Automatsko rezonovanje – beleške sa predavanja Rezonovanje u logici prvog reda sa jednakošću

Filip Marić

*Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Proletnji semestar 2018.

Pregled

Poseban tretman jednakosti

- Do sada je simbol $=$ bio tretiran kao bilo koji drugi predikatski simbol.

Primer

Za očekivati je da je formula

$$\forall x\ y\ z.\ x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

valjana, međutim, ona to nije. Po do sada izloženom, ova formula se ni po čemu ne razlikuje od formule

$$\forall x\ y\ z.\ p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(f(x), f(z)),$$

za koju je jasno da nije valjana (npr. netačna je kada se f interpretira identičkom funkcijom, a p nekom netranzitivnom relacijom).

Poseban tretman jednakosti

- Ipak, uloga jednakosti je centralna u matematici tako da je poželjno posmatrati samo one interpretacije u kojima se simbol '$=$' interpretira upravo relacijom jednakosti.
- Iako se prethodno opisane procedure jednostavno modifikuju tako da u obzir uzmu samo ovakve modele, moguća je i izrada efikasnijih procedura, specijalizovanih za rezonovanje u prisustvu jednakosti.

Normalne interpretacije

Definicija

Ako jezik $\mathcal{L}$ sadrži simbol $=$, za $\mathcal{L}$-strukturu (model, interpretaciju) kažemo da je normalna ako se simbol $=$ interpretira relacijom jednakosti odgovarajućeg domena.

Pregled

Aksiome jednakosti

S obzirom da je relacija jednakosti relacija ekvivalencije, u svim normalnim modelima naredne formule su tačne.

refleksivnost	:	$\forall x.\ x = x$
simetričnost	:	$\forall x\ y.\ x = y \Leftrightarrow y = x$
tranzitivnost	:	$\forall x\ y\ z.\ x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Takođe, za svaki n-arni funkcijski simbol f odnosno svaki n-arni predikatski simbol p tačne su i formule kongruentnosti

$$\forall x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n.\ x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

$$\forall x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n.\ x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow p(y_1, \dots, y_n)$$

Navedene formule nazivamo aksiomama jednakosti. Oznaka $eqax(\mathcal{L})$ označava aksiome jednakosti jezika $\mathcal{L}$.

- Svaki normalni model zadovoljava aksiome jednakosti.
- Međutim, postoje modeli koji nisu normalni, a opet zadovoljavaju aksiome jednakosti.

Primer

Ukoliko se jezik $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, =\}$ *interpretira uobičajeno na skupu prirodnih brojeva, a simbol* $=$ *relacijom* $x \equiv y (mod\ 2)$*, model zadovoljava aksiome jednakosti, a nije normalan.*

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

Formula F jezika $\mathcal{L}$ ima normalan model akko F i $eqax(\mathcal{L})$ imaju model.

Dokaz

Ako F ima normalan model on je model u kome su i F i $eqax(\mathcal{L})$ tačne.
Obratno, ako postoji model za F i $eqax(\mathcal{L})$ može se definisati relacija $\sim$ na domenu D takva da je $x \sim y$ akko $x =_{\mathcal{M}} y$, tj. kada su x i y jednaki po interpretaciji M. Pošto u M važe $eqax(\mathcal{L})$ relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Traženi normalni model se može jednostavno izgraditi nad klasama ekvivalencije relacije $\sim$ kao domenom.

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

- *Formula F je zadovoljiva u nekom normalnom modelu akko je formula $F \wedge eqax(\mathcal{L})$ zadovoljiva.*
- *Formula F važi u svim normalnim modelima akko je formula $eqax(\mathcal{L}) \Rightarrow F$ valjana.*

Smanjenje broja aksioma jednakosti

- Prethodni stavovi ostaju na snazi i ako se broj aksioma jednakosti smanji.
- Npr. aksioma simetričnosti se može dokazati iz aksiome refleksivnosti i kongruentnosti za jednakost.

Pregled

Sintaksno-deduktivni sistemi za jednakost — Birkhofova pravila

$$\frac{}{\Delta \vdash t = t}\ \text{refl} \qquad \frac{\Delta \vdash s_1 = t_1 \quad \dots \quad \Delta \vdash s_n = t_n}{\Delta \vdash f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n)}\ \text{cong}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash t = s}\ \text{sym} \qquad \frac{s = t \in \Delta}{\Delta \vdash s = t}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t \quad \Delta \vdash t = u}{\Delta \vdash s = u}\ \text{trans} \qquad \frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash (s = t)[x \to a]}\ \text{inst}$$

Birkofova teorema

Teorema

$\Delta \models s = t$, tj. jednačina $s = t$ važi u svim normalnim modelima skupa jednačina Δ akko i samo ako $\Delta \vdash s = t$, tj. ako se $s = t$ može izvesti iz Δ primenom Birkofovih pravila.

Pregled

Odlučivanje baznih jednakosti

- Prilikom primene Birkofovih pravila problem predstavlja pravilo instancijacije (nije jasno kako odlučiti koju instancijaciju $x \to t$ upotrebiti).
- Ukoliko su sve jednakosti bazne (nemaju slobodnih promenljivih), onda pravilo instancijacije nije potrebno koristiti, što čini ovaj fragment odlučivim.
- Procedure odlučivanja za bazne jednakosti se obično zasnivaju na kongruentnom zatvorenju.

Kongruentne relacije

Definicija

Relacija $\sim$ *je kongruencija na skupu D u odnosu na jezik* $\mathcal{L}$ *ako je relacija ekvivalencije na domenu D saglasna (kongruentna) sa svim funkcijskim simbolima jezika* $\mathcal{L}$*, tj. za svako f važi da ako* $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$*, tada* $f(s_1, \ldots, s_n) \sim f(t_1, \ldots, t_n)$*.*
Kongruentno zatvorenje relacije je najmanja kongruencija koja sadrži polaznu relaciju.

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Teorema

Neka su s_i, t_i, s i t bazni termovi i neka je D skup svih ovih termova i svih njihovih podtermova. Neka je $\sim$ kongruentno zatvorenje relacije $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$. Tada

$$\{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\} \models s = t$$

akko

$$\{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\} \vdash s = t$$

akko

$$s \sim t$$

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Dokaz

Prva i druga stavka su ekvivalentne na osnovu Birkhofove teoreme. Iz druge stavke sledi treća . . . . Iz treće stavke sledi druga . . . .

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

- Postupak se zasniva na postepenom proširenju relacije kongruencije počevši od prazne relacije i dodavanjem jedne po jedne jednakosti.
- Kongruencije se predstavljaju klasama ekvivalencije (korišćenjem *union-find* strukture).
- Prilikom spajanja klasa vrši se analiza termova u kojima elementi tih klasa učestvuju i na osnovu kongruentnosti spajaju se odgovarajući termovi. Ukoliko se npr. klase koje sadrže termovi s i t spajaju, a postoje npr. termovi $f(s, g(t))$ i $f(t, g(s))$, potrebno je spojiti i klase kojima oni pripadaju.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

- Neka je $E = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ skup baznih jednakosti. Neka je T skup termova zatvoren za podtermove koji sadrži sve bazne termove s_i, t_i (i možda još neke druge termove i njihove podtermove).
- Neka $use(t)$ označava skup svih termova skupa D čiji je podterm term t. Ovi skupovi se mogu unapred izračunati.
- Neka $find(t)$ vraća kanonskog predstavnika klase ekvivalencije kojoj pripada term t.
- Neka $union(s, t)$ spaja klasu ekvivalencije terma s i klasu ekvivalencije terma t.
- Neka $cong(s, t)$ označava da je s oblika $f(s_1, \ldots, s_n)$ i t oblika $f(t_1, \ldots, t_n)$ pri čemu je $find(s_i) = find(t_i)$.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

function cc(E, T)
begin
  foreach $t \in T$ $find(t) := t$.
  foreach $s_i = t_i \in E$
    if(find(s_i) $\neq$ find(t_i))
      $merge(s_i, t_i)$
end

function merge(s, t)
begin
  $T_s = \bigcup\{use(u) \mid find(u) = find(s)\}$
  $T_t = \bigcup\{use(u) \mid find(u) = find(t)\}$
  union(s, t)
  foreach $s' \in T_s, t' \in T_t$
    if (find(s') $\neq$ find(t') $\wedge$ cong(s', t'))
    merge(s', t')
end

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja — primer

Primer

Odredimo kongruentno zatvorenje za skup jednakosti $E = \{x = y, y = z\}$ *i skup termova* $\{x, y, z, f(x), f(z)\}$.
use je određen sa

$$\{x \mapsto \{f(x)\}, y \mapsto \{\}, z \mapsto \{f(z)\}, f(x) \mapsto \{\}, f(z) \mapsto \{\}\}$$

Krećemo od jednočlanih klasa $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}\}$, *tj. find je određen sa:*

$$\{x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$$

Primer

- *merge*(x, y) – $T_x = \{f(x)\}$, $T_y = \{\}$. *Nakon union*(x, y), *dobijaju se klase* $\{\{x, y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. *Petlja je prazna.*
- *merge*(y, z) – $T_y = \{f(x)\}$, $T_z = \{f(z)\}$. *Nakon union*(y, z), *dobijaju se klase* $\{\{x, y, z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. $f(x)$ *i* $f(z)$ *su kongruentni pa se poziva:*
  - *merge*$(f(x), f(z))$ – $T_{f(x)} = \{\}$, $T_{f(z)} = \{\}$. *Nakon union*$(f(x), f(z))$ *dobijaju se klase* $\{\{x, y, z\}, \{f(x), f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(x)\}$. *Petlja je prazna.*

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF

- Razmatrajmo validnost formula oblika $\forall x_1 \dots x_n.\ P(x_1, \dots, x_n)$, gde P ne sadrži drugih predikatskih simbola osim $=$ (funkcijski simboli se mogu javljati).
- Prethodni fragment se ponekad naziva EUF (Equality with Uninterpreted Functions).
- Negacijom i skolemizacijom se dobija bazna formula oblika $P'(c_1, \dots, c_n)$.
- Prevođenjem u DNF (ili primenom naprednijih tehnika poput SMT), ispitivanje zadovoljivosti se svodi na ispitivanje zadovoljivosti konjunkcija oblika

$$s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \wedge s'_1 \neq t'_1 \wedge \dots s'_{n'} \neq t'_{n'}$$

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF

- Odeđuje se kongruentno zatvorenje za skup jednakosti $E = \{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\}$ i skup termova T dobijen od $\{s_1, t_1, \dots s_n, t_n, s'_1, t'_1, \dots, s'_{n'}, t'_{n'}\}$ i svih njihovih podtermova.
- Konjunkcija je zadovoljiva akko je $find(s'_i) \neq find(t'_i)$, za svako $1 \leq i \leq n'$.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Pokažimo da formula

$$\forall x.\ f^3(x) = x \ \wedge\ f^5(x) = x \ \Rightarrow\ f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima, pri čemu je $f^i(x)$ skraćeni zapis za $f(f(\ldots f(x)))$, gde se f primenjuje i puta. Negiranjem polazne formule i skolemizacijom dobija se formula

$$f^3(c) = c \wedge f^5(c) = c \wedge f^2(c) \neq c.$$

Posmatrajmo izvršvanje Nelson-Oppen-ovog algoritma. Skup jednakosti $E = \{f^3(c) = c, f^5(c) = c\}$, a skup termova $T = \{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)$.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer I

- *merge*$(f^3(c), c)$ – $T_{f^3(c)} = \{f^4(c), f^5(c)\}$, $T_c = \{f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$. Nakon izvršetka *union*$(f^3(c), c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^4(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^4(c)$ i $f(c)$ su kongruentni pa se poziva:
  - *merge*$(f^4(c), f(c))$ – $T_{f^4(c)} = \{f^5(c)\}$, $T_{f(c)} = \{f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$. Nakon izvršetka *union*$(f^4(c), f(c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^5(c)$ i $f^2(c)$ su kongruentni pa se poziva:
    - *merge*$(f^5(c), f^2(c))$ – $T_{f^5(c)} = \{\}$, $T_{f^2(c)} = \{f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$. Nakon izvršetka *union*$(f^4(c), f(c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c), f^5(c)\}\}$. Petlja je prazna.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer II

Ostali parovi iz $T_{f^4(c)}$ i $T_{f(c)}$ ili nisu kongruentni ili su već u istoj klasi.

- $merge(f^5(c), c)$ — $T_{f^5(c)} = \{f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$, $T_c = \{f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$. Nakon $union(f^5(c), c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f^2(c), f^3(c), f^5(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}\}$. Termovi $f^3(c)$ i $f(c)$ su kongruentni pa se poziva
  - $merge(f^3(c), f(c))$ – $T_{f^3(c)} = \{f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$, $T_{f(c)} = \{f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$. Nakon $union(f^3(c), f(c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}\}$. Svi termovi su istoj klasi pa nema daljih rekurzivnih poziva.

Svi termovi su istoj klasi pa nema daljih rekurzivnih poziva.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Dakle, pošto negirana formula sadrži različitost $f^2(c) \neq f(c)$, *a na osnovu kongruentnog zatvorenja važi* $f^2(c) = f(c)$, *ona je nezadovoljiva, te polazna formula*

$$\forall x.\ f^3(x) = x \ \wedge\ f^5(x) = x \ \Rightarrow\ f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima.

Pregled

Pojam prezapisivanja

- Dokazi jednakosti oblika $s = t$ se (neformalno) obično sprovode tako što što se započne od terma s, a onda se na njega (odnosno njegove podtermove) primenjuju transformacije na osnovu datih jednakosti $s_i = t_i$, vršeći pri tom pogodne instancijacije.
- Transformacije se obično vrše tako da se dobije jednostavniji term (npr. $x \cdot x^{-1}$ se zamenjuje sa 1 — zamena u suprotnom smeru je obično neintuitivna).
- Pojam jednostavnijeg terma je suptilan. Npr. $(x + y) \cdot (w + z)$ je kraći od $xw + xz + yw + yz$ ali se drugi smatra jednostavnijim jer omogućava dalja skraćivanja.
- Korišćenje transformacija termova na osnovu usmerenih jednakosti naziva se prezapisivanje.

Definicija

Pravilo prezapisivanja termova je usmerena jednakost oblika $l \to r$ gde su l i r termovi takvi da l nije promenljiva i r ne uvodi nove slobodne promenljive u odnosu na l (skup slobodnih promenljivih terma r je podskup skupa slobodnih promenljivih terma l).

Definicija

Ako je $l \to r$ pravilo prezapisivanja termova kažemo da se term t na osnovu ovog pravila prezapisuje u term t' ako postoji podterm terma t koji je instanca terma l, takav da se njegovom zamenom instancom terma r (pri istoj instancijaciji) dobija term t'.

Definicija

Sistem prezapisivanja R termova je skup pravila prezapisivanja termova. Kažemo da $t \to_R t'$ ako postoji neko pravilo $l \to r \in R$ kojim se t prezapisuje u t'. Relacija $\to_R$ je relacija prezapisivanja termova.

Primer primene prezapisivanja

Primer

Prezapisivanjem terma $(a + a) + (b + b)$ *na osnovu pravila* $x + x \to 2x$ *mogu se dobiti* $2a + (b + b)$ *i* $(a + a) + 2b$. *Term* $2a + 2b$ *se može dobiti nakon dva koraka.*

- Prezapisivanje ima svoje teoretsko opravdanje (zasnovano na Birkhofovoj teoremi).
- Svaki lanac prezapisivanja se može konvertovati u formalni dokaz u Birkhofovom sistemu.
- Važi i obratno.

Teorema

Ako je $\rightarrow_R$ relacija dobijena na osnovu sistema prezapisivanja R, a $\leftrightarrow^*_R$ njeno simetrično, refleksivno i tranzitivno zatvorenje, tada za svaka dva terma s i t važi $s \leftrightarrow^*_R t$ ako i samo ako $R \models s = t$.

Kanonski sistemi

- Ponekad, sistemi prezapisivanja imaju svojstvo da se svi ,,ekvivalentni" termovi svode na istu normalnu formu — term na koji dalje nije moguće primeniti ni jedno pravilo.
- Ovakvi sistemi se nazivaju kanonski ili konvergentni.
- U slučaju jednakosnog rezonovanja na osnovu datih jednakosti E, obično se kaže da su s i t ekvivalentni ako $E \models s = t$.
- Ovakvi sistemi se mogu koristiti kao procedure odlučivanja ekvivalentnosti dva terma u odnosu na dati sistem jednakosti (proveri se da li se nakon ,,normalizacije" dobija ista normalna forma).

Primer kanonskog sistema

Primer

$$\{m+0 = m, 0+n = n, m+S(n) = S(m+n), S(m)+n = S(m+n)\}$$

Utvrđivanje jednakosti dva terma na osnovu ovog sistema ne zahteva nikakvu kreativnost. Npr.

$$S(0) + S(S(0)) \to S(0 + S(S(0))) \to S(S(S(0)))$$

Takođe,

$$\begin{aligned} S(0) + S(S(0)) \quad \to \quad & S(S(0) + S(0)) \to S(S(S(0) + 0)) \to \\ & S(S(S(0 + 0))) \to S(S(S(0))) \end{aligned}$$

Naravno, efikasnost zavisi od redosleda primene pravila, međutim, normalna forma do koje će se stići ne zavisi.

Primeri ne-kanonskih sistema — nezaustavljanje

Primer

Neka je dato pravilo $x + y \to y + x$. Term $1 + 2$ nema normalnu formu. Zaista, postoji izvođenje:

$$1 + 2 \to 2 + 1 \to 1 + 2 \to 2 + 1 \to \dots$$

Kaže se da sistem nema svojstvo zaustavljanja.

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x + 0 \to x, s(x + y) \to x + s(y)\}$$

Term $s(x + 0)$ se primenom prvog pravila može prezapisati u $s(x)$, a primenom drugog pravila u $x + s(0)$. Nijedan od ova dva terma nije moguće dalje prezapisivati.

Dobijene normalne forme nisu jednake. Kaže se da sistem nema svojstvo konfluentnosti.

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x \cdot (y+z) \to x \cdot y + x \cdot z, (x+y) \cdot z \to x \cdot z + y \cdot z\}$$

$$\begin{array}{rcl} (a+b)\cdot(c+d) & \to & a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) \\ & \to & (a\cdot c + a\cdot d) + b\cdot(c+d) \\ & \to & (a\cdot c + a\cdot d) + (b\cdot c + b\cdot d) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (a+b)\cdot(c+d) & \to & (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ & \to & (a\cdot c + b\cdot c) + (a+b)\cdot d \\ & \to & (a\cdot c + b\cdot c) + (a\cdot d + b\cdot d) \end{array}$$

Apstraktni sistemi za prezapisivanje

- Najznačajni sistemi za prezapisivanje su sistemi za prezapisivanje termova.
- Ipak, ponekad se posmatraju opštiji sistemi, tzv. apstraktni sistemi za prezapisivanje.
- Relacija prezapisivanja R se posmatra na proizvoljnom skupu X (ne obavezno skupu termova) i obično se zapisuje infiksno $x \to y$. Ova relacija je apstraktno data i ne definiše se na osnovu sistema prezapisivanja.
- Oznaka $\to^+$ označava tranzitivno zatvorenje relacije $\to$, oznaka $\to^*$ njeno refleksivno i tranzitivno zatvorenje, dok oznaka $\leftrightarrow^*$ označava njeno simetrično, refleksivno i tranzitivno zatvorenje.

Zaustavljanje

Definicija

Relacija $\rightarrow$ *je zaustavljajuća (dobro zasnovana) ako ne postoji beskonačan lanac* $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \ldots$.

Oblici konfluentnosti

Definicija

- *Relacija* $\rightarrow$ *ima* *svojstvo dijamanta* *ako kada* $x \rightarrow y$ *i* $x \rightarrow y'$ *tada postoji* z *tako da* $y \rightarrow z$ *i* $y' \rightarrow z$.
- x *i* y *su* *spojivi* *što označavamo sa* $x \downarrow y$ *ako postoji* z *tako da* $x \rightarrow^* z$ *i* $y \rightarrow^* z$.
- *Relacija je* *konfluentna* *ako kada* $x \rightarrow^* y$ *i* $x \rightarrow^* y'$ *tada* $y \downarrow y'$. *Ekvivalentno,* $\rightarrow^*$ *ima svojstvo dijamanta.*
- *Relacija je* *slabo konfluentna* *ako kada ako kada* $x \rightarrow y$ *i* $x \rightarrow y'$ *tada* $y \downarrow y'$.
- *Relacija ima* *Čerč-Roserovo* *svojstvo ako kada god* $x \leftrightarrow^* y$, *tada postoji* $x \downarrow y$.

Oblici konfluentnosti

Stav

- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je slabo konfluentna.*
- *Ako je relacija konfluentna ona je slabo konfluentna.*
- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je konfluentna.*
- *Relacija ima Čerč Roserovo svojstvo akko je konfluentna.*

Oblici konfluentnosti

Slabo konfluentna relacija ne mora biti konfluentna.

Primer

Relacija $b \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b, c \rightarrow d$ *je slabo konfluentna, ali nije konfluentna.*

Ipak, važi naredna teorema.

Teorema (Njuman)

Ako je relacija $\rightarrow$ *zaustavljajuća i slabo konfluentna, ona je i konfluentna.*

Ispitivanje zaustavljanja

- Jedan od fundamentalnih problema je kako za dati sistem prezapisivanja termova utvrditi da li je zaustavljajući.
- Problem ispitivanja zaustavljanja je neodlučiv!
- Osnovni metod je pronalaženje dobro zasnovanog uređenja $\succ$ takvog da iz $t \rightarrow_R t'$ sledi da $t \succ t'$.
- Još je bolje posmatrati dobro-zasnovano $\succ$ uređenje takvo da za svako pravilo $l \rightarrow r$ važi $l \succ r$. Međutim, da bi se iz ovoga moglo garantovati zaustavljanje potrebno je da uređenje $\succ$ ima i dodatna svojstva data u sledećoj definiciji.

Problemi poređenja po veličini

- Problem kod obezbeđivanja zaustavljanja predstavljaju pravila poput $(x \cdot y) \cdot z \to x \cdot (y \cdot z)$ i $x \cdot (y + z) \to x \cdot y + x \cdot z$ jer se u njima veličina terma sa desne strane ne menja.
- Ovo ukazuje da samo poređenje veličine termova nije dobar pristup.

Uređenje svođenja

Definicija

Relacija $\succ$ je uređenje prezapisivanja ako je tranzitivno, irefleksivno i zatvoreno u odnosu na instancijacije i kongruencije, tj.

- *irefleksivno – Ni za jedan term t ne važi $t \succ t$,*
- *tranzitivno – Ako je $s \succ t$ i $t \succ u$, tada $s \succ u$.*
- *stabilno – Ako je $s \succ t$ tada je $s[x \to t'] \succ t[x \to t']$.*
- *monotono – Ako je $s_i \succ t_i$ za neko i, tada $f(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \succ f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$.*

Dobro zasnovana uređenja prezapisivanja nazivaju se uređenja svođenja.

Uređenja svođenja

Lema (Manna, Ness)

Ako je $\succ$ uređenje svođenja i za svako $l \to r \in R$ važi $l \succ r$, tada je $\to_R$ zaustavljajuća.

Dokaz

Dovoljno je dokazati da iz $s \to_R t$ sledi $s \succ t$ — pošto je $\succ$ dobro zasnovano tvrđenje sledi. Iz $s \to_R t$ sledi da postoji $l \to r \in R$ i instanca $\bar{l}$ terma l koja je podterm terma s, takva da kada se on zameni odgovarajućom instancom $\bar{r}$ terma r dobija se term t. Pošto je $l \succ r$, na osnovu svojstva stabilnosti važi da je $\bar{l} \succ \bar{r}$. Na osnovu uzastopne primene svojstva monotonosti dobija se i da je $s \succ t$.

Uređenja pojednostavljivanja

Specijalnu vrstu uređenja svođenja čine uređenja pojednostavljivanja.

Definicija

Relacija $\succ$ je uređenje pojednostavljivanja ako je irefleksivno, tranzitivno, stabilno, monotono i ima sledeće svojstvo podtermova:

- *svojstvo podtermova* – $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ t_i$.

Stav

Deršovic Svako uređenje pojednostavljivanja je dobro uređenje te je i uređenje svođenja.

Rekurzivna uređenja staze

- U mnogim slučajevima se uređenja definišu induktivno nad strukturom termova što ih čini monotonim i stabilnim.
- Često je pristup da se prvo izgradi uređenje $\succeq$ na skupu svih funkcijskih simbola jezika $\mathcal{L}$, a da se zatim ono upotrebi kako bi se izgradilo uređenje pojednostavljivanja na skupu termova.

Rekurzivna uređenja staze

- Da bi dobijena uređenja bila uređenja pojednostavljivanja, potrebno je da zadovoljavaju svojstva podtermova, prvo tako što se proverava je da li je eventualno jedan od njih podterm drugoga.
- Ukoliko se utvrdi da nijedan od termova nije podterm drugoga, tada se njihov odnos određuje na osnovu njihovih vodećih funkcijskih simbola.
- Term sa ,,većim" vodećim simbolom se proglašava većim (uz određene uslove za argumente), dok se u slučaju jednakih vodećih simbola, prelazi na poredenje nizova argumenata.
- Uređenja izgrađena na ovaj način se nazivaju uređenjima rekurzivne staze (recursive path orderings).
- Primeri takvih konstrukcija su uređenje multiskup staze i uređenje leksikografske staze.

Definicija

Neka je data signatura $\mathcal{L}$, i neka je $\succeq$ (kvazi)uređenje skupa funkcijskih simbola Σ. Uređenje leksikografkse staze (lexicographic path ordering) $>_{lpo}$ se definiše rekurzivno sledećim skupom pravila:

1. $$\frac{\exists i.\ s_i \geq_{lpo} t}{f(s_1,\dots,s_m) >_{lpo} t}$$
2. $$\frac{f \succ g, \quad \forall i.\ f(s_1,\dots,s_m) \geq_{lpo} t_i}{f(s_1,\dots,s_m) >_{lpo} g(t_1,\dots,t_n)}$$
3. $$\frac{f \approx g, \quad \forall i.\ f(s_1,\dots,s_m) \geq_{lpo} t_i, \quad (s_1,\dots,s_m) >^{lex}_{lpo} (t_1,\dots,t_n)}{f(s_1,\dots,s_m) >_{lpo} g(t_1,\dots,t_n)}$$
4. $$\frac{}{t \geq_{lpo} t}$$
5. $$\frac{v \in Vars(t) \quad t \neq v}{t >_{lpo} v}$$

Uređenje leksikografske staze

Stav

Svako uređenje leksikografske staze je uređenje pojednostavljivanja, pa samim tim i uređenje svođenja.

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Korišćenjem uređenja leksikografske staze pokažimo da je zaustavljajući sistem

$$\begin{aligned} x + 0 &\rightarrow x \\ -0 &\rightarrow 0 \\ -(x + y) &\rightarrow (-x) + (-y) \end{aligned}$$

Neka je kvazi uređenje simbola $- \succ + \succ 0$.

Primer

Tada je:

- $x + 0 >_{lpo} x$ *na osnovu pravila 5. jer je* $x \in Var$
- $-0 >_{lpo} 0$ *na osnovu 1. jer je na osnovu 4.* $0 \geq_{lpo} 0$
- $-(x + y) >_{lpo} (-x) + (-y)$ *na osnovu pravila 2. jer je* $- \succ +$ *i pošto je, kao prvo,* $-(x + y) \geq_{lpo} -x$ *i pošto je, kao drugo,* $-(x + y) \geq_{lpo} -y$. *Prvo zaista važi na osnovu pravila 3. ukoliko je* $x + y >_{lpo}^{lex} x$ *a ovo je ispunjeno jer je* $x + y >_{lpo} x$ *na osnovu pravila 5. Na isti način se pokazuje i drugi uslov.*

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Zaustavljanje pravila

$$(x \cdot y) \cdot z \to x \cdot (y \cdot z)$$

se može pokazati uređenjem leksikografske staze. Zaista na osnovu pravla 3. treba pokazati da je $(x \cdot y, z) >_{lpo}^{lex} (x, y \cdot z)$ *što je ispunjeno jer je* $x \cdot y >_{lpo} x$ *na osnovu pravila 5.*

- Problem ispitivanja konfluentnosti je u opštem slučaju neodlučiv.
- Ipak, postoje specijalni slučajevi koji su odlučivi:

Stav

- *Pitanje konfluentnosti baznih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*
- *Pitanje konfluentnosti zaustavljajućih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*

- Naglasimo da zaustavljanje nije neophodno za konfluentnost:

Primer

Sistem $R = \{a \to b, b \to a, a \to c\}$ *je konfluentan, ali nije zaustavljajući.*

Kričnì parovi

Definicija (Kritični par)

Neka su $l_1 \to r_1$ *i* $l_2 \to r_2$ *dva pravila koja nemaju zajedničkih promenljivih (ovo se može uvek postići preimenovanjem). Neka je* l_1' *podterm terma* l_1 *koji nije promenljiva i neka je* θ *najopštiji unifikator termova* l_1' *i* l_2*. Term* $l_1[l_1' \to \theta(l_2)]$ *određuje kritični par* $\langle \theta(r_1), \theta(l_1)[\theta(l_1') \to \theta(r_2)] \rangle$.

Primer

Neka je $l_1 \to r_1 \equiv s(x + y) \to x + s(y)$, *a* $l_2 \to r_2 \equiv x + 0 \to x$. *Podterm* $l_1' \equiv x + y$ *se može unifikovati sa* $x + 0$ *unifikatorom* $\theta = \{y \mapsto 0\}$. *Term* $s(x + 0)$ *određuje kritični par* $\langle x + s(0), s(x) \rangle$.

Knut-Bendiksova teorema

Značaj kritičnih parova dolazi iz sledeće teoreme:

Teorema

Sistem za prezapisivanje je lokalno konfluentan ako i samo ako su mu svi kritični parovi spojivi tj. ako važi $u_1 \downarrow u_2$, *za svaki kritični par* $\langle u_1, u_2 \rangle$

Provera kritičnih parova i ispitivanje konfluentnosti

- Da bi se otkrili svi kritični parovi datog sistema za prezapisivanje, svako pravilo se kombinuje sa svakim drugim (uključujući i svoju preimenovanu verziju).
- Pošto u slučaju konačnog sistema za prezapisivanje termova kritičnih parova ima konačno mnogo, da bismo utvrdili da li je sistem lokalno konfluentan, dovoljno je ispitati povezivost konačno mnogo parova termova.
- U slučaju zastavljajućeg sistema, povezivost kritičnih parova se efektivno može ispitati što daje proceduru odlučivanja za pitanje konfluentnost konačnih, zaustavljajućih sistema za prezapisivanje termova.

Knut-Bendiksova procedura upotpunjavanja

- Iako se ispitivanjem kritičnih parova ponekad ustanovi da određeni sistem za prezapisivanje termova R nije konfluentan, u nekim slučajevima se, dodavanjem određenih pravila, sistem može učiniti konfluentnim.
- Neka je $\langle u_1, u_2 \rangle$ kritični par koji nije poveziv, tj. postoje različite normalne forme $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ termova u_1 i u_2.
- Jednakost $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ je posledica sistema R jer je $\bar{u}_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R \bar{u}_2$ i zbog toga dodavanje pravila $\bar{u}_1 \rightarrow \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_1$ ne menja odgovarajuću jednakosnu teoriju.
- U ovom proširenom sistemu, par $\langle u_1, u_2 \rangle$ postaje poveziv.
- Da bi sistem ostao zaustavljajući, potrebno je da je $\bar{u}_1 \succ \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \succ \bar{u}_1$ u odgovarajućem uređenju svođenja $\succ$.

if ($\exists (s = t) \in E \wedge s \neq t \wedge s \not> t \wedge t \not> s$)
    return fail;
$R_0 = \{l \to r \mid (l = r) \in E \cup E^{-1} \wedge l > r\}$
do
    $R_{i+1} = R_i$
    forall ($\langle u_1, u_2 \rangle \in CP(R_i)$)
        $\bar{u}_1 = u_1 \downarrow$; $\bar{u}_2 = u_2 \downarrow$;
        if ($\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1 \not> \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2 \not> \bar{u}_1$)
            return fail;
        if ($\bar{u}_1 > \bar{u}_2$)
            $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_1 \to \bar{u}_2\}$
        else if ($\bar{u}_2 > \bar{u}_1$)
            $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_2 \to \bar{u}_1\}$
        i := i+1;
while ($R_i \neq R_{i-1}$);
return R_i;