Geometrija 3
Zadaci po kojima se drže vežbe

1 Krive

1.1. Ispitati da li su sledeće parametrizacije regularne:

(a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\pi, \pi)$;

(b) $\beta(t) = (\cos t^3, \sin t^3)$, $t \in (-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$.

1.2. Dokazati da su sledeći skupovi tačaka regularne krive:

(a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$;

(b) $K = \{(t^2, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

1.3. Dokazati da skup $A = \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ nije regularna kriva.

1.4. Dokazati da je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ dovoljan uslov da kriva $F(x, y) = 0$ bude regularna u tački (x_0, y_0). Da li je taj uslov i potreban?

1.5. Parametrizovati i skicirati cikloidu, epicikloidu i hipocikloidu. Da li su ove krive regularne?

1.6. Dokazati da slika Vivijanijeve krive $v(t) = a(1+\cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ pripada preseku sfere i cilindra.

1.7. Izračunati dužinu luka sledećih krivih:

(a) $y = \ln \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{3})$;

(b) $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$ između preseka sa x - osom;

(c) $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $t \in (0, 2)$;

(d) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $t \in (0, \sqrt{2})$;

(e) $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$;

(f) $\rho = a(1 + \cos \theta)$; (kardioida)

(g) $\rho = a\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$. (Arhimedova spirala)

1.8. Naći prirodnu parametrizaciju krivih:

(a) kruga $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$;

(b) heliksa $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;

(c) lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $a > 0$;

(d) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.9. Naći tangentu krive $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1)$ koja je paralelna pravoj $p : 2x - y + 3 = 0$.

1.10. Odrediti presečne tačke i ugao između krivih $x^2 + y^2 = 9$ i $x^2 + y^2 - 6x = 9$.

1.11. Dokazati da je ugao između vektora položaja i tangente logaritamske spirale $\rho = ca^\theta$ ($a > 0$, $c > 0$) konstantan.

1.12. Dokazati da je dužina odsečka, određenog koordinatnim osama, tangentne linije astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, konstantna.

1.13. Naći Freneov reper, krivinu i torziju sledećih krivih:

(a) $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, $r > 0$;

(b) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$.

1.14. Dokazati da vektor $X = \tau T + \kappa B$ (Darbuov vektor) zadovoljava:

$$\begin{aligned} T' &= X \times T \\ N' &= X \times N \\ B' &= X \times B. \end{aligned}$$

1.15. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Ako je $\kappa(s) = 0$, tada je α deo prave. Dokazati.

1.16. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0$. Dokazati da su sledeći stavovi ekvivalentni:

(a) α je ravanska kriva;

(b) B je konstantan vektor;

(c) $\tau(s) = 0$ za sve $s \in I$.

1.17. Dokazati da je sledeća kriva ravanska $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$ i naći ravan u kojoj leži.

1.18. Ako sve tangentne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada slika te krive pripada nekoj pravoj.

1.19. Ako sve normalne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada je slika te krive sadržana u krugu.

1.20. Sferna kriva konstantne krivine je deo kruga. Dokazati.

1.21. Neka je $\alpha(s) : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati da je $[x - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$ jednačina oskulatorne ravni u tački $\alpha(0)$.

1.22. Dokazati da se sve oskulatorne ravni neke regularne krive sa krivinom različitom od nule seku u jednoj tački akko je ta kriva ravanska.

1.23. Dokazati da važe Freneove formule za regularnu krivu $\alpha(t)$, $\kappa \neq 0$ parametrizovanu proizvoljnim parametrom t ($v = s' = ||\alpha'||$):

$$\begin{aligned} T'(t) &= && v\kappa(t)N(t) && \\ N'(t) &= -v\kappa(t)T(t) && && + v\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= && -v\tau(t)N(t). && \end{aligned}$$

1.24. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Dokazati:

(a) $[T, B, B'] = \tau$;

(b) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\tau \neq 0$;

(c) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

1.25. Neka je $\alpha(t)$, $t \in I$, regularna kriva. Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}^3$ tako da je $(\alpha(t) - a) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je $\alpha(t)$ sferna kriva.

1.26. Dokazati da važe sledeće formule za krivu α parametrizovanu proizvoljnim parametrom:

(a) $T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||}$;

(b) $B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||}$;

(c) $N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{||\alpha'|| \, ||\alpha' \times \alpha''||}$

(d) $\kappa = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}$;

(e) $\tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{||\alpha' \times \alpha''||^2}$.

1.27. Neka je kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho = \rho(\theta)$.

(a) Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom $L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta$.

(b) Dokazati da je krivina krive α data sa $\kappa(\theta) = \frac{|2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2|}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1.28. Odrediti ravansku krivu (do na izometrijsku transformaciju) ako je data krivina:

(a) $\kappa(s) = \frac{1}{as+b}$, $a, b \neq 0$;

(b) $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

1.29. Data je kriva $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2}\sin t + 2, -\sqrt{2}\cos t + \sin t + 3)$.

(a) Izračunati krivinu i torziju.

(b) Detaljno opisati krivu.

1.30. Uopštena zavojna linija (heliks)je prostorna kriva čiji tangentni vektor zaklapa konstantan ugao sa fiksiranim nenula vektorom. Prava određena ovim vektorom se naziva osa heliksa. Dokazati da je kriva uopštena zavojna linija akko važi jedan od uslova:

(a) normale su normalne na osu;

(b) binormale grade konstantan ugao sa osom;

(c) $\frac{\kappa}{\tau} = const.$

1.31. Data je kriva α i tačke P i Q van nje. Neka je M_0 tačka krive u kojoj zbir rastojanja $||PM|| + ||MQ||$, $M \in \alpha$ dostiže minimum. Dokazati da je simetrala ugla $\measuredangle PM_0Q$ normalna na tangentu krive u tački M_0.

2 Površi

2.1. (a) Parametrizovati jediničnu polusferu, sferu bez jednog meridijana i sferu bez jedne tačke. Da li su parametrizacije regularne? Da li je cela sfera regularna površ?

(b) Naći jednačinu tangentne ravni na jediničnu sferu u tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2.2. Dokazati da zapremina tetraedra koji se dobija u preseku koordinatnih osa i tangentne ravni površi $xyz = a^3$ ne zavisi od izbora tačke površi u kojoj je se razmatra tangentna ravan.

2.3. Dokazati da je skup rešenja jednačine $f(x, y, z) = x^3 + x^5 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ regularna površ i naći njenu tangentnu ravan u proizvoljnoj tački (x_0, y_0, z_0) površi.

2.4. (a) Dokazati da gornja polovina kružnog konusa $z^2 = x^2 + y^2$ nije regularna površ.

(b) Dat je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$. Odrediti prvu fundamentalnu formu ove površi.

2.5. Neka je $\alpha(u)$ regularna kriva i neka je $\beta(u) \neq 0$ vektorsko polje duž krive α. Odrediti pod kojim uslovima je $f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ regularna elementarna površ. Da li je helikoid pravolinijska površ? Da li je Mebijusova traka pravolinijska površ?

2.6. Neka je $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a < t < b$, regularna $1-1$ kriva klase C^k i $f > 0$.

(a) Dokazati da je slika površi $r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$ dobijena rotacijom slike krive α oko $z-$ose.

(b) Dokazati da je r regularna elementarna površ.

(c) Odrediti koordinatne krive površi r i uglove koje one zaklapaju.

(d) Da li je katenoid rotaciona površ? Da li je torus rotaciona površ? Navesti još neki primer.

2.7. Dat je jednograni hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Parametrizovati ovu površ i naći koeficijente prve fundamentalne forme.

(b) Dokazati da na jednogranom hiperboloidu postoje dve familije mimoilaznih pravih tako da svaka tačka hiperboloida pripada tačno jednoj pravoj iz svake familije.

2.8. Neka je $U = \{(\theta, \varphi) | -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$ i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i

$$f(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

parametrizacija dela sfere $\mathbb{S}^2$.

(a) Pokazati da su krive (*loksodrome*) na sferi koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima date jednačinama

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \pm(\varphi + C)\operatorname{ctg}\alpha, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Izračunati dužinu jedne od tih krivih.

(c) Izračunati površinu dela jedinične sfere između dva meridijana i dve paralele.

2.9. Data je površ $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$. Odrediti ugao između krivih $v = u+1$ i $v = 3-u$.

2.10. Odrediti ugao između krivih $v = 2u$ i $v = -2u$ na površi čija je prva fundamentalna forma data sa $ds^2 = du^2 + 2dv^2$.

2.11. Izračunati površinu torusa.

2.12. Dokazati da krive familija $u_1(v) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ i $u_1(v) = C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}v}$ polove uglove između koordinatnih linija površi $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u > 0$.

2.13. Ispitati da li je površ $r(u, v) = \left((1 + u\sin\frac{v}{2})\cos v, (1 + u\sin\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2}\right)$, $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$ regularna. Izračunati normalno vektorsko polje $n(0, v)$. Dokazati da je $\lim\limits_{v\to-\pi} r(0, v) = \lim\limits_{v\to\pi} r(0, v)$ i $\lim\limits_{v\to-\pi} n(0, v) = -\lim\limits_{v\to\pi} n(0, v)$.

2.14. Odrediti geodezijske krivine koordinatnih linija helikoida $(r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v))$.

2.15. Dat je jednograni hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Naći neku parametrizaciju.

(b) Naći Gauss-ovu i srednju krivinu.

(c) Naći Christoffel-ove simbole druge vrste.

2.16. Neka je druga fundamentalna forma površi $f = f(u, v)$ identički jednaka nuli. Tada je površ deo ravni, dokazati.

2.17. Odrediti geodezijske linije cilindra.

2.18. Neka je $\alpha = \alpha(u)$ prirodno parametrizovana kriva čija je krivina $\kappa = \kappa(u) \neq 0$ i torzija $\tau = \tau(u) \neq 0$. Izračunati Gauss-ovu i srednju krivinu tangentne površi $f(u, v) = \alpha(u) + vT(u), v > 0$, pri čemu je $T = T(u)$ tangentni vektor krive α.

2.19. Ako je $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ prirodna parametrizacija geodezijske linije na površi $f = f(u, v)$ za koju je $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$, dokazati da je $\sqrt{G}\cos\theta = c = const$ pri čemu je θ ugao izmedju geodezijske linije i v-parametarske krive $u = const$.

2.20. Neka je $f = f(u, v)$ deo površi na kojem su u i v-parametarske krive ortogonalne i koeficijenti prve osnovne forme zavise samo od jednog parametra. Tada se geodezijske linije uvek mogu naći integracijom, tj. tada važi:

(a) u-parametarske krive ($v = const$) su geodezijske linije.

(b) v-parametarske krive ($u = const = u_0$) su geodezijske linije akko je $G_u(u_0) = 0$.

(c) kriva oblika $\alpha(u) = r(u, v(u))$ je geodezijska linija akko je $v = \pm\int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}}du$, $C = const$.

2.21. Površ $f = f(u, v)$ naziva se Liouville-ova površ ako je $E = G = U + V$ i $F = 0$, pri čemu je U funkcija samo po u i V funkcija samo po v. Ako je $\gamma(s) = f(u(s), v(s)$ prirodno parametrizovana geodezijska linija na ovoj površi, dokazati da je $U \sin^2\theta - V \cos^2\theta = c$ ($C = const$), pri čemu je θ ugao izmedju geodezijske linije i u-parametarske krive $v = const$.

2.22. Data je rotaciona površ $r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$. Dokazati:

(a) Svaki meridijan (u-parametarska kriva) je geodezijska linija.

(b) Paralela (v-parametarska kriva) je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele.

2.23. Dokazati da su koordinatne linije parametrizacije linije krivine akko je $F = 0 = f$.

2.24. Dokazati da su meridijani i paralele rotacionih površi linije krivine.

2.25. Naći glavne krivine, linije krivine i asimptotske krive površi $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

2.26. Odrediti eliptičke, paraboličke i hiperboličke tačke na torusu.

2.27. Dokazati da su koordinatne linije parametrizacije asimptotske linije akko je $e = 0 = g$.

2.28. Neka je $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ prirodno parametrizovana kriva čija slika pripada tragu površi $r = r(u, v)$. Posmatrajući $n(s) = n(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ duž slike krive α, da li vektorska polja T, S, n čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ duž slike krive γ? Dokazati formule analogne Frenet-Serret-ovim formulama:

(a) $T' = II(T, T)n + \kappa_g S$;

(b) $S' = -\kappa_g T + II(T, S)n$;

(c) $n' = -II(T, T)T - II(T, S)S$.

3 Hiperbolička geometrija

3.1. Naći Cristoffel-ove simbole i geodezijske linije (prave) u poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije, pri čemu je $\mathcal{L}^2 = \{(u, v) | v > 0\}$ površ sa metrikom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$.

3.2. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ data je prava $a : v > 0$ i tačka A svojim polarnim koordinatama $A(\rho, \theta)$, $\theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Odrediti rastojanje izmedju tačke A i prave a.

(b) Naći ugao paralelnosti $\Pi(AB)$ duži AB.

3.3. Dokazati da u poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ važi:

(a) refleksija u odnosu na $u = a$ je izometrija;

(b) translacija paralelno $u-$osi je izometrija;

(c) inverzija u odnosu na $u^2 + v^2 = r^2$ je izometrija;

(d) $\tau_\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ je izometrija;

(e) naći rastojanje izmedju prave $a : u^v + v^2 = 1$ i $\tau_\lambda(a)$.

3.4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ date su prave $a : x^2 + y^2 = 1$, $b : x^2 + y^2 = 7$, $c : (x - 2)^2 + y^2 = 3$, $d : (x + 2)^2 + y^2 = 3$. Dokazati da ove prave odredjuju Sakerijev četvorougao i odrediti njegov oštar ugao.

3.5. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ odrediti jednačinu hiperboličkog kruga sa centrom u tački $(0, a)$ i poluprečnikom R (to je i euklidski krug).

3.6. Dokazati da preslikavanje $z = \frac{1+iw}{1-iw}$ predstavlja izometriju izmedju poluravanskog modela $\mathcal{L}^2$ i Poenkareovog disk modela hieprboličke ravni $\mathcal{D}^2$, pri čemu je $\mathcal{D}^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ površ sa metrikom $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$.

3.7. U Poenkareovom disk modelu $\mathcal{D}^2$ date su tačke $A(\frac{1}{4}, 0)$ i $B(0, \frac{3}{4})$. Odrediti jednačinu prave AB.