Geometrija 3
Zadaci po kojima se drže vežbe

1 Krive

1.1. Skicirati i parametrizovati sledeće krive:

(a) prava, krug, elipsa, hiperbola, parabola;
(b) lančanica;
(c) traktrisa;
(d) cikloide, epicikloide, hipocikloide (specijalno kardioida, astroida);
(e) Arhimedova spirala, logaritamska spirala;
(f) Kasinijevi ovali (specijalno Bernulijeva lemniskata);
(g) kružni heliks (zavojnica), konusni heliks;
(h) Vivijanijeva kriva.

1.2. Ispitati regularnost krivih zadatih parametrizacijom:

(a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\pi, \pi)$;
(b) $\beta(u) = (\cos u^3, \sin u^3)$, $u \in (-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$.

Da li su ove krive ekvivalentne?

1.3. Dokazati da skup $\mathcal{A} = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$ nije slika regularne krive. Da li je ovaj skup trag (slika) neke glatke krive?

1.4. (a) Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ glatka funkcija i (x_0, y_0) tačka za koju važi $F(x_0, y_0) = 0$. Dokazati da je $\nabla F(x_0, y_0) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ dovoljan uslov da skup tačaka datih uslovom $F(x, y) = 0$ bude lokalno (u nekoj okolini tačke (x_0, y_0)) trag regularne krive. Da li je taj uslov i potreban?

(b) Odrediti singularne tačke krivih zadatih sa $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (Dioklesova kisoida), $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ (strofoida), $a > 0$, i skicirati ih.

1.5. Izračunati dužinu sledećih krivih:

(a) $y = \ln\cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{3})$;
(b) $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t$, $y = 2\operatorname{ch} t$, $t \in (0, 2)$;
(c) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$;
(d) $\rho = a(1 + \cos\theta)$; (kardioida)
(e) $\rho = a\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$. (Arhimedova spirala)

1.6. Naći prirodnu parametrizaciju krivih:

(a) kruga $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$;
(b) heliksa $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;
(c) lančanice $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$;
(d) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$;
(e) parabole $y = x^2$.

1.7. Dokazati da je ugao između vektora položaja i tangente logaritamske spirale $\rho = ca^\theta$ ($a > 0$, $c > 0$) konstantan.

1.8. Dokazati da je dužina odsečka tangentne linije astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, određenog koordinatnim osama konstantna.

1.9. Data je regularna ravanska kriva α i tačke P i Q van nje. Neka je M_0 tačka krive u kojoj zbir rastojanja $PM + QM$, $M \in \alpha$, dostiže minimum. Dokazati da je simetrala ugla $\measuredangle PM_0Q$ normalna na tangentu krive α u tački M_0.

1.10. Naći Freneov reper, krivinu i torziju sledećih krivih:

(a) $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$;

(b) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$.

1.11. (a) Dokazati da vektor $X = \tau T + \kappa B$ (Darbuov vektor) zadovoljava:

$$\begin{aligned} T' &= X \times T \\ N' &= X \times N \\ B' &= X \times B. \end{aligned}$$

(b) Odrediti Darbuov vektor kružnog heliksa.

1.12. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati:

(a) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\tau \neq 0$;

(b) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

1.13. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Ako je $\kappa(s) = 0$, tada je α deo prave. Dokazati.

1.14. Ako sve tangentne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada slika te krive pripada nekoj pravoj.

1.15. Sferna kriva konstantne krivine je deo kruga. Dokazati.

1.16. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0$. Dokazati da su sledeći stavovi ekvivalentni:

(a) α je ravanska kriva;

(b) B je konstantan vektor;

(c) $\tau(s) = 0$ za sve $s \in I$.

1.17. Dokazati da je sledeća kriva ravanska $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$, $t \in (-1, 1)$ i naći ravan u kojoj leži.

1.18. Neka je $\alpha(s) : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati da je $[x - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$ jednačina oskulatorne ravni u tački $\alpha(0)$.

1.19. Dokazati da se sve oskulatorne ravni neke regularne krive sa krivinom različitom od nule seku u jednoj tački akko je ta kriva ravanska.

1.20. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regularna kriva parametrizovana dužinom luka s, kivine $\kappa \neq 0$ i $0 \in I$.

(a) Dokazati da za sve tačke s u dovoljno maloj okolini tačke $0 \in I$ važi

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + o(s^3)\right) T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + o(s^3)\right) N(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) B(0),$$

gde je $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$, $\kappa_0' = \kappa'(0)$, $\tau_0 = \tau(0)$. Prethodni izraz naziva se lokalna kanonska forma krive α.

(b) Analizirati lokalni izgled krive pomoću projekcija na oskulatornu, normalnu i rektifikacionu ravan.

1.21. Dokazati da važe Freneove formule za regularnu krivu $\alpha(t)$, $\kappa \neq 0$, parametrizovanu proizvoljnim parametrom t $(v = s' = ||\alpha'||)$:

$$\begin{aligned} T'(t) &= && v\kappa(t)N(t) && \\ N'(t) &= -v\kappa(t)T(t) && && + v\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= && -v\tau(t)N(t). && \end{aligned}$$

1.22. Neka je $\alpha(t)$, $t \in I$, regularna kriva. Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}^3$ tako da je $(\alpha(t) - a) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je $\alpha(t)$ sferna kriva.

1.23. Dokazati da važe sledeće formule za krivu α parametrizovanu proizvoljnim parametrom:

(a) $T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||}$;

(b) $B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||}$;

(c) $N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{||\alpha'|| \, ||\alpha' \times \alpha''||}$

(d) $\kappa = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}$;

(e) $\tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{||\alpha' \times \alpha''||^2}$.

(f) $\kappa_z = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1.24. Neka je ravanska kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho = \rho(\theta)$.

(a) Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta$.

(b) Dokazati da je krivina krive α data sa $\kappa_z(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Odrediti krivinu Arhimedove spirale $\rho = a \cos \theta$, $a > 0$.

1.25. Odrediti ravansku krivu (do na izometrijsku transformaciju) ako je data njena označena krivina:

(a) $\kappa_z(s) = \frac{1}{as+b}$, $a, b \neq 0$;

(b) $\kappa_z(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

1.26. Izračunati krivinu i torziju krive $\alpha(t) = (\sqrt{2} \cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2} \sin t + 2, -\sqrt{2} \cos t + \sin t + 3)$. Detaljno opisati krivu.

1.27. Uopštena zavojna linija (heliks) je prostorna kriva čiji tangentni vektor zaklapa konstantan ugao $\theta \in (0, \pi)$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, sa fiksiranim nenula vektorom $v \in \mathbb{E}^3$. Uopšteni heliks leži na cinilndru čije su izvodnice određene pravcem v i tačkama krive. Dokazati da je kriva uopštena zavojna linija akko važi jedan od uslova:

(a) normale su normalne na v;

(b) binormale grade konstantan ugao sa v;

(c) $\frac{\kappa}{\tau} = \text{const.}$

1.28. Data je kriva $\gamma(t) = (at, bt^2, ct^3)$, $a, b, c \neq 0$.

(a) Dokazati da je γ uopšteni heliks akko je $3ac = \pm 2b^2$.

(b) Ako je $3ac = 2b^2$, odrediti fiksiran vektor v i ugao θ između vektora v i tangente krive γ u proizvoljnoj tački.

1.29. Evoluta regularne prirodno parametrizovane krive $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ je kriva $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ definisana u tačkama gde je $\kappa(s) \neq 0$, data sa $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$. Za krivu α se kaže da je involuta krive β.

(a) Ispitati regularnost i odrediti krivinu i Freneov reper krive β preko odgovarajućih veličina krive α.

(b) Dokazati da je evoluta krive α geometrijsko mesto centara oskulatornih krugova krive α. (Oskulatorni krug je krug koji ima dodir bar reda dva sa krivom.)

(c) Odrediti evolutu elipse.

2 Površi

2.1. Parametrizovati jediničnu polusferu, sferu bez jednog meridijana i sferu bez jedne tačke. Da li su parametrizacije regularne? Da li je cela sfera regularna površ?

2.2. Dokazati da zapremina tetraedra koji se dobija u preseku koordinatnih osa i tangentne ravni površi $xyz = a^3$ ne zavisi od izbora tačke površi u kojoj je se razmatra tangentna ravan.

2.3. Dokazati da je skup rešenja jednačine $f(x, y, z) = x^3 + x^5 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ regularna površ i naći njenu tangentnu ravan u proizvoljnoj tački (x_0, y_0, z_0) površi.

2.4. (a) Dokazati da gornja polovina kružnog konusa $z^2 = x^2 + y^2$ nije regularna površ.

(b) Dat je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$. Odrediti prvu fundamentalnu formu ove površi.

2.5. Neka je $\alpha(u)$ regularna kriva i neka je $\beta(u) \neq 0$ vektorsko polje duž krive α. Odrediti pod kojim uslovima je $f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ regularna elementarna površ. Da li je helikoid pravolinijska površ? Da li je Mebijusova traka pravolinijska površ?

2.6. Neka je $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a < t < b$, regularna $1-1$ kriva klase C^k i $f > 0$.

(a) Dokazati da je slika površi $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$ dobijena rotacijom slike krive α oko $z-$ose.

(b) Dokazati da je r regularna elementarna površ.

(c) Odrediti koordinatne krive površi r i uglove koje one zaklapaju.

(d) Da li je katenoid rotaciona površ? Da li je torus rotaciona površ? Navesti još neki primer.

2.7. Dat je jednograni hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Parametrizovati ovu površ i naći koeficijente prve fundamentalne forme.

(b) Dokazati da na jednogranom hiperboloidu postoje dve familije mimoilaznih pravih tako da svaka tačka hiperboloida pripada tačno jednoj pravoj iz svake familije.

2.8. Ispitati da li je površ $r(u,v) = \big((1 + u\sin\frac{v}{2})\cos v, (1 + u\sin\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2}\big)$, $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$ regularna. Izračunati normalno vektorsko polje $n(0,v)$. Dokazati da je $\lim\limits_{v\to-\pi} r(0,v) = \lim\limits_{v\to\pi} r(0,v)$ i $\lim\limits_{v\to-\pi} n(0,v) = -\lim\limits_{v\to\pi} n(0,v)$.

2.9. Neka je $U = \{(\theta,\varphi) | -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$ i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i

$$f(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

parametrizacija dela sfere $\mathbb{S}^2$.

(a) Pokazati da su krive (*loksodrome*) na sferi koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima date jednačinama

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \pm(\varphi + C)\operatorname{ctg}\alpha, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Izračunati dužinu jedne od tih krivih.

(c) Izračunati površinu dela jedinične sfere između dva meridijana i dve paralele.

2.10. Data je površ $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$. Odrediti ugao između krivih $v = u + 1$ i $v = 3 - u$.

2.11. Izračunati površinu torusa.

2.12. Dokazati da krive familija $u_1(v) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ i $u_1(v) = C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ polove uglove između koordinatnih linija površi $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u > 0$.

2.13. (a) Dokazati da su lokalne koordinate na sferi dobijene iz stereografske projekcije konformne, tj. da su ravan i sfera bez tačke konformno ekvivalentne.

(b) Pokazati da su loksodrome na sferi slike odgovarajućih logaritamskih spirala iz karte pri stereografskoj projekciji.

2.14. Dat je jednograni hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Naći dve parametrizacije.

(b) Naći Gausovu i srednju krivinu.

(c) Naći Kristofelove simbole druge vrste.

2.15. Neka je druga fundamentalna forma površi $f = f(u,v)$ identički jednaka nuli. Dokazati da je površ deo ravni.

2.16. Neka je $\alpha = \alpha(u)$ prirodno parametrizovana kriva čija je krivina $\kappa = \kappa(u) \neq 0$ i torzija $\tau = \tau(u) \neq 0$. Izračunati Gausovu i srednju krivinu tangentne površi $f(u,v) = \alpha(u) + vT(u), v > 0$, pri čemu je $T = T(u)$ tangentni vektor krive α.

2.17. Odrediti geodezijske krivine koordinatnih linija helikoida $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$.

2.18. Neka je γ prirodno parametrizovana kriva čiji trag pripada slici elementarne površi r. Označimo sa κ, κ_n, κ_g redom krivinu, normalnu krivinu i geodezijsku krivinu krive γ, sa N i n normalno vektorsko polje krive i površi i sa θ ugao između njih, duž krive γ. Dokazati:

(a) $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$;

(b) $\kappa_n = \kappa \cos\theta$ (u tačkama duž traga krive gde je vektor N definisan, tj. gde je $\kappa \neq 0$);

(c) ako je kriva γ u normalnom sečenju (u svim tačkama), tada je $\kappa_n = \pm\kappa$ i $\kappa_g = 0$.

2.19. a) Izračunati normalnu krivinu sfere poluprečnika R u proizvoljnoj tački i u pravcu proizvoljnog tangentnog vektora.

b) Dokazati da za krivinu κ prirodno parametrizovane krive α čiji trag leži na jediničnoj sferi poluprečnika R važi nejednakost $\kappa \geqslant \dfrac{1}{R}$.

2.20. Neka je $\alpha(s)$ regularna kriva, koja pripada sferi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(a) Izraziti vektor položaja krive $\alpha(s)$ u freneovoj bazi.

(b) Dokazati da za krivinu i torziju krive $\alpha(s)$ važi $\tau^2\Big(R^2 - \frac{1}{\kappa^2}\Big) = \Big(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\Big)^2$.

2.21. Odrediti geodezijske linije cilindra.

2.22. Ako je $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ prirodna parametrizacija geodezijske linije na površi $f = f(u, v)$ za koju je $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$, dokazati da je $\sqrt{G}\cos\theta = c = \text{const}$ pri čemu je θ ugao između geodezijske linije i v-parametarske krive $u = const$.

2.23. Neka je $f = f(u, v)$ deo površi na kojem su u i v-parametarske krive ortogonalne i koeficijenti prve osnovne forme zavise samo od jednog parametra u. Tada se geodezijske linije uvek mogu naći integracijom, tj. tada važi:

(a) u-parametarske krive ($v = const$) su geodezijske linije.

(b) v-parametarske krive ($u = const = u_0$) su geodezijske linije akko je $G_u(u_0) = 0$.

(c) kriva oblika $\alpha(u) = r(u, v(u))$ je geodezijska linija akko je $v = \pm \displaystyle\int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}} du$, $C = \text{const}$.

2.24. Površ $f = f(u, v)$ naziva se Liuvilova površ ako je $E = G = U + V$ i $F = 0$, pri čemu je U funkcija samo po u i V funkcija samo po v. Ako je $\gamma(s) = f(u(s), v(s))$ prirodno parametrizovana geodezijska linija na ovoj površi, dokazati da je $U\sin^2\theta - V\cos^2\theta = c$ ($C = \text{const}$), pri čemu je θ ugao između geodezijske linije i u-parametarske krive $v = const$.

2.25. Data je rotaciona površ $r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$. Dokazati:

(a) Svaki meridijan (u-parametarska kriva) je geodezijska linija.

(b) Paralela (v-parametarska kriva) je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele.

2.26. (a) Dokazati da su koordinatne linije površi bez umbiličkih tačaka linije krivine akko je $F = 0 = f$.

(b) Dokazati da su meridijani i paralele rotacionih površi linije krivine.

2.27. Dokazati da su koordinatne linije površi za koju važi $f \neq 0$ asimptotske linije akko je $e = 0 = g$.

2.28. Naći glavne krivine, linije krivine i asimptotske krive Eneperove površi $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

2.29. Dokazati da u hiperboličkim tačkama površi postoje tačno dva asimptotska pravca, kao i da su oni simetrični u odnosu na glavne pravce u toj tački.

2.30. Odrediti eliptičke, paraboličke i hiperboličke tačke na torusu.

2.31. Neka je $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ elementarna površ i $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ fiksirana tačka. Označimo sa $\rho(u,v)$ rastojanje tačke $r(u,v)$ od tangentne ravni površi r u tački $P = r(u_0, v_0)$. Dokazati da za tačke (u,v) koje su u dovoljno maloj okolini tačke (u_0, v_0) važi

$$\rho(u,v) = \frac{1}{2}\mathrm{II}(u - u_0, v - v_0) + o(\|(u - u_0, v - v_0)\|^2).$$

(Identifikovane su $(u,v)-$ravan parametara i tangentna ravan površi u tački P.)

2.32. Operator oblika $S : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$ predstavlja negativni diferencijal Gausovog preslikavanja $g(p) = n(p)$ elementarne površi $r = r(u,v)$, tj. $S = -dg_p$. Kao samoadjungovan linearni operator u korespodenciji je sa drugom fundamentalnom (bilinearnom) formom na sledeći način:

$$\mathrm{II}(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle = \langle v_p, S(w_p) \rangle,$$

pa su glavne krivine u tački p regularne površi sopstvene vrednosti operatora oblika površi, a glavni pravci njegovi sopstveni vektori.

Dokazati da važe formule

$$\begin{aligned} S(r_u) &= -n_u = -\frac{Ff - Ge}{EG - F^2} r_u - \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} r_v, \\ S(r_v) &= -n_v = -\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} r_u - \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} r_v. \end{aligned}$$

U slučaju $F = f = 0$, prethodne formule se svode na $S(r_u) = \dfrac{e}{E} r_u$ i $S(r_v) = \dfrac{g}{G} r_v$, odakle sledi da su tada normalne krivine $u-$ i $v-$parametarskih krivih redom $\dfrac{e}{E}$ i $\dfrac{g}{G}$.

2.33. Neka je $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ prirodno parametrizovana kriva čija slika pripada tragu površi $r = r(u,v)$. Posmatrajući $n(s) = n(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ duž slike krive α, da li vektorska polja T, S, n čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ duž slike krive γ? Dokazati formule analogne Frene-Sereovim formulama:

(a) $T' = \mathrm{II}(T,T)n + \kappa_g S$;

(b) $S' = -\kappa_g T + \mathrm{II}(T,S)n$;

(c) $n' = -\mathrm{II}(T,T)T - \mathrm{II}(T,S)S$.

2.34. Dokazati da su helikoid i katenoid (na odgovarajuc1i način parametrizovani) izometrične površi.

2.35. Dokazati da normalna projekcija valjka koji dodiruje sferu po ekvatoru nije izometrija, ali čuva površine.

2.36. (a) Dokazati da su ravan (bez tačke) i konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ (bez vrha) difeomorfne površi.

(b) Dokazati da su ravan i konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ lokalno izometrični.

(c) Odrediti rastojanje između tačaka $A(0, 1, \sqrt{3})$ i $B(0, -1, \sqrt{3})$ na konusu.

2.37. Neka je $\alpha(s)$ prirodno parametrizovana kriva. Tangentna površ krive α je površ $f(s,v) = \alpha(s) + vT(s)$. Dokazati da je površ f izometrična ravni.