

Задаци за вежбу 3 - Липшицове функције и Кларков градијент

задаци за домаћи обележени су *

1. Нека је (X, d) компактан метрички простор. Доказати да је свака локално Липшицова функција $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ (глобално) Липшицова.
2. * Нека је (X, d) метрички простор. Доказати да је сурјективна функција $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ би-Липшицова ако и само ако постоји $L > 0$ такво да

$$L^{-1}d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

3. Доказати да је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Липшицова ако и само ако јој је извод ограничен, тј. постоји $C > 0$ т.д. $\|Df(x)\| \leq C$ за свако $x \in \mathbb{R}^m$.
4. Доказати да је $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Липшицова бијекција која није би-Липшицова.
5. Нека је дата функција

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln |x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- а) Доказати да је f Липшицова у околини 0.
 - б) Доказати да не постоји једностранни извод у 0 у правцу 1 функције f , тј. не постоји $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}$.
 - в) Доказати да постоји уопштени извод у правцу $f^\circ(0; 1)$.
6. Нека су f, g Липшицове функције у околини тачке x . Доказати да за свако $v \in \mathbb{R}^n$ важи: $(f + g)^\circ(x; v) \leq f^\circ(x; v) + g^\circ(x; v)$.
 7. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Липшицова функција. Доказати да за свако $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$ важи

$$f^\circ(x; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{y \in B(x, \delta\varepsilon)} \sup_{t \in (0, \varepsilon)} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

8. * Доказати да је Кларков градијент непрекидан одозго.
9. * Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Липшицова функција. Доказати да је $\partial_C |f|(x) \subseteq \text{sgn}(f(x))\partial_C f(x)$, за свако x , т.д. $f(x) \neq 0$. Да ли важи једнакост?
10. * Нека су $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) Липшицове функције у околини тачке x .
 - а) Доказати да је $f \cdot g$ Липшицова у околини x .
 - б) Да ли је производ две (глобално) Липшицове функције (глобално) Липшицова функција?
 - в) Доказати

$$\partial_C(fg)(x) \subseteq \partial_C(f(x)g(\cdot) + g(x)f(\cdot))(x) \subseteq f(x)\partial_C g(x) + g(x)\partial_C f(x).$$

11. * Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ затворен скуп и $x \in S$. Доказати да је $T_x S \subseteq \mathbb{R}^n$ затворен скуп.
12. Нека су $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, S_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ затворени скупови и $x \in (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$. Доказати да важи

$$\begin{aligned} T_x(S_1 \times S_2) &= T_{x_1} S_1 \times T_{x_2} S_2, \\ N_x(S_1 \times S_2) &= N_{x_1} S_1 \times N_{x_2} S_2. \end{aligned}$$

13. * Израчунати у свакој тачки тангентни и нормални конус скупа $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2|x|\}$.

14. Доказати да је Кларков Јакобијан горње непрекидан у свакој тачки.

15. * Нека је $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Липшицова функција у околини тачке $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Означимо са $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ стандардне пројекције. Доказати

$$\partial_1^C f(x, y) \subseteq \pi_1 \partial_C f(x, y)$$

$$\partial_2^C f(x, y) \subseteq \pi_2 \partial_C f(x, y).$$

16. * (Липшицова теорема о имплицитној функцији) Нека је $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ Липшицова функција. Означимо са

$$\partial_2 F(x, y) := \{M \in M_{k \times k}(\mathbb{R}) \mid \exists N \in M_{k \times n}(\mathbb{R}) [M, N] \in \partial_C F(x, y)\}$$

где $\partial_C F(x, y)$ означава Кларков Јакобијан од F у тачки (x, y) .

Нека је $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ т.д. $F(x_0, y_0) = 0$. Претпоставимо да $\partial_2 F(x_0, y_0)$ има максималан ранг (тј. да је свака матрица из овог скупа инвертибилна). Доказати да тада постоји околина U тачке x_0 и Липшицова функција $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ таква да је $\phi(x_0) = y_0$ и таква да, за свако $\tilde{x} \in U$ важи

$$F(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) = 0.$$