

# Geometrija 3

## Zadaci po kojima se drže vežbe

### 1 Krive

1.1. Skicirati i parametrizovati sledeće krive:

- (a) prava, krug, elipsa, hiperbola, parabola;
- (b) lančanica;
- (c) traktrisa;
- (d) cikloide, epicikloide, hipocikloide (specijalno kardioda, astroida);
- (e) Arhimedova spirala, logaritamska spirala, sinusoidne spirale;
- (f) Kasinijevi ovali (specijalno Bernulijeva lemniskata);
- (g) kružni heliks (zavojnica), konusni heliks;
- (h) Vivijanijeva kriva.

1.2. Ispitati regularnost krivih zadatih parametrizacijom:

- (a)  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ ;
- (b)  $\beta(u) = (\cos u^3, \sin u^3)$ ,  $u \in (-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$ .

Da li su ove krive ekvivalentne?

1.3. Dokazati da skup  $\mathcal{A} = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$  nije slika regularne krive. Da li je ovaj skup trag (slika) neke glatke krive?

- 1.4. (a) Neka je  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija i  $(x_0, y_0)$  tačka za koju važi  $F(x_0, y_0) = 0$ . Dokazati da je  $\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)|_{(x_0, y_0)} \neq 0$  dovoljan uslov da skup tačaka datih uslovom  $F(x, y) = 0$  bude lokalno (u nekoj okolini tačke  $(x_0, y_0)$ ) trag regularne krive. Da li je taj uslov i potreban?
- (b) Odrediti singularne tačke krivih zadatih sa  $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$  (Dioklesova cisoida),  $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$  (strofoida),  $a > 0$ , i skicirati ih.

1.5. Izračunati dužinu sledećih krivih:

- (a)  $y = \ln \cos x$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ ;
- (b)  $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$ ,  $y = 2 \operatorname{ch} t$ ,  $t \in (0, 2)$ ;
- (c)  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ ;
- (d)  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ; (kardioda)
- (e)  $\rho = a\theta$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ . (Arhimedova spirala)

1.6. Naći prirodnu parametrizaciju krivih:

- (a) kruga  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ ,  $r > 0$ ;
- (b) heliksa  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ;
- (c) lančanice  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ,  $a > 0$ ;
- (d) elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a, b > 0$ ;
- (e) parabole  $y = x^2$ .

1.7. Dokazati da je ugao između vektora položaja i tangente logaritamske spirale  $\rho = ca^\theta$  ( $a > 0$ ,  $c > 0$ ) konstantan.

1.8. Dokazati da je dužina odsečka tangentne linije astroide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ , određenog koordinatnim osama konstantna.

1.9. Data je regularna ravanska kriva  $\alpha$  i tačke  $P$  i  $Q$  van nje. Neka je  $M_0$  tačka krive u kojoj zbir rastojanja  $PM + QM$ ,  $M \in \alpha$ , dostiže minimum. Dokazati da je simetrala ugla  $\angle PM_0Q$  normalna na tangentu krive  $\alpha$  u tački  $M_0$ .

**1.10.** Naći Freneov reper, krivinu, radijus (poluprečnik) krivine i torziju sledećih krivih:

- (a)  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $r > 0$ ;  
 (b)  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0$ .

**1.11.** (a) Odrediti Darbuov vektor  $X$  koji zadovoljava:

$$\begin{aligned} T' &= X \times T, \\ N' &= X \times N, \\ B' &= X \times B. \end{aligned}$$

(b) Odrediti Darbuov vektor kružnog heliksa.

**1.12.** Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva. Dokazati:

- (a)  $[B', B'', B'''] = \tau^5 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$ ,  $\tau \neq 0$ ;  
 (b)  $[T', T'', T'''] = \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ ,  $\kappa \neq 0$ .

**1.13.** Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva. Ako je  $\kappa(s) = 0$ , tada je  $\alpha$  deo prave. Dokazati.

**1.14.** Ako sve tangentne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada slika te krive pripada nekoj pravoj.

**1.15.** Sferna kriva konstantne krivine je deo kruga. Dokazati.

**1.16.** Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  prirodno parametrizovana kriva i  $\kappa(s) \neq 0$ . Dokazati da su sledeći stavovi ekvivalentni:

- (a)  $\alpha$  je ravanska kriva;  
 (b)  $B$  je konstantan vektor;  
 (c)  $\tau(s) = 0$  za sve  $s \in I$ .

**1.17.** Dokazati da je sledeća kriva ravanska  $\alpha(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$ ,  $t \in (-1, 1)$  i naći ravan u kojoj leži.

**1.18.** Neka je  $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $0 \in I$ ,  $\kappa \neq 0$  prirodno parametrizovana kriva. Dokazati da je  $[x - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$  jednačina oskulatorne ravni u tački  $\alpha(0)$ .

**1.19.** Dokazati da se sve oskulatorne ravni neke regularne krive sa krivinom različitom od nule seku u jednoj tački akko je ta kriva ravanska.

**1.20.** Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna kriva parametrizovana dužinom luka  $s$ , krivine  $\kappa \neq 0$  i  $0 \in I$ .

(a) Dokazati da za sve tačke  $s$  u dovoljno maloj okolini tačke  $0 \in I$  važi

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + o(s^3)\right) T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + o(s^3)\right) N(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) B(0),$$

gde je  $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ ,  $\kappa_0 = \kappa(0)$ ,  $\kappa_0' = \kappa'(0)$ ,  $\tau_0 = \tau(0)$ . Prethodni izraz naziva se lokalna kanonska forma krive  $\alpha$ .

(b) Skicirati (približno) projekcije krive na oskulatornu, normalnu i rektifikacionu ravan.

**1.21.** Dokazati da važe Freneove formule za regularnu krivu  $\alpha(t)$ ,  $\kappa \neq 0$ , parametrizovanu proizvoljnim parametrom  $t$  ( $v = s' = \|\alpha'\|$ ):

$$\begin{aligned} T'(t) &= v\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -v\kappa(t)T(t) + v\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -v\tau(t)N(t). \end{aligned}$$

**1.22.** Neka je  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , regularna kriva. Pretpostavimo da postoji  $a \in \mathbb{R}^3$  tako da je  $(\alpha(t) - a) \perp T(t)$  za svako  $t \in I$ . Dokazati da je  $\alpha(t)$  sferna kriva.

**1.23.** Dokazati da važe sledeće formule za krivu  $\alpha$  parametrizovanu proizvoljnim parametrom:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}; & \text{(d)} \quad \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}; \\ \text{(b)} \quad B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}; & \text{(e)} \quad \tau &= \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}; \\ \text{(c)} \quad N &= \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|}; & \text{(f)} \quad \kappa_z &= \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

**1.24.** Neka je ravanska kriva  $\alpha$  zadana polarnom parametrizacijom  $\rho = \rho(\theta)$ .

- (a) Dokazati da je dužina krive  $\alpha$  na segmentu  $[a, b]$  data formulom  $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta$ .  
 (b) Dokazati da je označena krivina krive  $\alpha$  data sa  $\kappa_z(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$ .  
 (c) Odrediti krivinu Arhimedove spirale  $\rho = a\theta$ ,  $a > 0$ .

**1.25.** Odrediti ravansku krivu (do na izometrijsku transformaciju) ako je data njena označena krivina:

$$\text{(a)} \quad \kappa_z(s) = \frac{1}{as+b}, \quad a, b \neq 0; \quad \text{(b)} \quad \kappa_z(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

**1.26.** Data je kriva  $\alpha(t) = (\sqrt{2} \cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2} \sin t + 2, -\sqrt{2} \cos t + \sin t + 3)$ .

- (a) Izračunati krivinu i torziju date krive.  
 (b) Detaljno opisati krivu. Odrediti krivu  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  koja leži u  $xy$ -ravni, kao i izometriju  $I$  prostora  $\mathbb{R}^3$  za koje važi  $I \circ \beta = \alpha$ .

**1.27.** Uopštena zavojna linija (heliks) je prostorna kriva čiji tangentni vektor zaklapa konstantan ugao  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , sa fiksim nenula vektorom  $v \in \mathbb{E}^3$ . Uopšteni heliks leži na cilindru čije su izvodnice određene pravcem  $v$  i tačkama krive. Dokazati da je kriva uopštena zavojna linija akko važi jedan od uslova:

- (a) normale su normalne na  $v$ ;  
 (b) binormale grade konstantan ugao sa  $v$ ;  
 (c)  $\frac{\kappa}{\tau} = \text{const}$ .

**1.28.** Data je kriva  $\gamma(t) = (at, bt^2, ct^3)$ ,  $a, b, c \neq 0$ .

- (a) Dokazati da je  $\gamma$  uopšteni heliks akko je  $3ac = \pm 2b^2$ .  
 (b) Ako je  $3ac = 2b^2$ , odrediti fiksim vektor  $v$  i ugao  $\theta$  između vektora  $v$  i tangente krive  $\gamma$  u proizvoljnoj tački.

**1.29.** Evoluta regularne prirodno parametrizovane krive  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  je kriva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definisana u tačkama gde je  $\kappa(s) \neq 0$ , data sa  $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ .

- (a) Ispitati regularnost i odrediti označenu krivinu i Freneov reper krive  $\beta$  preko odgovarajućih veličina krive  $\alpha$ .  
 (b) Dokazati da je evoluta krive  $\alpha$  geometrijsko mesto centara oskulatornih krugova krive  $\alpha$ .  
 (c) Odrediti evolutu elipse.

## 2 Površ

- 2.1.** (a) Neka je  $\alpha(u)$  regularna kriva i neka je  $\beta(u) \neq 0$  vektorsko polje duž krive  $\alpha$ . Odrediti pod kojim uslovima je  $f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$  regularna elementarna površ.
- (b) Primeri pravolinijskih površi: ravan, helikoid, Mebijusova traka, jednograni hiperboloid, hiperbolički paraboloid, cilindar, konus, konoidne površi.
- 2.2.** Neka je  $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ ,  $a < t < b$ , regularna 1 – 1 kriva klase  $C^k$  i  $f > 0$ .
- (a) Dokazati da je slika površi  $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ ,  $a < u < b$ ,  $0 < v < 2\pi$  dobijena rotacijom slike krive  $\alpha$  oko  $z$ -ose.
- (b) Dokazati da je  $r$  regularna elementarna površ.
- (c) Odrediti koordinatne krive površi  $r$  i uglove koje one zaklapaju.
- (d) Odrediti odgovarajuću parametrizaciju ako kriva  $\alpha$  rotira oko  $x$ -ose, odnosno  $y$ -ose.
- (e) Primeri rotacionih površi: sfera, katenoid, torus, jednograni hiperboloid, dvograni hiperboloid, kružni paraboloid, pseudosfera, cilindar, konus.
- 2.3.** Dokazati da je skup rešenja jednačine  $f(x, y, z) = x^5 + x^3 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$  regularna površ i naći njenu tangentnu ravan u proizvoljnoj tački  $(x_0, y_0, z_0)$  površi.
- 2.4.** Dokazati da zapremina tetraedra koji se dobija u preseku koordinatnih osa i tangentne ravni površi  $xyz = a^3$  ne zavisi od izbora tačke površi u kojoj se razmatra tangentna ravan.
- 2.5.** Ispitati da li je površ  $r(u, v) = ((1 + u \sin \frac{v}{2}) \cos v, (1 + u \sin \frac{v}{2}) \sin v, u \cos \frac{v}{2})$ ,  $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$ ,  $-\pi < v < \pi$  regularna. Izračunati normalno vektorsko polje  $n(0, v)$ . Dokazati da je  $\lim_{v \rightarrow -\pi} r(0, v) = \lim_{v \rightarrow \pi} r(0, v)$  i  $\lim_{v \rightarrow -\pi} n(0, v) = -\lim_{v \rightarrow \pi} n(0, v)$ .
- 2.6.** (a) Dokazati da gornja polovina kružnog konusa  $z^2 = x^2 + y^2$  nije regularna površ.
- (b) Dat je konus  $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq 0$ . Odrediti koeficijente prve fundamentalne forme ove površi.
- 2.7.** Dat je jednograni hiperboloid  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ . Parametrizovati ovu površ i naći koeficijente prve fundamentalne forme.
- 2.8.** Neka je  $U = \{(\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$  i  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $f(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$  parametrizacija dela sfere  $\mathbb{S}^2$ .
- (a) Pokazati da su krive (*loksodrome*) na sferi koje zaklapaju konstantan ugao  $\alpha$  sa meridijanima date jednačinama
- $$\ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \pm(\varphi + C) \operatorname{ctg} \alpha, \quad C \in \mathbb{R}.$$
- (b) Izračunati dužinu jedne od tih krivih.
- (c) Izračunati površinu dela jedinične sfere između dva meridijana i dve paralele.
- 2.9.** Data je površ  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ . Odrediti ugao između krivih  $v = u + 1$  i  $v = 3 - u$ .
- 2.10.** Izračunati površinu torusa.
- 2.11.** Dokazati da krive familija  $u_1(v) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}v}$  i  $u_2(v) = C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}v}$  polove uglove između koordinatnih linija površi  $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $u > 0$ .
- 2.12.** (a) Dokazati da su lokalne koordinate na sferi dobijene iz stereografske projekcije konformne, tj. da su ravan i sfera bez tačke konformno ekvivalentne.
- (b) Pokazati da su loksodrome na sferi slike odgovarajućih logaritamskih spirala iz karte pri stereografskoj projekciji.
- 2.13.** Neka je druga fundamentalna forma površi  $f = f(u, v)$  identički jednaka nuli. Dokazati da je površ deo ravni.

**2.14.** Dat je jednograni hiperboloid  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

- (a) Odrediti Gausovu i srednju krivinu.
- (b) Odrediti Kristofelove simbole druge vrste.

**2.15.** Neka je  $\alpha = \alpha(u)$  prirodno parametrizovana kriva čija je krivina  $\kappa = \kappa(u) \neq 0$  i torzija  $\tau = \tau(u) \neq 0$ . Izračunati Gausovu i srednju krivinu tangentne površi  $f(u, v) = \alpha(u) + vT(u), v > 0$ , pri čemu je  $T = T(u)$  tangentni vektor krive  $\alpha$ .

**2.16.** Odrediti geodezijske krivine koordinatnih linija helikoida  $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ .

**2.17.** Neka je  $\gamma$  prirodno parametrizovana kriva čiji trag pripada slici elementarne površi  $r$ . Označimo sa  $\kappa, \kappa_n, \kappa_g$  redom krivinu, normalnu krivinu i geodezijsku krivinu krive  $\gamma$ , sa  $N$  i  $n$  normalno vektorsko polje krive i površi i sa  $\theta$  ugao između njih, duž krive  $\gamma$ . Dokazati:

- (a)  $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ ;
- (b)  $\kappa_n = \kappa \cos \theta$  (u tačkama duž krive gde je vektor  $N$  definisan, tj. gde je  $\kappa \neq 0$ );
- (c) ako je kriva  $\gamma$  u normalnom sečenju (u svim tačkama), tada je  $\kappa_n = \pm \kappa$  i  $\kappa_g = 0$ .

**2.18.** a) Izračunati normalnu krivinu sfere poluprečnika  $R$  u proizvoljnoj tački i u pravcu proizvoljnog tangentnog vektora.

- b) Dokazati da za krivinu  $\kappa$  prirodno parametrizovane krive  $\alpha$  čiji trag leži na jediničnoj sferi poluprečnika  $R$  važi nejednakost  $\kappa \geq \frac{1}{R}$ .

**2.19.** Odrediti geodezijske linije cilindra.

**2.20.** Ako je  $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$  prirodna parametrizacija geodezijske linije na površi  $f = f(u, v)$  za koju je  $E = E(u), F = 0, G = G(u)$ , dokazati da je  $\sqrt{G} \cos \theta = c = \text{const}$  pri čemu je  $\theta$  ugao između geodezijske linije i  $v$ -parametarske krive  $u = \text{const}$ .

**2.21.** Neka je  $f = f(u, v)$  deo površi na kojem su  $u$  i  $v$ -parametarske krive ortogonalne i koeficijenti prve osnovne forme zavise samo od jednog parametra  $u$ . Tada se geodezijske linije uvek mogu naći integracijom, tj. tada važi:

- (a)  $u$ -parametarske krive ( $v = \text{const}$ ) su geodezijske linije.
- (b)  $v$ -parametarske krive ( $u = \text{const} = u_0$ ) su geodezijske linije akko je  $G_u(u_0) = 0$ .
- (c) kriva oblika  $\alpha(u) = r(u, v(u))$  je geodezijska linija akko je  $v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}} du, C = \text{const}$ .

**2.22.** Površ  $f = f(u, v)$  naziva se Liuvilova površ ako je  $E = G = U + V$  i  $F = 0$ , pri čemu je  $U$  funkcija samo po  $u$  i  $V$  funkcija samo po  $v$ . Ako je  $\gamma(s) = f(u(s), v(s))$  prirodno parametrizovana geodezijska linija na ovoj površi, dokazati da je  $U \sin^2 \theta - V \cos^2 \theta = \text{const}$ , pri čemu je  $\theta$  ugao između geodezijske linije i  $u$ -parametarske krive  $v = \text{const}$ .

**2.23.** Data je rotaciona površ  $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ . Dokazati:

- (a) Svaki meridijan ( $u$ -parametarska kriva) je geodezijska linija.
- (b) Paralela ( $v$ -parametarska kriva) je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele.

**2.24.** (a) Dokazati da su koordinatne linije površi bez umbiličkih tačaka linije krivine akko je  $F = 0 = f$ .

- (b) Dokazati da su meridijani i paralele rotacionih površi linije krivine.

**2.25.** Dokazati da su koordinatne linije površi za koju važi  $f \neq 0$  asimptotske linije akko je  $e = 0 = g$ .

**2.26.** Naći glavne krivine, linije krivine i asimptotske krive Eneperove površi  $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$ .

**2.27.** Dokazati da u hiperboličkim tačkama površi postoje tačno dva asimptotska pravca, kao i da su oni simetrični u odnosu na glavne pravce u toj tački.

**2.28.** Odrediti eliptičke, paraboličke i hiperboličke tačke na torusu.

**2.29.** Neka je  $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  elementarna površ i  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$  fiksirana tačka. Označimo sa  $\rho(u, v)$  rastojanje tačke  $r(u, v)$  od tangentne ravni površi  $r$  u tački  $P = r(u_0, v_0)$ .

(a) Dokazati da za tačke  $(u, v)$  koje su u dovoljno maloj okolini tačke  $(u_0, v_0)$  važi

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2}\Pi(u - u_0, v - v_0) + o(\|(u - u_0, v - v_0)\|^2).$$

(Identifikovane su  $(u, v)$ -ravan parametara i tangentna ravan površi u tački  $P$ .)

(b) Dokazati da se za dovoljno malo  $\varepsilon > 0$  skup tačaka površi za koje je  $\rho(u, v) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$  može aproksimirati krivom  $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = 1$ , gde su  $\kappa_1$  i  $\kappa_2$  glavne krivine površi  $r$  u tački  $(u_0, v_0)$ .

(c) Diskutovati koja se kriva dobija u (b), u zavisnosti od tipa tačke  $P$  (eliptička, hiperbolička, parabolička, planarna).

**2.30.** Neka je  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$  prirodno parametrizovana kriva čija slika pripada tragu površi  $r = r(u, v)$ . Posmatrajući  $n(s) = n(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$  duž slike krive  $\alpha$ , da li vektorska polja  $T, S, n$  čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$  duž slike krive  $\gamma$ ? Dokazati formule analogne Frene-Sereovim formulama:

(a)  $T' = \Pi(T, T)n + \kappa_g S;$

(b)  $S' = -\kappa_g T + \Pi(T, S)n;$

(c)  $n' = -\Pi(T, T)T - \Pi(T, S)S.$

**2.31.** Dokazati da su helikoid i katenoid (na odgovarajući način parametrizovani) izometrične površi.

**2.32.** Dokazati da normalna projekcija valjka  $x^2 + y^2 = 1, |z| < 1$  na jediničnu sferu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (bez polova) nije izometrija, ali čuva površine.

**2.33.** (a) Dokazati da su ravan (bez tačke) i konus  $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$  (bez vrha) difeomorfne površi.

(b) Dokazati da su ravan i konus  $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$  lokalno izometrični.

(c) Odrediti rastojanje između tačaka  $A(0, 1, \sqrt{3})$  i  $B(0, -1, \sqrt{3})$  na konusu.