs)$.

Дефиниција 56

Угао $\angle pq$ је збир углова $\angle rs$ и $\angle uv$ ако постоји полуправа $t \subset \angle pq$ тако да је $\angle pt \cong \angle rs$ и $\angle tq \cong \angle uv$.

Дефиниција 57

Угао је оштар/прав/ туп ако је мањи/подударан/већи од свог напоредног угла.

Теорема 75

Угао подударан правом углу је прав угао.Свака два права угла су подударна.

Теорема 76

Спољашњи угао троугла је већи од несуседног унутрашњег угла.

Теорема 77

Насправ веће странице је већи угао и обратно. Наспрам подударних страница су подударни углови и обратно.

Теорема 78 (Неједнакост троугла)

Збир две странице троугла већи је од треће странице.

Теорема 79

Два троугла $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$ *су подударни акко важи један од услова*

- СУС $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
- УСУ $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $BC \cong B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.
- ССС $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$.
- ССУ $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ *и углови* $\angle BAC$ *и* $\angle B'A'C'$ *су оба оштра или оба тупа.*
- СУУ $AB \cong A'B'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

Теорема 80

Ако су троуглови $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$ *такви да је* $AB \cong A'B'$ *и* $AC \cong A'C'$ *онда је* $BC > B'C'$ *акко је* $\angle BAC > \angle B'A'C'$.

Дефиниција 58

Четвороугао $\square ABCD$ је ламбертов ако су углови $\angle DAB$, $\angle ABC$ и $\angle BCD$ прави. Ивице AB и BC су основице ламбертовог четвороугла.

Дефиниција 59

Четвороугао $\square ABCD$ је сакеријев ако су углови $\angle DAB$, $\angle ABC$ прави и $AD \cong BC$. Ивица AB је основица, ивица CD је противосновица, а AD и BC су бочне ивице сакеријевог четвороугла.

Теорема 81

Нека су M и N редом средишта основице AB и противосновице CD сакеријевог четвороугла $ABCD$, онда су углови $\angle AMN$ и $\angle MND$ прави.

Дефиниција 60

Праве p и q које садрже краке правог угла су ортогоналне (управне/нормалне) $p \perp q$.

Теорема 82

Ако тачка A и парава a су инцидентне са равни α онда у равни α постоји јединствена права n таква да је $A \in n$ и $a \perp n$.

Дефиниција 61

Нека је дата дуж AB равни α. Права те равни која садржи средиште дужи AB и ортогонална је на праву AB се назива медијатриса дужи AB.

Теорема 83

Нека је дата дуж AB равни α. Тачка $M \in \alpha$ припада медијатриси дужи AB акко је $AM \cong MB$.

Дефиниција 62

Права a ортогонална је на раван α ако је сече у тачки O и ортогонална је на сваку праву равни α која садржи тачку O.

Теорема 84

Ако је права a ортогонална на две праве равни α које се секу у тачки O, онда је и $a \perp \alpha$.

Теорема 85

Нека је дата права a и тачка $A \in a$. Све праве које сдрже тачку A и ортогоналне су на a припрадају једној равни која је такође ортогонална на a.

Теорема 86

Постоји јединствена права која садржи дату тачку и ортогонална је на дату раван.

Теорема 87

Постоји јединствена раван која садржи дату тачку и ортогонална је на дату праву.

Теорема 89

Постоји јединствена изометрија $J \neq \varepsilon$ праве/равни/простора која има бар једну/две/три неколинеарне фиксне тачке.

Дефиниција 63

Изометрије из претходне теореме називају се централна/осна/раванска рефлексија.

Теорема 90

Рефлексије су индиректне изометрије.Рефлексије су инволуције.

Теорема 91

Свака индиректна изометрија праве/равни/простора која има ___/бар једну/бар две фиксне тачке је рефлексија.

Теорема 92

Ако су дате рефлексије S_Σ и S_Π $(\Sigma \neq \Pi)$ онда је $S_\Sigma \circ S_\Pi(X) = X$ акко $X \in \Sigma \cap \Pi$.

Теорема 93 (о трансмутацији)

Ако је J *изометрија и* S_Σ *рефлексија онда је* $J \circ S_\Sigma \circ J^{-1} = S_{J(\Sigma)}$

Теорема 94

Рефлексије S_Σ *и* S_Π *комутирају ако је* $\Sigma = \Pi \vee \Sigma \perp \Pi$.

Теорема 95

Свака изометрија праве/равни/простора може се представити као композиција највише две/три/четири централне/осне/раванске рефлексије.

Теорема 96 (Класификација изометрија праве)

Свака изометрија праве је једна од следећих трансформација

- *коинцијенција* ε,
- *централна рефлексија* S_A,
- *транслација* $S_A \circ S_B$ *за вектор* $\overrightarrow{AB}$.

Изометрије равни

- коинцијенција ε,
- осна рефлексија S_A,
- $S_p \circ S_q = R_{O,2\angle pq}$, ако је $p \cap q = \{O\}, p \neq q$
- $S_p \circ S_q = T_{2\overrightarrow{AB}}$ ако је $p \cap q = \emptyset$,
- клизјућа рефлексија $S_p \circ S_q \circ S_r$.

Изометрије простора

- коинцијенција ε,
- раванска рефлексија S_α,
- $S_\alpha \circ S_\beta = R_{p,2\angle\alpha\beta}$, ако је $\alpha \cap \beta = p, \alpha \neq \beta$,
- $S_\alpha \circ S_\beta = T_{2\overrightarrow{AB}}$, ако је $\alpha \cap \beta = \emptyset$,
- осморотациона рефлексија $S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\gamma$ ако је $\beta \cap \gamma = p, \alpha \perp p$,
- клизајућа рефлексија $S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\gamma$ ако је $\beta \cap \gamma = \emptyset, \alpha \perp \beta, \gamma$,
- завојно кретање $S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\gamma \circ S\delta$ ако је $\alpha \cap \beta = p, p \perp \gamma, \delta$.

Дефиниција 64

Максималан скуп правих једне равни χ такав да је за сваке три праве $a, b, c \in \chi$ $S_a \circ S_b \circ S_c$ осна рефлексија је прамен правих.

Пример 5

1. Све праве једне равни које садрже дату тачку чине прамен правих.
2. Све праве једне равни које су ортогоналне на дату праву чине прамен правих.

Теорема 97

Ако су a, b, c праве једног прамена онда је $S_a \circ S_b \circ S_c = S_c \circ S_b \circ S_a$.

Теорема 98

Ако су a, b, c праве једног прамена онда је $S_a \circ S_b \circ S_c = S_d$ акко се осе симетрије правих a и c, и b и d поклапају.

Теорема 99

Медијатрисе ивица троугла припадају једном прамену.

Теорема 100

Симетрале унутрашњих углова троугла припадају једном прамену.

Теорема 101

Ако су A *и* B *разне тачке, а* c *права онда је* $S_B \circ S_c \circ S_A$ *осна рефлексија акко је* $AB \perp c$.

Теорема 102

Ако су a, b, c *праве једног прамена и* $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$. *Нека су праве* $a' \perp a$ *и* $c' \perp c$ *и* $a \cap a' = \{A\}$, $c \cap c' = \{C\}$. *Тада праве* a', b, c' *припадају једном прамену акко* $d \perp AC$.

Теорема 103

Висине троугла припадају једном прамену.

Теорема 104

Постоји јединствен прамен који садржи дате праве a *и* b. *За сваку тачку* C *постоји јединствена права* $C \in c$ *која припада том прамену.*

Теорема 105

Ако су a, b, c *праве једног прамена и* $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$ *онда је* d *права тог прамена.*

Теорема 106

Ако су a, b, c *не припадају истом прамену онда је* $S_c \circ S_b \circ S_a$ *клизајућа рефлексија.*

Дефиниција 65

Нека је χ прамен правих и A тачка у равни тог прамена која не припада свим правама тог прамена. Скуп $\varepsilon(\chi, A) = \{S_p(X) | p \in \chi\}$ је епицикл.

Теорема 107

Два епицикла $\varepsilon(\chi_1, A)$ и $\varepsilon(\chi_2, B)$ су једнаки акко је $\chi_1 = \chi_2$ и $B \in \varepsilon(\chi_1, A)$.

Теорема 108

Епицикл је јединствено одређен са три тачке.

Дефиниција 66

Ако је $T \in \varepsilon(\chi, A)$ произвољна тачка епицикла и $p \in \chi$ таква да је $T \in p$ онда права ортогонална на p у T је тангента епицикла.

Ако епицикл није права онда са својом тангентом има тачно једну заједничку тачку и све остале тачке тог епицикла су у истој полуравни одређеној тангентом.

Аксиоме непрекидности

IV_1 (Архимедова) Нека су AB и CD две дужи. Тада постоје тачке $A_1, A_2, \dots A_n \in AB$ такве да важи $\mathcal{B}(A, A_1, A_2, \dots A_n)$ и $\mathcal{B}(A, B, A_n)$.

IV_2 (Канторова) Ако је A_nB_n низ затворених дужи једне праве тако да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $A_{n+1}B_{n+1} \subset A_nB_n$ онда постоји тачка $C \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_nB_n$.

Теорема 109

Дедекинд Ако су све тачке праве p подељене у два непразна скупа M и N тако да је $p = M \cup N$, $M \cap N = \emptyset$ и између сваке две тачке једног скупа нема тачака другог скупа онда постоји тачка $P \in p$ такве да све тачке из $M \setminus \{P\}$ припадају једној полуправој са почетком у P, а све тачке из $N \setminus \{P\}$ припадају комплементарној полуправој.

Дефиниција 67

Нека је $\mathcal{D}$ скуп свих дужи. Пресликавање $L : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ је мера дужи ако важи

1. постоји дуж d таква да је $L(d) = 1$,
2. Ако је $d_1 \cong d_2$ онда је $L(d_1) = L(d_2)$,
3. Ако је $d_1 + d_2 = d_3$ онда је $L(d_1) + L(d_2) = L(d_3)$

Теорема 110

Ако је дата дуж d онда постоји мера L за коју важи $L(d) = 1$.

Теорема 111

Ако је дата мера L и $\alpha \in \mathbb{R}^+$ онда постоји дуж d таква да је $L(d) = \alpha$.

Простор S је метрички простор.

$$d(A, B) = L(AB)$$

Дефиниција 68

Бијекција $P : S \to S$ је сличност са коефицијентом $k \in \mathbb{R}$ ако је за сваке две тачке A и B $d(P(A), P(B)) = kd(A, B)$.
Два лика F_1 и F_2 су слични ако постоји сличност P таква да је $P(F_1) = F_2$.
Пишемо $F_1 \sim F_2$.

Теорема 112

Ако је дата сличност P и тачке A, B, C, D онда важи

- *Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ онда је и $\mathcal{B}(P(A), P(B), P(C))$*
- *Ако је $AB \cong CD$ онда је и $P(A)P(B) \cong P(C)P(D)$.*
- $\angle ABC \cong \angle P(A)P(B)P(C))$.

У еуклидској геометрији свака сличност се мозе разложити као композиција хомотетије и изометрије.
У хиперболичкој геометрији свака сличност је изометрија.

Теорема 113

Збир углова троугла ABC није већи од π.

Теорема 114

Ако постоји троугао коме је збир углова π, онда је збир углова произвољног троугла такође π.

Теорема 115

Постоји троугао коме је збир углова π акко свака права ортогонална на једном краку оштрог угла сече други крак.

Теорема 116

Постоји троугао коме је збир углова π акко за сваку праву a и тачку $B \notin a$ у равни која је њима одређена постоји тачно једна права $B \in b$ која је дисјунктна са a.

Теорема 117

У (апсолутној) равни дате су права a и тачка A која јој не припада. У скупу свих полуправих те равни са почетком у A постоје тачно две полуправе p' и q' такве да свака полуправа са почетком у A сече праву a акко припада оном од углова са крацима p' и q' којем припада права a.

Теорема 118

У равни одређеној полуправом p и тачком A која јој не припада правој која садржи p постоји јединствена полуправа са теменом A која је паралелна са p.

Теорема 119

Ако полуправа p садржи полуправу q онда је p паралелна са полуправом a акко је q паралелна са a.

Теорема 120

Релација паралелности полуправих је симетрична.

Теорема 121

Ако су p, q, r три дисјунктне полуправе једне равни такве да је $a \parallel b$ и $b \parallel c$ онда је и $a \parallel c$.

Теорема 122

Ако су полуправе a' и b' паралелне и тачка C не припада равни која је њима одређена тада постоји јединствена права $c \ni C$. Ако су α и β равни које су одређене тачком C и полуправама a' и b' редом онда је $c = \alpha \cap \beta$.

Теорема 123

Ако је дата полуправа p' и χ скуп који садрзи праву која садржи p' и свих правих које садрже полуправе паралелне са p' је (параболички) прамен правих.

Дефиниција 69

Епицикл који одговара параболичком прамену назива се орицикл.

Дефиниција 70

Нека је β раван која садржи праву p и ортогонална је на раван α и $\alpha \cap p = \emptyset$. Означимо $q = \alpha \cap \beta$. Тада је p паралелно са α ако је p паралелно са q.

Дефиниција 71

Нека су α, β дисјунктне равни.Нека је γ ортогонална на α и β и сече их редом по правама a и b. Ако су праве a и b паралелне онда каземо и да су равни α и β паралелне.

Теорема 124

Ако права p ван равни α онда је p паралелна са α акко је паралелна бар једној правој равни α.

Плејферова аксиома

V_e Постоје тачка A и права a која је не садржи тако да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве $b \ni A$ која не сече a.

Теорема 125

За сваку тачку A и праву a која је не садржи важи исказ V_e.

Теорема 126

Следећи искази су еквивалентни Плејферовој аксиоми

1. *Збир унутрашњих углова у троуглу је* π.
2. *Збир унутрашњих углова у четвороуглу је* 2π.
3. *Углови на противосновици сакеријевог четворугла су прави.*
4. *Сви углови ламбертовог четвороугла су прави.*
5. *Свака права у равни оштрог угла која је ортогонална на један крак сече други крак.*
6. *Две праве једне равни су паралелне ако су дисјунктне.*
7. *Ортогоналан прамен је параболички.*
8. *Еквидистанта је права.*
9. *Нелинеарни епицикл је круг.*
10. *Постоји круг који садржи три неколинеарне тачке.*

V Еуклидов постулат

Ако једна права у пресеку са друге две праве образује са једне стране два угла чији је збир мањи од два права угла, онда се те две праве секу са оне стране са које је збир углова мањи од два права угла.

Теорема 127

У апсолутној геометрији је V Еукидов постулат еквивалентан Плејферовој аксиоми.

Теорема 128

Директне изометрије еуклидске равни су коинциденција, ротација и транслација. Индиректне изометрије еуклидске равни су осна рефлексија и клизајућа рефлексија.

Теорема 129

Директне изометрије еуклидског простора су коинциденција, осна ротација, транслација и завојно кретање. Индиректне изометрије еуклидског простора су раванска рефлексија, осноротациона рефлексија и клизајућа рефлексија.

Аксиома Лобачевског

V_h Постоје тачка A и права a која је не садржи тако да у њима одређеној равни постоји бар две праве $b, c \ni A$ које не секу a.

Теорема 130

За сваку тачку A и праву a која је не садржи важи исказ V_h.

Теорема 131

Следећи искази су еквивалентни аксиоми Лобачевског

1. *Угао пралелности је оштар.*
2. *Збир унутрашњих углова у троуглу је мањи од π.*
3. *Збир унутрашњих углова у четвороуглу је мањи од 2π.*
4. *Углови на противосновици сакеријевог четворугла су оштри.*
5. *Један угао ламбертовог четвороугла је оштар.*
6. *Постоји права у равни оштрогу угла која је ортогонална на један крак и не сече други крак.*

Теорема 132

Два троугла су подударна акко су им подударни одговарајући углови.

Теорема 133

Нека је полуправа Bb паралелна правој a и $X \in b$ произвољна тачка. Ако су B' и X' ортогоналне пројекције тачака B и X на праву a редом, онда је $BB' > XX'$.

Теорема 134

Ако су a и b паралелне праве и l дата дуж тада постоји јединствена тачка $B \in b$, чије подножје нормале на a је B' таква да је $BB' = l$.

Теорема 135

У хиперболичкој равни постоји јединствена права која је ортогонална на један и паралелна са другим краком оштрог угла.

Теорема 136

Ако се праве a и b секу онда је ортогонална пројекција једне на другу или тачка или отворена дуж.

Теорема 137

Ако су праве a и b паралелне онда је ортогонална пројекција једне на другу отворена полуправа.

Теорема 138

У хиперболичкој равни постоји бесконачно много правих које садрже тачку A и не секу праву a која не садржи тачку A.

Теорема 139

Постоји јединствена права ортогонална на две међусобно хиперпаралелне праве.

Директне изометрије хиперболичке равни

1. коинциденција
2. ротација
3. транслација
4. орицикичка ротација (паралелно померање)

Дефиниција 72

Ако права p не сече раван α, и права p' садржи ортогоналну пројекцију праве p на α. Права p је хиперпаралелна равни α ако су p и p' хиперпаралелне.

Теорема 140

Права p и раван α су хиперпаралелне ако постоји права $q \subset \alpha$ таква да су p и q хиперпаралелне.

Дефиниција 73

Ако су α, β две разне равани γ раван која је ортогонална на обе и сече их редом по правама a и b. Ако су a и b хиперпаралелне онда кажемо да су α и β хиперпаралелне.

Теорема 141

Постоји јединствена права која припада двема разним параболичким праменовима.

Дефиниција 74

Асимптоцки полигон, са асимптоцким теменом има две суседне ивице које су паралелне (полу)праве.

Теорема 142

Ако је N несвојствено теме асимптоцког троугла $\triangle ABN$ онда је спољашњи угао у темену A већи од унутрашњег угла у темену B.

Теорема 143

Троуглови $\triangle ABN$ и $\triangle A'B'N'$ са несвојственим теменима N и N' су подударни акко је

1. $\angle BAN \cong \angle B'A'N'$ *и* $AB \cong A'B'$
2. $\angle BAN \cong \angle B'A'N'$ *и* $\angle ABN \cong A'B'N'$.

Теорема 144

Нека су троуглови $\triangle ABN$ и $\triangle A'B'N'$ са несвојственим теменима N и N' и правим углом у темену B и B'. Тада је $AB \cong A'B'$ акко $\angle BAN \cong \angle B'A'N'$

Дефиниција 75

Нека је $\mathcal{D}$ скуп свих дужи. Функција Лообачевског је пресликавање $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ којом се дуж AB слика у угао пралелности.

Теорема 145

Ако је C тачка на полуправој BA таква да је $CB > AB$ онда је $\Pi(CB) < \Pi(AB)$.

Нека је дат круг $k(O,r)$. Инверзија у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ такво да је $\psi_k(P) = P'$ где је тачка P' јединствена тачка полуправе OP таква да је $OP \cdot OP' = r^2$.

Особине инверзије

1. ψ_k је инволуција,
2. тачка P је фиксна акко $P \in k$,
3. унутрашњост круга k се слика у спољасњост, и обратно,
4. Ако права p садржи O онда се скуп $p \setminus \{O\}$ слика у себе,
5. Ако права p не садржи O онда се она слика у $l \setminus \{O\}$ за неки круг l који не садржи O.
6. Ако круг l садржи O онда се скуп $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O,
7. Ако круг l не садржи O онда се скуп он слика у круг l' који не садржи O.
8. ψ_k је конформно пресликавање (чува углове).
9. круг l је фиксан при инверзији ψ_k ако је $k = l$ или $k \perp l$.

Н

ека је k јединични круг са центром O.
$h-$тачке су тачке унутрасњости круга k.
Круг k се назива апслута.
$h-$ праве су делови еукидских правих и кругова који су ортогонални на апсолуту.

Теорема 146

Постоји јединствена $h-$ права кроз две дате $h-$ тачке A и B.

Дефинишемо релацију $\mathcal{B}_h(A, B, C) \Leftrightarrow B(A, B, C)$ ако тачке A, B, C леже на еуклидској правој. Ако A, B, C леже на еуклидском кругу онда је $\mathcal{B}_h(A, B, C)$ акко B припада оном луку AC који је цео унутар апсолуте.

Дефиниција 76

$h-$ рефлексија у односу на $h-$ праву p је осна рефлексија S_p ако је p поскуп еуклидске праве и инверзија ψ_p ако је p део еукидског круга.
$h-$изометрија је коначна композиција $h-$ рефлексија.

Дефиниција 77

$(A, B) \cong_h (C, D)$ акко постоји $h-$изометрија J таква да је $J(A) = C$ и $J(B) = D$.

Теорема 147

$h-$ тачке, $h-$праве, $\mathcal{B}_h$, $\cong_h$ задовољавају аксиоме апсолутне равни

Теорема 148

$h-$ тачке, $h-$праве, $\mathcal{B}_h$, $\cong_h$ задовољавају аксиому Лобачевског.