Семинар из субриманове геометрије

Термин

Семинар се одржава уторком од 16:15 у учионици 840. Први састанак семинара је планиран за 13.10.2026.

План семинара

Субриманова структура је уопштење Риманове структуре где је допуштено да скаларни производ буде дегенерисан. Свака контактна структура природно индукује субриманову структуру.

Идеја семинара је да се успостави веза субриманове структуре и контактне топологије, тј. разумети како се из метричких својстава субриманове метрике додељене контактној структури могу читати геометријске и тополошке особине дате контактне многострукости.

Програм за први семестар је детаљан увод у субриманову геометрију.

Као главни пример пратићемо Хајзенбергову групу. Основни појмови које планирамо да обрадимо су: субриманова структура и разлика у односу на Риманов случај, Карно-Каратеодоријева метрика, проблем постојања геодезијских линија, Хамилтонова формулација, теорема о лопти и кутији, Хаусдорфова димензија, Карноове групе и тангентни простори. Опширнији план се налази испод Литературе.

У другом семестру фокус ће бити примарно на вези са контактном геометријом. Крајњи циљ је дати преглед проблема и познатих резултата у овој области, на пример [ABEL25].

Литература

[ABB20] A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain. *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics (Vol. 181). Cambridge University Press, 2020.

[LeD23] E. Le Donne. Lecture Notes on Sub-Riemannian Geometry – Carnot–Carathéodory Spaces from the Lie Group Viewpoint. *Lecture notes, 2023/2024 version*, 2023.

[Mon02] R. Montgomery. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications.* Mathematical Surveys and Monographs (Vol. 91). American Mathematical Society, 2002.

[ABEL25] A. A. Agrachev et al., *Quantitative tightness for three-dimensional contact manifolds: a sub-Riemannian approach.* Nonlinearity **38** (2025), no. 11, Paper No. 115011, 62 pp.

План излагања

Недеље 1–3: Шта је субриманова геометрија?

Сусрет 1. Преглед и мотивација. *[ABB20]: Увод и Глава 3. [Mon02]: уводна поглавља.*

Сусрет 2. Хајзенбергова група. Главни мотивациони пример, веза са стандардном $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$.
[ABB20]: Глава 2 и одговарајући делови Главе 3.

Сусрет 3. Теорема Чоу-Рашевског и Карно-Каратеодоријева метрика. Повезаност хоризонталним кривама, постојање минимизирајућих кривих, основна својства субримановог растојања.
[ABB20]: Глава 3. [Mon02]: уводна дискусија.

Недеље 4–7: Геодезијске линије и оптимално управљање

Сусрет 4. Варијациони проблем. Дужина напрема енергији; репараметризација; пресликавање крајње тачке; зашто је субриманов проблем природно проблем управљања.
[ABB20]: Глава 4.

Сусрет 5. Понтријагинов принцип максимума. Нормалне и анормалне екстремале; Хамилтонова формулација; геометријско значење ко-стања.
[ABB20]: Глава 4. [Mon02]: геодезијски угао посматрања.

Сусрет 6. Нормалне геодезијске линије и експоненцијално пресликавање. Хамилтонов проток, експоненцијално пресликавање, Гаусова лема, конјуговане тачке.
[ABB20]: Глава 8.

Сусрет 7. Детаљно о Хајзенберговој групи. Експлицитне Хамилтонове једначине, геодезијске линије, сфере, cut locus и поређење са еуклидском и римановом геометријом.
[ABB20]: Глава 13; [Mon02]: Хајзенбергова геометрија.

Недеље 8–11: Карноове групе и скалирање

Сусрет 8. Лијеве групе и лево-инваријантне структуре. Лијеве алгебре, лево-инваријантна векторска поља, структуре генерисане заградама на Лијевим групама.
[ABB20]: Глава 7.

Сусрет 9. Карноове групе. Стратификоване Лијеве алгебре, дилатације, хомогене дистанце и примери изван Хајзенбергове групе.
[ABB20]: Одељци 10.1 и 13; [LeD23].

Сусрет 10. Теорема о лопти и кутији. Вектори раста, неизотропно скалирање и локални облик метричких лопти.
[ABB20]: Глава 10.

Сусрет 11. Нилпотентна апроксимација и привилеговане координате. Зашто се Карноове групе јављају као тангентни модели; привилеговане координате и нилпотентизација дистрибуције.
[ABB20]: Главе 10–11.