Задаци за вежбу 2 - Конвексни поддиференцијал и проблем конвексне оптимизације

задаци за домаћи обележени су *

1. * Израчунати конвексни поддиференцијал Еуклидске норме $||\cdot||_2$ и норме $||\cdot||_1$ на $\mathbb{R}^n$.

2. * Израчунати конвексни поддиференцијал функције $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,...,x_n)=\max\{x_1,...,x_n\}$.

3. * Доказати да је поддиференцијал конвексне функције циклично-монотон.

4. Нека је $T:\mathbb{R}^n\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$ максималан циклично-монотоно пресликавање.

   а) За $x\in\mathbb{R}^n$, дефинишемо

   $$f(x):=\sup\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\langle p_i,x_{i+1}-x_i\rangle : m\geq 1,\ (x_i,p_i)\in \mathrm{Graph}(T),\ x_m=x\right\}.$$

   Доказати да је функција $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ добро дефинисана и конвексна.

   б) Доказати да је $T(x)\subseteq\partial f(x)$ за свако $x\in\mathbb{R}^n$.

   в) Доказати да је $T(x)=\partial f(x)$ за свако $x\in\mathbb{R}^n$.

5. Нека је $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ конвексна функција, $A\in\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ и $b\in\mathbb{R}^n$. Дефинишимо $g(x):=f(Ax+b)$. Доказати да за свако $x\in\mathbb{R}^n$ важи $\partial g(x)=A^T\partial f(Ax+b)$.

6. Нека су дате конвексне функције $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}^n\to\overline{R}$ и нека је $p\in\partial(f+g)(x)$. За свако $v\in\mathbb{R}^n$, дефинишимо

   $$K_v:=\left\{q\in\partial g(x)\mid \langle q,v\rangle\geq\langle p,v\rangle-g'(x;v)\right\}.$$

   а) Доказати да је сваки скуп K_v непразан, затворен и конвексан подскуп од $\partial f(x)$.

   б) Доказати да свака коначна фамилија скупова $K_{v_1},\dots,K_{v_l}$ има непразан пресек. (**Упутство:** Посматрајте скупове

   $$C_1=\{(\langle q,v_1\rangle,\dots,\langle q,v_l\rangle)\mid q\in\partial f(x)\}\subseteq\mathbb{R}^l$$

   и

   $$C_2=\{a=(a_1,\dots,a_l)\in\mathbb{R}^l\mid\ a_i\geq b_i\},\qquad b_i=\langle p,v_i\rangle-g'(x;v_i).$$

   Користећи непрекидност функције f у тачки x и то да је $\partial f(x)$ компактан скуп, доказати да је C_1 компактан и након тога применити теорему о сепарацији.)

   в) Користећи компактност скупа $\partial f(x)$ закључити да важи

   $$\bigcap_{v\in\mathbb{R}^n}K_v\neq\varnothing.$$

7. * Израчунати нормални конус у свакој тачки скупа $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\}\cup[0,1]\times[0,1]$.

8. * Нека је дата функција

   $$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2$$

   и скуп

   $$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x+y\leq 3\}.$$

а) Доказати да је функција f конвексна.

б) Доказати да је скуп C непразан, затворен и конвексан.

в) Решити оптимизациони проблем $\min\limits_{C} f$. Да ли је решење јединствено?

г) Проверите услов оптималности

$$-\nabla f(\bar{z}) \in N_C(\bar{z}),$$

где је $\bar{z}$ тачка минимума.