

АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

задачи за вежбе

АФИНИ ПОТПРОСТОРИ

1. Ако је \mathcal{A} афинизација векторског простора $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, доказати да је скуп Π свих матрица облика

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta & 2\alpha - 5 \\ 2\beta + 3 & \alpha + 3\beta \end{bmatrix}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

један афини потпростор простора \mathcal{A} и одредити његову димензију. Одредити и бар једну праву из Π .

2. Скуп Π свих решења система линеарних једначина $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1$, $3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 3$, $2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1$ над пољем \mathbb{R} је и један потпростор афиног простора $\mathcal{A} = \mathbb{R}_{af}^4$. Одредити његову директрису \mathbb{U} .
3. Да ли је потпростор Π из претходног задатка паралелан афином потпростору Γ свих решења једначине $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$? Одредити директрису од $\Pi \cap \Gamma$?
4. Ако је $\mathcal{A} = \mathbb{V}_{af}$ афинизација векторског простора \mathbb{V} над пољем \mathbb{K} , доказати да је скуп $\Pi = \{\alpha u + (1 - \alpha)v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ најмањи афини потпростор од \mathcal{A} који садржи дате тачке u и v .
5. Ако је $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ било који изоморфизам афиних простора над истим пољем \mathbb{K} , доказати да је скуп $\Pi \subset \mathcal{A}$ потпростор од \mathcal{A} , ако и само ако је скуп $\sigma(\Pi) = \{\sigma(M) : M \in \Pi\}$ потпростор од \mathcal{B} .
6. Ако је $O_{e_1 e_2 e_3}$ било који репер афиног простора \mathcal{A} , скуп Π свих тачака M из \mathcal{A} , чије координате x, y и z у односу на тај репер задовољавају релацију $2x + 3y - z = 5$, је и један афини потпростор од \mathcal{A} димензије 2. Директриса?
7. Ако је \mathcal{A} афини простор димензије n , доказати да се сваки његов потпростор $\Pi = A + \mathbb{U}$, димензије $k < n$ може одредити и као пресек $n - k$ хиперравни.
8. Непразан скуп Π тачака из афиног простора \mathcal{A} је и потпростор, ако и само ако је једнак свом афином омотачу. Такође, ако за непразне скупове A и B тајача из \mathcal{A} важи $A \subset B \subset \langle A \rangle$, тада је и $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.
9. Ако су $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ било који потпростори афиног простора \mathcal{A} и $B = A + v$, директриса афиног омотача $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ њихове уније је управо сума потпростора \mathbb{U}, \mathbb{V} и $\Omega(v)$.
10. Ако афини потпростори $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ имају бар једну заједничку тачку, доказати да је тада $\dim\langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim\Pi + \dim\Gamma - \dim\langle \Pi \cap \Gamma \rangle$.
11. Ако су афини потпростори $\Pi = a + \mathbb{U}$ и $\Gamma = b + \mathbb{W}$ потпростори афиног простора $(\mathcal{A}, \mathbb{V})$ за које је $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$, доказати да је њихов пресек $\Pi \cap \Gamma$ једночлан.
12. Ако две разне равни Π и Γ у афином простору \mathcal{A} димензије 3 имају бар једну заједничку тачку, доказати да њихов пресек $\Pi \cap \Gamma$ мора бити права. Да ли то важи ако је $\dim\mathcal{A} = 4$?
13. Ако раван Σ сече две паралелне равни Π и Γ , у афином простору \mathcal{A} тада су и њихове пресечне праве паралелне. Доказати.
14. Ако су (x_r, y_r, z_r) координате тачака A_r у односу на дати репер $O_{e_1 e_2 e_3}$ афиног простора \mathcal{A} димензије 3, доказати да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 компланарне ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Доказати да два тротеменика (A, B, C) и (P, Q, R) у афиним простору над пољем R имају исто тежиште ако и само ако је $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = 0$.
16. Ако су P, Q, R тим редом тежишта парова тачака $(B, C), (C, A), (A, B)$, доказати да тројке тачака (A, B, C) и (P, Q, R) имају исто тежиште.
17. Ако су P, Q, R тим редом барицентри пондерисаних тачака (B, α) и (C, β) , (C, α) и (A, β) , (A, α) и (B, β) , доказати да тачке A, B, C и P, Q, R имају исто тежиште.
18. Ако су P, Q, R тежишта система тачака $(S, B, C), (S, C, A), (S, A, B)$, тада је њихов афини омотач $\langle P, Q, R \rangle$ паралелан афиним омотачу тачака A, B, C .
19. Нека су A и B фиксирани тачке и Π потпростор афиног простора \mathcal{A} . Ако је T_P тежиште тачака A, B, P тада је и скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од \mathcal{A} . Притом је и $\Gamma \parallel \Pi$.
20. Ако су Π и Γ две мимоилазне праве у реалном афиним простору \mathcal{A} . Ако је T_{PQ} тежиште тачака P и Q доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} : P \in \Pi, Q \in \Gamma\}$ једна равна која је паралелна и са Π и са Γ .
21. Ако су $(4, 3), (5, 4), (2, 2)$ и (x, y) координате тачака A, B, C и M у односу на дати репер $O_{e_1 e_2}$ афине равни \mathcal{A} , прво доказати да је (A, B, C) једна афина база те равни, а затим одредити и барицентричне координате уојене тачке M у односу на ту базу.
22. Ако је ABC троугао, а P, Q и R редом додирне тачке уписаног круга k троугла ABC са странама BC, CA и AB , доказати да су праве AP, BQ и CR конкурентне. Ако су дужине одговарајућих страна a, b, c одредити барицентричне координате те пресечне тачке у односу на афину базу (A, B, C) те равни.
23. У четвородимензионалном простору одредити међусобни положај равни $\alpha : x_1 + x_2 + 1 = 0, x_3 - x_4 = 0$ и $\beta : x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + s, x_3 = t - 2s, x_4 = 1 + t - s, t, s \in \mathbb{R}$.
24. У четвородимензионалном афиним простору дате су праве $p : x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + t, x_3 = 3 + t, x_4 = 4 + t, t \in \mathbb{R}$ и $q : x_1 = 0, x_2 - x_3 + 1 = 0, x_4 - 3 = 0$. Одредити параметарске и опште једначине равни минималне димензије која садржи праве p и q .
25. У четвородимензионалном еуклидском простору дата је дводимензиона равна α која садржи тачке $A(1, 1, 1, 1), B(2, 2, 0, 0), C(1, 2, 0, 1)$ и права одређена тачкама $D(1, 1, 1, 2), E(1, 1, 2, 1)$. Одредити узајамни положај равни α и праве p .
26. У четвородимензионалном простору одредити равна најмање димензије која садржи праве $p : x_1 = -1 + t, x_2 = 0, x_3 = 1 - t, x_4 = -3 + t$ и $q : x_1 - x_2 = 1, x_1 - x_4 = 2, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.
27. У четвородимензионалном еуклидском простору одредити једначину праве l која садржи тачку $A(1, 0, 2, 4)$, сече праву $q : x_1 - 1 = x_2 - 2 = x_3 - 3 = x_4 - 4$ и паралелна је хиперравни $\pi : x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2007 = 0$.
28. Одредити једначину тродимензионе равни у петодимензионалном афиним простору која садржи тачке $A_1(-1, 2, 0, 0, 4), A_2(1, 1, 1, 1, 1), A_3(0, 1, 3, -1, 1)$ и паралелна је правој $l : x_1 = 1 + 2t, x_2 = 3 - t, x_3 = 4, x_4 = 1 + t, x_5 = -t, t \in \mathbb{R}$.
29. У четвородимензионалном Еуклидском простору задата је дводимензиона равна α која садржи тачке $A(3, 2, 0, -1), B(0, 0, 2, 2)$ и $C(2, 3, -1, 0)$ и права p чија је једначина $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, 2x_1 + x_2 = 3, -x_2 + x_3 + x_4 = 2$. Одредити тачку $P \in p$ која се налази на најкраћем растојању од равни α и израчунати то растојање.
30. У петодимензионалном афиним простору дата је равна $\alpha : x_1 + x_5 = 1, -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 1 = 0$ и равна β одређена тачком $B(2, 0, -1, 4, 0)$ и векторима $\omega_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$ и $\omega_2 = (1, 1, 2, 3, 0)$. Одредити ортогоналну пројекцију β на α и димензију пројекције.
31. Одредити реалан параметар t такав да постоји права нормална на хиперравна $\alpha : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2004$ која сече праве $p : \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 5}{1} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4 + t}{0}$ и $q : \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 5}{1} = \frac{x_3 - 7}{0} = \frac{x_4 - 3}{-1}$, а затим и одредити ту праву.

32. У четвородимензионом афинном простору одредити једначину праве која припада хиперравни $x + y + z - t = 2$, садржи тачку $A(1, 1, 1, 1)$ и заклапа минимални угао са правом $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{2} = \frac{t}{-1}$.
33. У четвородимензионом простору одредити праву која садржи тачку $(0, 1, 2, 3)$ нормална је на праву $p : \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-2}{1} = \frac{x_3-3}{2} = \frac{x_4-4}{1}$, сече праву $q : \frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3+3}{1} = \frac{x_4-7}{0}$, а са правом $r : x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ гради угао $\arccos \frac{1}{6}$.
34. (а) Две различите праве Π и Γ једне равни, нпр. Σ су паралелне, ако и само ако су дисјунктне.
 (б) Две различите праве Π и Γ у афинном простору \mathcal{A} су компланарне, ако и само ако су, или паралелне, или имају само једну заједничку тачку. (Тврђење 3, стр 17.)
35. Две различите хиперравни Π и Γ , у афинном простору димензије $n > 1$ су, или паралелне, или је њихов пресек $\Delta = \Pi \cap \Gamma$ неки потпростор димензије $n - 2$. (стр 19.)

АФИНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

- Ако је S фиксирана тачка афиног простора \mathcal{A} и α фиксиран скалар, доказати да је са $\pi : M \mapsto N$, где је N тачка за коју је $\overrightarrow{SN} = \alpha \overrightarrow{SM}$ дефинисано и једно афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Ако су A и B фиксиране тачке афиног простора \mathcal{A} и $\pi(M)$ тежиште тачака A, B и M , доказати да је тиме дефинисано једно афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Ако паралелне равни Π и Σ не садрже дату тачку S у афинном простору \mathcal{A} , тада за сваку тачку M равни Π , права SM сече и раван Σ у некој тачки $\pi(M) = M'$. Доказати да је тиме дефинисано и једно афино пресликавање равни Π на раван Σ .
- Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} афинизације векторских простора $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{W} = \mathbb{R}^1[\lambda]$ одредити експлицитну форму афиног пресликавања $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, које тачкама $(1, 1), (2, 0), (1, 2)$ простора \mathcal{A} тим редом придружује $1, 2\lambda, 2 - \lambda$ простора \mathcal{B} .
- Ако је \mathcal{A} било који афини простор коначне димензије n , доказати да је афино пресликавање $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ињективно ако и само ако је сурјективно. шта се дешава у случају $\mathcal{A} = \mathbb{K}[\lambda]$?
- Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} афини простори над пољем \mathbb{K} чија карактеристика није 2, доказати да је пресликавање $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ афино ако и само ако за произвољне тачке A и B из простора \mathcal{A} важи $\phi(\alpha A + \beta B) = \alpha \phi(A) + \beta \phi(B)$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1)$.
- Нека су $(1, 1), (0, 1), (3, 2)$ и $(-1, 2), (8, 6), (x, y)$ координате тачака A, B, C и P, Q, M у односу на дати репер $O_{e_1 e_2}$ афине равни \mathcal{A} . Прво одредити барицентричне координате тачке M у односу на афину базу (A, B, C) те равни а затим и афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ за које је $\pi(A, B, C) = (P, Q, R)$.
- Нек аје ABC тротеменик у афинном простору \mathcal{A} и $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ пресликавање којим се свакој тачки M из \mathcal{A} придружује тачка $\pi(M) = M'$ одређена са $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање бијективно и афино, да има тачно једну фиксну тачку S као и да за сваку тачку $M \neq S$, права MM' садржи S .
- Ако су координате тачака A, B, C из претходног задатка у односу на дати репер $O_{e_1 e_2 e_3}$ простора \mathcal{A} $(-1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, -)$ одредити слике $\pi(\Delta)$ и $\pi(\Sigma)$ праве $\Delta : x - y = 0, z + 1 = 0$ и равни $\Sigma : x - 2y + 3z + 1 = 0$.
- Одредити формуле афине трансформације $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ у односу на дати репер O_e афине равни \mathcal{A} , којом се тачка $A(1, 1)$ пресликава у тачку $A'(2, 3)$, а праве $\Pi : x - y = 2$ и $\Sigma : x + y = 0$ у праве $\Pi' : x - y = 3$ и $\Sigma' : 7x - 5y = -3$.
- Доказати да је у односу на фиксирани репер $O_{e_1 e_2 e_3}$ афиног простора \mathcal{A} димензије 3 формулама $x' = 1 - x - y - 2z, y' = -3 + 6x + 4y + 6z, z' = 1 - 2x - y - z$ дефинисано пројектовање тог простора, а затим одредити његову основу у директрису.
- Ако је $O_{e_1 e_2 e_3}$ дати репер афиног простора \mathcal{A} , одредити формуле паралелног пројектовања $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ на раван $\Pi : 2x - y + z - 2 = 0$, паралелно правој $\Gamma = \langle A, u \rangle$ где је A тачка са координатама $(-1, 0, 1)$ и $u = e_1 + 2e_2 + e_3$. Одредити, затим, формуле пројектовања σ простора \mathcal{A} на праву Γ паралелно равни Π , а затим и њихову композицију.

13. Ако су A и B две разне тачке простора \mathcal{A} и α, β фиксирани скалари, тада је пресликавање $M \mapsto \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)M$ или транслација или хомотетија.
14. Ако је η хомотетија са средиштем P и π било која трансформација из афине групе \mathbb{GA} простора \mathcal{A} , доказати да је тада и $\theta = \pi \circ \eta \circ \pi^{-1}$ хомотетија са средиштем $Q = \pi(P)$.
15. Доказати да две хомотетије η и δ у афиној групи простора \mathcal{A} комутирају ако и само ако имају заједничко средиште хомотетије.
16. Ако су η и δ хомотетије са средиштима P и Q и коефицијентима α и β , њихова композиција је или транслација (за $\alpha\beta = 1$), или хомотетија (за $\alpha\beta \neq 1$). У првом случају то је транслација за вектор $a = (1 - \beta)\overrightarrow{PQ}$, а у другом хомотетија чије је средиште S одређено са $\overrightarrow{PS} = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$.
17. Доказати да је композиција две централне симетрије транслација и одредити њен вектор.
18. У петодимензионом Еуклидском простору дате су равни $\alpha : x_1 = x_2 = 1, x_3 + x_4 = x_5$ и $\beta : x_1 = s - t, x_2 = 1, x_3 = s, x_4 = 1 - t, x_5 = 3 - s + t, s, t \in \mathbb{R}$. Одредити формуле трансформације која представља композицију нормалних пројекција редом на равни α и β .
19. У четвородимензионом еуклидском простору дате је раван $\alpha : -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0, -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = 0$ и сфере $S_1 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 3)^2 + (x_4 - 1)^2 = 1, S_2 : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 13)^2 + (x_4 - 1)^2 = 9$. Одредити формуле трансформације која представља композицију симетрије у односу на α и хомотетије са негативним коефицијентом која слика S_1 у S_2 .
20. У четвородимензионом еуклидском простору дата је права $p : x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = -2 + t, x_4 = -t, t \in \mathbb{R}$ и тачка $S(1, 2, -1, 0)$. Написати формуле трансформације која представља композицију централне симетрије са центром у тачки S и симетрије у односу на праву p .
21. Одредити формуле афине трансформације којом се елипса $\epsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ слика у круг $k : x^2 + y^2 = a^2$.
22. Нека је Π елипса која садржи средишта P, Q, R страница BC, CA, AB неког троугла ABC равни \mathbb{E}^2 . Ако она праве BC, CA, AB , тим редом, сече у тачкама X, Y, Z , тада се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки, нпр H , и важи: $\overrightarrow{HS} : \overrightarrow{ST} = 3 : 1$ (S - центар елипсе, T - тежиште троугла ABC).
23. Ако права одређена тетивом MN хиперболе Π сече њене асимптоте у тачкама P и Q , тада мора бити $PM = NQ$. Доказати.
24. Ако су AB и CD било који спрегнути дијаметри једне елипсе, доказати да сви тако одређени паралелограми $ABCD$ имају исту површину.
25. Ако су AB и CD конјуговани дијаметри, $a, b > 0$ дужине главних полуоса и S центар елипсе Σ , доказати да је $\|\overrightarrow{SA}\|^2 + \|\overrightarrow{SC}\|^2 = a^2 + b^2$.
26. Нека је $\chi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ хипербола и $P \in \chi$ произвољна тачка. Доказати да постоји афино пресликавање којим се хипербола χ слика на хиперболу $\chi' : x'y' = 1$ при којим се тачка P слика у тачку $P'(1, 1)$.
27. Ако је елипса Σ уписана у полигон A_1, A_2, \dots, A_n , доказати да за додирне тачке P_r страница $A_r A_{r+1}$ важи

$$\|\overrightarrow{A_1 P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2 P_2}\| \cdot \dots \cdot \|\overrightarrow{A_n P_n}\| = \|\overrightarrow{P_1 A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2 A_3}\| \cdot \dots \cdot \|\overrightarrow{P_n A_1}\|.$$
28. Нека су на страницама троугла ABC дате тачке P, Q и R тако да је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} > 0$. Ако је $CP \cap AQ = \{X\}$, $AQ \cap BR = \{Y\}$ и $BR \cap CP = \{Z\}$, одредити однос површина троуглова ABC и XYZ .
29. Одредити тип афиног пресликавања чије су формуле: $x' = x - y - 1, y' = y$ у односу на репер Oe_1e_2 афине равни.
30. Одредити формуле неке трансвекције којом се паралелограм $ABCD$ слика на неки квадрат, ако су координате темена $A(-1, -1), B(1, -1), C(3, 1)$ и $D(1, 1)$.

Изометрије и сличности

1. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $Oe_1e_2e_3$: $x' = -4x - 8y + z + 14, y' = 4x - 1y + 8z + 6, z' = 7x - 4y - 4z - 8$. Доказати да је Φ сличност, одредити основне компоненте и скицирати путању тачке.

2. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2$, $y' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$, $z' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$. Доказати да је Φ изометрија, одредити основне компоненте и скицирати путању тајке.
3. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 3$, $y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$, $z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 8$. Доказати да је Φ изометрија, одредити основне компоненте и скицирати путању тајке.
4. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = 2x - 2y + z + 1$, $y' = 2x + y - 2z + 2$, $z' = x + 2y + 2z - 1$. Доказати да је Φ сличност, одредити основне компоненте и скицирати путању тајке.
5. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = 1 - x - 2y + 2z$, $y' = 1 - 2x + 2y + z$, $z' = 2x + y + 2z$. Доказати да је Φ сличност, одредити основне компоненте и скицирати путању тајке.
6. У оријентисаном еуклидском простору E_3 дата је трансформација Φ својим формулама у односу на ортонормирани репер $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z)$, $y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z) + 1$, $z' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z) + 2$. Доказати да је Φ изометрија, одредити основне компоненте и скицирати путању тајке.