Задаци за вежбу 1

задаци за домаћи обележени су *

1. Нека је $p > 0$. За $x \in \mathbb{R}^n$ дефишемо l_p норме

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right), \quad ||x||_\infty := \sup_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

   За које $p \in (0, \infty]$ је јединична лопта у l_p-норми конвексан скуп?

2. * Нека је V векторски простор и $f : V \to \mathbb{R}$. Доказати да је f конвексна ако и само ако је $\mathrm{epi}(f) \subseteq V \times \mathbb{R}$ конвексан скуп.

3. * Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан конус. *Поларни конус* (додељен конусу C) је скуп

$$C^\circ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, u \rangle \le 0 \ \ \forall u \in C\}.$$

   Доказати да је C° конвексан конус и да важи $(C^\circ)^\circ = C$.

4. * Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Доказати да је

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \ x_i \in A, \quad \forall i, 1 \le i \le n+1 \right\}.$$

5. Нека су $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Доказати $\mathrm{conv}(A + B) = \mathrm{conv}(A) + \mathrm{conv}(B)$.

6. Нека је дат полином $P \in \mathbb{C}[x]$. Доказати да корени полинома P' (првог извода полинома P) леже у конвексном омотачу скупа корена полинома P.

7. * Нека је $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} \cup ([0, 1] \times [0, 1]))$. Израчунати носач скупа A.

8. Нека је $p \in [1, \infty]$. Доказати да је носач јединичне l_p-лопте B_p^n дат са $h_{B_p^n}(x) = ||x||_q$, где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

9. Нека је дата фамилија конвексних скупова $\{K_i\}_{i \in I}$ у $\mathbb{R}^n$. Доказати да

$$h_{\mathrm{conv}\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)}(x) = \max_{i \in I} h_{k_i}.$$

10. * Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ограничен скуп и $h_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ његов носач.

    а) Доказати да је $h_{\overline{A}} = h_A$, где је $\overline{A}$ затворење скупа A.

    б) Доказати да је $h_{\mathrm{conv}(A)} = h_A$.

    б) Означимо са $\widetilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ јединствен компактан конвексан скуп чији је носач такође h_A. Доказати да је $\widetilde{A} = \overline{\mathrm{conv}(A)}$.