На следећим странама се налази материјал намењен студентима који слушају Нелинеарно програмирање, или Методе математичког програмирање, како се овај предмет зове по старој акредитацији. Материјал ће бити у сталној изради током трајања семестра, али се надам да ће на крају садржати већину, ако не и све оно што се радило (и нешто што се није радило) на вежбама - минус решења задатака. Све примедбе на рачун материјала, било да су везане за нејасноћу или некоректност формулације неког задатка или исказа, су добродошле, уживо или путем мејла:
dusan.bogojevic@matf.bg.ac.rs

10. јун 2026.

Списак задатака рађених на вежбама сваке недеље:

1. недеља: 1.[а,б] | 4. | 5. | 7.
2. недеља: 9. | 11.
3. недеља: 12.
4. недеља: 13.
5. недеља: 14.
6. недеља: 15.
7. недеља: 16. | 17. | 18.
8. недеља: 19. | 20. | 21. | 22. | 23.
9. недеља: 24. | 25. | 26. | 27. | 28.

1 Увод

У склопу овог курса бавићемо се проблемом одређивања екстрема (тачке екстрема) реалне функције $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, на допустивом скупу $S \subseteq \Omega$. Скуп S ће или бити $\mathbb{R}^n$, у ком случају се ради о проблему безусловне оптимизације, или ће бити задат са $S = \{X \in \mathbb{R}^n : g_i(X) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$[1].

Дефиниција 1 За вектор $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, кажемо да је **вектор допустивог правца** у тачки $X \in S$, ако постоји $\alpha_0 > 0$ такво да $X + \alpha d \in S$, за свако $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Ако је $f : S \to \mathbb{R}$ реална функција и d вектор допустивог правца у X, онда је **извод функције** f **у правцу вектора** d у тачки X дефинисан са:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(X + \alpha d) - f(X)}{\alpha}.$$

Ако је функција f диференцијабилна у тачки X онда важи и

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = d^T \nabla f(X) = \langle \nabla f(X), d \rangle.$$

Пример 1 Одредимо извод функције $f(X) = x_1 x_2 + x_3^2$ у правцу $d = [1, -1, 2]^T$. Расписивањем по дефиницији се долази до

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_1 + \alpha, x_2 - \alpha, x_3 + 2\alpha) - f(x_1, x_2, x_3)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{(x_1 + \alpha)(x_2 - \alpha) + (x_3 + 2\alpha)^2 - x_1 x_2 - x_3^2}{\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha(x_2 - x_1) - \alpha^2 + 4\alpha x_3 + 4\alpha^2}{\alpha} = x_2 - x_1 + 4x_3$$

Како је f диференцијабилна, ово је наравно једнако са $\langle \nabla f(X), d \rangle = \langle (x_2, x_1, 2x_3), (1, -1, 2) \rangle$.

Теорема 2 Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{C}^1(S)$ реална, непрекидно диференцијабилна функција дефинисана на скупу S. Ако је X^* локални минимум функције f на S, тада за произвољни допустиви правац d у тачки X^* важи

$$d^T \nabla f(X^*) \geq 0.$$

Ако је додатно $f \in \mathcal{C}^2(S)$, тада за произвољни допустиви правац d у тачки X^* важи

$$d^T \nabla f(X^*) = 0 \implies d^T \nabla^2 f(X^*) d = d^T F(X^*) d \geq 0.$$

Задатак 1 Испитати да ли су испуњени неопходни услови првог и другог реда за минимизацију функције f на скупу S у тачки X^* и проверити да ли је она заиста локални минимум, ако је:

а) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2,\ S = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq e^{x_1}\},\ X^* = (0, 1)$

б) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2,\ S = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 \geq 1 - (x_1 + 1)^2\},\ X^* = (0, 0)$

в) $f(x_1, x_2) = x_1 + \operatorname{ch} x_2,\ S = \{X \in \mathbb{R}^2 : (x_2^2 - x_1)(x_2^2 + x_1) \leq 0\},\ X^* = (0, 0)$

г) $f(x_1, x_2) = x_2,\ S = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 1\},\ X^* = (2, 0)$

Задатак 2 Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Да ли су услови

1. $\nabla f(X^*) = 0$
2. $F(X^*) \geq 0$

довољни за гарантовање егзистенције тачке локалног минимума у тачки X^*?

Задатак 3 Нека је $f : S \to \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{C}^2(S)$. Ако су за сваки допустиви правац d испуњени услови

1. $d^T \nabla f(X^*) \geq 0$

[1] Приметимо да се на овај начин могу задати и услови типа $\geq$ и $=$.

2. $d^T \nabla f(X^*) = 0$, $d \neq 0 \implies d^T F(X^*) d > 0$,

да ли се може гарантовати егзистенција локалног минимума у тачки X^*?

Ако тачка X припада унутрашњости скупа S, ситуација је простија и осим неопходних, једноставно се могу дефинисати и довољни услови за егзистенцију локалног екстрема.

Теорема 3 Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{C}^1(S)$ реална, непрекидно диференцијабилна функција дефинисана на $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако је $X^* \in \operatorname{int} S$ локални минимум функције f, тада важи

$$\nabla f(X^*) = 0.$$

Ако је додатно $f \in \mathcal{C}^2(S)$ тада важи

$$\nabla^2 f(X^*) = F(X^*) \geq 0,$$

односно, матрица $F(X^*)$ је позитивно семи-дефинитна.

Такође, ако је у произвољној тачки $X \in \operatorname{int} S$ испуњено $\nabla f(X) = 0$ и $F(X) > 0$, тада се у X налази строг локални минимум.

Задатак 4 Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и $f : S \to \mathbb{R}$ конвексна функција на њему. Доказати да је тада свака стационарна тачка функције f уједно и глобланi минимум.

Задатак 5 Нека је функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задата са $f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X - b^T X$, где је $Q \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

а) Одредити формулу за градијент и Хесијан функције f у тачки X.

б) Испитати да ли функција f има локалне и глобалне екстремуме и ако их има одредити у којој тачки/тачкама се достижу.

Задатак 6 Нека су $x_1, x_2, \ldots x_m \in \mathbb{R}$. Одредити минимум функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задате са

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} (x - x_i)^2,$$

а затим уопштити резултат за тачке из $\mathbb{R}^n$.

Задатак 7 Нека је A реална матрица димензије $m \times n$, $m \geq n$ и ранга n, а b реалан вектор из $\mathbb{R}^m$. Одредити оптимално решење X^* за проблем минимизације функције

$$f(X) = \|AX - b\|_2.$$

Шта представљају вектор X^* и вредност $f(X^*)$?

Задатак 8 Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(X) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2).$$

а) Показати да су у тачки $X^* = [0, 0]^T$ испуњени неопходни услови првог и другог реда (Теорема 3) за егзистенцију локалног минимума.

б) Показати да је тачка X^* локални минимум функције f дуж сваке осе кроз координатни почетак.

в) Показати да тачка X^* није локални минимум функције f.

2 Безусловна оптимизација

У наставку се бавимо решавањем проблема безусловне оптимизације

$$\min f(X),\ X \in \mathbb{R}^n,$$

коришћењем итеративних метода. Идеја је генерисати низ тачака $X^{(k)}$ са

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k, \quad d_k \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

такав да низ вредности $f(X^{(k)})$ монотоно опада и конвергира ка неком од локалних минимума функције f. За почетак ћемо се бавити градијентним методама, конкретно, методама градијентног спуста. Код ових метода је $d_k = -\nabla f(X^{(k)})$. У зависности од тога какви α_k се користе за формирање итеративног низа, долазимо до различитих варијација методе градијентног спуста. Нас ће највише занимати **метода најбржег спуста** код које се за α_k бира решење проблема минимизације

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad g_k(\alpha) = f(X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)})),$$

и **метода константног спуста** код које је у свакој итерацији $\alpha_k = \alpha \in \mathbb{R}$. Критеријум заустављања за градијентн методе се може дефинисати на више начина (погледати стр. 41-42 у књизи).

Углавном ћемо се бавити проблемом минимизације квадратне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X - b^T X, \tag{1}$$

где је Q симетрична матрица из $\mathbb{R}^{n \times n}$, а b вектор из $\mathbb{R}^n$. Ова функција је погодна за анализу, а закључци до којих се долази се често могу пренети и на општи случај, јер се функције из $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ могу њоме локално апроксимирати. О конвергенцији наведених метода, у случају квадратне функције, говоре следеће теореме.

Теорема 4 Нека је Q симетрична, позитивно дефинитна матрица и $\{X^{(k)}\}$ итеративни низ конструисан методом најбржег спуста, при минимизацији квадратне фунцкије (1) . Тада важи

$$X^{(k)} \to X^* = Q^{-1}b, \quad k \to \infty$$

за произвољан избор почетне тачке $X^{(0)}$.

Теорема 5 Нека је Q симетрична, позитивно дефинитна матрица и $\{X^{(k)}\}$ итеративни низ конструисан методом константног спуста, при минимизацији квадратне фунцкије (1). Тада важи

$$X^{(k)} \to X^* = Q^{-1}b, \quad k \to \infty$$

за произвољан избор почетне тачке $X^{(0)}$, ако и само ако је за константни корак спуста α испуњено

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(Q)}.$$

Како бисмо растеретили нотацију, у наставку ћемо користити скраћени запис $\nabla f(X^{(k)}) = f_k$.

Задатак 9 Нека је са $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k$ одређен итеративни низ за минимизацију квадратне функције (1). Извести формулу за корак α_k који у свакој итерацији минимизује вредност $f(X^{(k)} + \alpha_k d_k)$. Показати да је за овако одређен низ у сваком кораку испуњено $f_{k+1}^T d_k = 0$.

Задатак 10 Нека је $\{X^{(k)}\}$ итеративни низ добијен применом методе најстрмијег спуста при минимизацији квадратне функције (1). Ако за полазну тачку важи $X^{(0)} \neq Q^{-1}b$, показати да итеративни низ конвергира у једном кораку акко је тачка $X^{(0)}$ изабрана тако да је $f_0 = QX^{(0)} - b$ сопствени вектор матрице Q.

Када функција циља није квадратна, није могуће извести формулу којом би се у сваком кораку одредило α_k за које је $g_k(\alpha) = f(X^{(k)} - \alpha d_k)$ минимално. У овом случају се α_k може апроксимирати итеративним методама. Овакав приступ назива се линијском претрагом, јер подразумева потрагу за тачком минимума функције f дуж само једног правца, одређеног вектором d_k (односно α за које се овај минимум достиже). У случају да је функција циља конвексна, таква ће бити и њена рестрикција $g_k(\alpha)$, па се линијска претрага може реализовати тражењем нуле функције $g'_k(\alpha)$, у којој се достиже минимум дуж датог правца. Нулу ове функције можемо одредити било којом од познатих итеративних метода за решавање нелинеарних једначина.

Једна алтернатива, која представља компромис између методе најбржег и методе константног спуста јесте одредити дужину корака α_k хеуристички. Популарна метода, која се користи у ове сврхе, позната је као **Армихово**[2] **правило**. Иако ова метода заправо не апроксимира тачку минимума функције g_k, она на веома једноставан начин одређује α које у довољној мери побољшава вредност функције циља и састоји се у следећем. За фиксиране α_0, $q \in (0,1)$ и $c \in (0,1)$ одређује се минимално $k \in \mathbb{N}_0$ за које је

$$f(X^{(k)} + \alpha_0 q^k d_k) \leq f(X^{(k)}) + c\alpha_0 q^k \, d_k^T f_k.$$

Вредности α_0, q и c представљају параметре и често се узима α_0=1, $q = \frac{1}{2}$ и $c = 10^{-4}$. Уколико је функција f непрекидно диференцијабилна и d_k правац спуста, онда је загарантовано да ће у једном тренутку, односно за неко k бити испуњено Армихово правило.

Задатак 11 У Матлабу испрограмирати:

а) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији квадратне функције (1), применом методе константног спуста.

б) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији квадратне функције (1), применом методе најбржег спуста.

в) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији конвексне функције f, чији је градијент познат, применом методе најбржег спуста. Корак α_k у свакој итерацији одредити тако да приближно минимизује вредност $f(X^{(k)} + \alpha_k f_k)$.

г) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији функције f, чији је градијент познат, применом методе градијентног спуста, при чему се за одређивање дужине корака α_k користи Армихово правило са параметрима $(\alpha_0, q, c) = (1, 0.5, 0.1)$.

Полазну тачку $X^{(0)}$, као и параметре који одређују критеријум заустављања и максималан број итерација проследити као улазне аргументе.

Следећа итеративна метода којом ћемо се бавити јесте **Њутнова**, или Њутн-Рапсонова метода. Њен итеративни корак је дефинисан на следећи начин:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - F(X^{(k)})^{-1} f_k,$$

где је $F(X)$ вредност Хесијан матрице у тачки X. Једно тумачење овог корака јесте кретање из тренутне тачке $X^{(k)}$ у стационарну тачку квадратне апроксимације функције f у $X^{(k)}$

$$q(X) = f(X^{(k)}) + (X - X^{(k)})^T f_k + \frac{1}{2}(X - X^{(k)})^T F(X^{(k)})(X - X^{(k)}).$$

Није тешко видети да овако дефинисан итеративни корак није нужно корак спуста, поготову ако $F(X)$ није свуда позитивно дефинитна. Осим ове, мана Њутнове методе јесте и њена велика рачунаска сложеност. Она ипак има и добрих страна, јер се под одређеним условима може гарантовати да конвергира ка тачки минимума са редом конвергенције најмање 2 (видети Теорему 4.1 у књизи). Из овог разлога, у пракси се најчешће користе њене модификације, којима се смањује рачунска сложеност методе, али и успорава брзина конвергенције.

Чак и када је Хесијан матрица $F(X^{(k)})$ позитивно дефинитна, корак $d_k = -F(X^{(k)})^{-1} f_k$ не мора нужно бити корак спуста. Модификација Њутнове методе са својством спуста решава овај проблем тако што што за корак узима $\alpha_k d_k$, где је $\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} g(\alpha)$ [3] изабрано тако да испуњава својство најбржег спуста.

[2] амерички математичар Larry Armijo

[3] $g(\alpha) = f(X^{(k)} + \alpha d_k)$

У случају да Хесијан матрица $F(X^{(k)})$ није позитивно дефинитна, својство спуста се може обезбедити додатном модификацијом методе. Једна оваква модификација јесте Левенберг-Маркардова у којој је $d_k = -H_k^{-1} f_k$, где је модификована матрица Хесијана $H_k = F(X^{(k)}) + \mu I$, $\mu > 0$ конструисана тако да буде позитивно дефинитна. Један начин да се ово омогући јесте изабрати $\mu = \|F(X^{(k)})\|_2 + c$, чиме се гарантује да ће све сопствене вредности матрице H_k бити веће или једнаке c. Након овога се за итеративни корак узима αd_k, где је α изабрано тако да има својство најбржег спуста.

Задатак 12 У Матлабу испрограмирати:

а) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији функције f, применом Њутнове методе.

б) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији функције f, применом модификације Њутнове методе са својством спуста.

в) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији функције f, применом Левенберг-Маркардове модификације Њутнове методе. Модификовану Хесијан матрицу у сваком кораку одредити тако да јој минимална сопствена вредност не буде мања од 1.

Полазну тачку $X^{(0)}$, као и параметре који одређују критеријум заустављања и максималан број итерација проследити као улазне аргументе.

У теорији апроксимација често се сусрећемо са проблемом проналажења оптималних параметара неког нелинеарног модела. Ово се своди на решавање проблема минимизације

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x)^2,$$

где су $r_i(x) = y_i - g(x, t_i)$ такозвани резидуали - разлике између измерених вредности и оних које предвиђа нелинеарни модел g са параметрима x. У оваквој ситуацији згодно је применити Гаус-Њутнову методу, која се од Њутнове методе разликује у томе што се за рачунање итеративног корака уместо Хесијана користи апроксимација Хесијана у којој не фигуришу изводи другог реда функција r_i (видети стр. 95-96 у књизи). Ако са J и r обележимо вредности Јакобијана и резидуала у тренутној тачки $J(X^{(k)})$ и $r(X^{(k)})$, итеративни корак методе дефинисан је са

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - (J^T J)^{-1} J^T r.$$

На овај начин долази се до методе која је јефтинија, али и непоузданија од Њутнове методе и веома осетљива на избор иницијалног избора параметара.

Задатак 13 Нека су (t_i, y_i) временским тренуци и мерења задате вредности у тим тренуцим генерисани следећим Матлаб кодом:

```
t = (0:0.5:10)';
A=3; w=1.2; phi=0.5;
y = A*sin(w*t+phi) + 0.5*randn(size(t));
```

Ако је $g(x,t) = x_1 \sin(x_2 t + x_3)$ и $r_i(x) = y_i - g(x, t_i)$, написати функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији функције $f(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x)^2$, применом Гаус-Њутнове методе. Полазну тачку, као и параметре који одређују критеријум заустављања и максималан број итерација проследити као улазне аргументе.

Још једна позната метода нелинеарног програмирања јесте **метода конјугованих праваца**. Она обично остварује боље резултате од метода градијентог спуста, док је мање ефикасна од Њутнове методе.

Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ квадратна функција из (1). За векторе u и v кажемо да су Q-конјуговани ако је $u^T Q v = 0$. Уколико је матрица Q позитивно дефинитна, може се показати да је са $\langle u, v \rangle_Q = v^T Q u$ дефинисан скаларни производ и да систем од n Q-конјугованих вектора $d_0, ..., d_{n-1}$ чини једну базу простора $\mathbb{R}^n$. Метода коњугованих праваца састоји се у конструкцији итеративног низа за чије тачке важи

$$X^{(k+1)} = X^{(K)} + \alpha_k d_k \quad , k = 0, ..., n-1$$

где је $\alpha_k = -\frac{f_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$ одређено тако да минимизује $f(X^{(k+1)})$. Овако дефинисан низ ће исконвергирати ка глобалном минимуму $X^* = Q^{-1} b$ за највише n итерација. Одређивање Q-конјугованих вектора представља нетривијалан задатак и може бити рачунски захтевно. Срећом, постоји и варијанта ове методе позната као **метода конјугованих градијената**, код које се генерисање Q-конјугованих вектора поједностављује и реализује током самог итеративног процеса. Полазећи од $d_0 = -f_0$, може се показати, да ће се бирањем у сваком кораку

$$d_{k+1} = -f_{k+1} + \beta_k d_k \quad , k = 0, ..., n-2,$$

где је $\beta_k = \frac{f_{k+1}^T f_{k+1}}{f_k^T f_k}$ остварити Q-конјугованост вектора $d_0, ..., d_{n-1}$, а самим тим и конвергенција методе.

Чињеница да се свака функција из простора $C^2(\mathbb{R}^n)$ може апроксимирати одговарајућом квадратном функцијом мотивише примену методе конјугованих градијената у оптимизацији, чак и за нелинеарне функције које нису квадратне. У овом случају корак α_k више нема смисла рачунати горе наведеном формулом, већ се за његово одређивање може применити нека линијска претрага. Осим горе наведене формуле за рачунање коефицијената β_k, познате као и Флечер-Ривсове, постоје и друге (њој еквивалентне у случају да је f квадратна), које се могу испоставити као адекватније, у зависности од особина функција циља. Ми наводимо две:

$$\text{Хестенес-Штифелова: } \beta_k = \frac{f_{k+1}^T (f_{k+1} - f_k)}{d_k^T (f_{k+1} - f_k)}$$

$$\text{Полак-Рибиерова: } \beta_k = \frac{f_{k+1}^T (f_{k+1} - f_k)}{f_k^T f_k}$$

Како се својство Q-конјугованости нарушава с порастом броја итерација, у пракси се често примењује стратегија ресетовања. Након одређеног броја итерација, за правац d_k се узима правац обрнут градијенту, $d_k = -f_k$, чиме се алгоритам "освежава".

Задатак 14 У Матлабу испрограмирати:

а) функцију која за задату симетричну, позитивно дефинитну матрицу $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ конструише систем Q-коњугованих вектора $\{d_0, d_1, ..., d_{n-1}\}$.

б) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији квадратне функције f, применом методе конјугованих праваца, користећи правце из дела а).

в) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији квадратне функције f, применом методе конјугованих градијената.

г) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији произвољне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, применом методе конјугованих градијената са рестартовањем правца након n итерација.

Полазну тачку $X^{(0)}$, као и параметре који одређују критеријум заустављања и максималан број итерација проследити као улазне аргументе.

Следећа метода по реду јесте Квази-Њутнова метода, која представља алтернативу класичној Њутновој методи. Њена предност је у томе што се за одређивање правца кретања у свакој итерацији користи апроксимацијом инверза Хесијана. Овиме се избегава често скуп и сложен процес одређивање Хесијана и решавање система линеарних једначина - неопходних корака код Њутнове методе. Осим овога, слично као и код модификација Њутнове методе са својством спуста, следећа тачка итеративног низа Квази-Њутнове методе се након изабраног правца одређује неком линијском претрагом дуж датог правца. Додатно, матрице која се користи као апроксимација инверза Хесијана није константна, већ се модификује из итерације у итерацију. Ако са H_k означимо апроксимациу инверза Хесијана у k-тој итерацији, онда ће у њој правац кретања бити одређен са $d_k = -H_k f_k$.

Постоји више начина на који се из итерације у итерацију могу модификовати апроксимације инверза Хесијана H_k, али оно што сви имају заједничко јесте да захтевају да буде испуњено $H_{k+1}(f_{j+1} - f_j) = X^{(j+1)} - X^{(j)}$, за $0 \leq j \leq k$. Уколико уведемо ознаке $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$ и $\Delta X^{(j)} = X^{(j+1)} - X^{(j)}$ претходно се може записати као

$$H_{k+1} \Delta f_j = \Delta X^{(j)}, \text{ за } 0 \leq j \leq k.$$

Овај захтев је природно наметнут, јер ће у случају квадратне функције гарантовати да је матрица H_n управо једнака Хесијан матрици.

Најједноставнији начин за за итеративно модификовање матрица H_k, тако да претходно буде испуњено дат је корекционим алгоритмом ранга један. Ако означимо $\varphi_k = \Delta X^{(k)} - H_k \Delta f_k$, он је дефинисан са

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\varphi_k \varphi_k^T}{\varphi_k^T \Delta f_k}.$$

Један недостатак овог приступа је чињеница да се не може гарантовати очување позитивне дефинитности матрица H_k, а самим тим ни да је одређени правац у свакој итерацији и правац спуста.

Корекциони алгоритам ранга два познат и као ДФП [4] има својство очувања позитивне дефинитности и задат је са

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \frac{H_k \Delta f_k \Delta f_k^T H_k}{\Delta f_k^T H_k \Delta f_k}.$$

Алгоритам који се показао као најпоузданији и који се најчешће користи у пракси јесте БФГС[5] алгоритам. Он је задат следећом формулом.

$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{\Delta f_k^T H_k \Delta f_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}\right) \frac{\Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \frac{H_k \Delta f_k (\Delta X^{(k)})^T + \Delta X^{(k)} \Delta f_k^T H_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}$$

Осим апроксимације инверза Хесијана и рачунање новог правца са $d_k = -H_k f_k$, квази-Њутнова метода се може дефинисати тако да формира низ матрица B_k које апроксимирају сам Хесијан и да се правац d_k потом одреди решавањем система линеарних једначина $B_k d_k = -f_k$. Овакав приступ се може испоставити као ефикаснији, уколико су због природе функције која се оптимизује, матрице B_k лепе структуре, односно згодне за решавање система линеарних једначина. Формуле којим су дефинисане везе измедзу B_{k+1} и B_k су следеће:

Алгоритам ранга један - $B_{k+1} = B_k + \dfrac{\psi_k \psi_K^T}{\psi_k^T \Delta X^{(k)}}$, где је $\psi_k = \Delta f_k - B_k \Delta X^{(k)}$

ДФП алгоритам - $B_{k+1} = B_k + \left(1 + \dfrac{(\Delta X^{(k)})^T B_k \Delta X^{(k)}}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}\right) \dfrac{\Delta f_k \Delta f_k^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{B_k \Delta X^{(k)} \Delta f_k^T + \Delta f_k (\Delta X^{(k)})^T B_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}$

БФГС алгоритам - $B_{k+1} = B_k + \dfrac{\Delta f_k \Delta f_k^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{B_k \Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T B_k}{(\Delta X^{(k)})^T B_k \Delta X^{(k)}}$

Задатак 15 У Матлабу испрограмирати:

а) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији квадратне функције f, применом квази-Њутнове методе, користећи корекциони алгоритам ранга 1.

б) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији произвољне функције f, применом квази-Њутнове методе, користећи корекциони алгоритам ранга 1.

в) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији произвољне функције f, применом квази-Њутнове методе, користећи корекциони алгоритам ДФП.

г) функцију која конструише итеративни низ добијен при минимизацији произвољне функције f, применом квази-Њутнове методе, користећи корекциони алгоритам БФГС.

Полазну тачку $X^{(0)}$, као и параметре који одређују критеријум заустављања и максималан број итерација проследити као улазне аргументе.

[4] Дејвидон-Флечер-Пауел
[5] Бројден-Флечер-Голдфарб-Шано

3 Условна оптимизација

У наставку се бавимо проблемима условне оптимизације који подразумевају проналажење тачака минимума и, или максимума функције циља $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на допустивом скупу $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ограничићемо се на случај када је S задат као скуп тачака за које важи

$$\begin{aligned} h_i(X) &= 0, \quad i = 1, ..., m \\ g_j(X) &\leq 0, \quad j = 1, ..., k \end{aligned}$$

за неке функције $h_i, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $m \leq n$. Уколико уведемо векторске фунцкије $h(X) = \begin{bmatrix} h_1(X) & \dots & h_m(X) \end{bmatrix}^T$ и $g(X) = \begin{bmatrix} g_1(X) & \dots & g_k(X) \end{bmatrix}^T$, допустиви скуп се краће може записати са

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0, \, g(X) \leq 0\}.$$

Како се неки једноставни проблеми условне оптимизације могу решити геометријским приступом, илустровано је у следећем задатку.

Задатак 16 Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задата са

$$f(x, y) = y - \sqrt[3]{x}.$$

Одредити тачке минимума и максимума функције f на скупу:

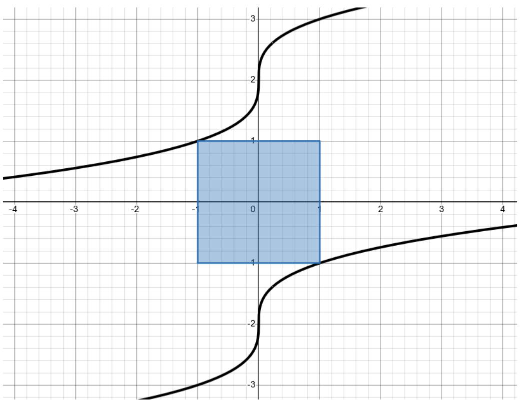
а) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \, |y| \leq 1\} = K_\infty[0, 1]$.

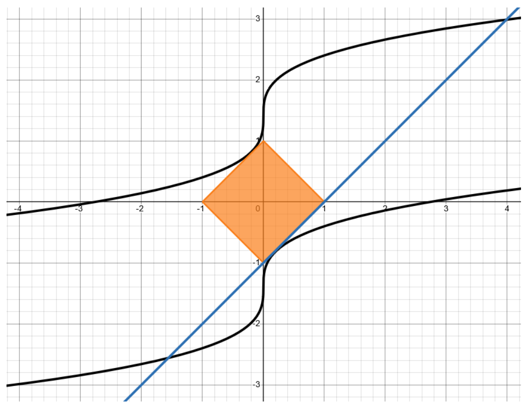
б) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\} = K_1[0, 1]$.

Решење. За решавање проблема геометријским приступом посматраћемо нивовске скупове функције циља f, који представљају скупове тачака на којима f узима исту вредност. Како је $f(x, y) = y - \sqrt[3]{x}$ закључујемо да су нивовски скупови задати са

$$\mathcal{N}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sqrt[3]{x} = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (y - c)^3\}.$$

Јасно је да вредност функције циља датог нивовског скупа одговара висини на којој он сече праву $x = 0$.





а) Када је $S = K_\infty[0, 1]$ са слике је очигледно да су тачке минимума и максимума $(1, -1)$, односно $(-1, 1)$, јер припадају најнижем, односно, највишем нивовском скупу који сече S.

б) У случају $S = K_1[0, 1]$ није одмах очигледно које су тачке минимума и максимума. Ограничићемо се на одређивање тачке минимума, јер се тачка максимума одређује аналогно.
Са слике је јасно да је то тачке која припада нивовском скупу $\mathcal{N}_{\hat{c}}$ који додирује дуж која спаја $(0, -1)$ и $(1, 0)$ и која се налази на правој $p : -x + y + 1 = 0$. Како бисмо одредили која је то тачка, можемо приметити да је у њој права p тангента криве $y - \sqrt[3]{x} = \hat{c}$. Како градијент функције у произвољној тачки има правац нормале на нивовски скуп који садржи ту тачку, ово је еквивалентно са $\nabla f(x, y) = k[-1, 1]^T$. Како је $\nabla f(x, y) = [-\frac{1}{3}x^{2/3}, 1]$, директно следи $k = 1$, одакле закључујемо да је

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}} - 1 \right)$$

тражена тачка минимума.

$\triangle$

Некада се проблем условне оптимизације може свести на проблем безусловне оптимизације елиминацијом променљивих. Ово се постиже њиховим изражавањем преко осталих променљивих. Овај приступ илустрован је у следећем задатку.

Задатак 17 Одредити минимум функције $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 + 2x_2 + 3x_3$, при ограничењима

$$x_1^2 + x_2 = 0,$$
$$x_1 - x_2^2 + x_3 = 0.$$

Решење. Изразимо променљиве x_2 и x_3 преко променљиве x_1. Знамо да је $x_2 = -x_1^2$ и $x_3 = x_2^2 - x_1 = x_1^4 - x_1$. Из претходног следи

$$f(x_1, x_2, x_3) = \hat{f}(x_1) = -5x_1 + 2(-x_1^2) + 3(x_1^4 - x_1) = 3x_1^4 - 2x_1^2 - 8x_1,$$

па смо полазни проблем свели на проблем безусловне оптимизације

$$\min_{x_1 \in \mathbb{R}} \hat{f}(x_1) = 3x_1^4 - 2x_1^2 - 8x_1.$$

Како је $\deg(\hat{f}) = 4$ и коефицијент уз највиши степен позитиван, дати полином минимум очигледно достиже у тачки у којој му је извод једнак 0. Због овога се проблем проналажења тачке минимума своди на решавање

$$\hat{f}'(x_1) = 12x_1^3 - 4x_1^2 - 8 = 4(3x_1^3 - x_1^2 - 2) = 0.$$

Једна нула је очигледно $x_1 = 1$, док су преостале две нуле комплексне (покаже се дељењем полинома $\hat{f}'(x_1)$ са $(x_1 - 1)$). Одавде се закључује да је решење полазног проблема

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0).$$

$\triangle$

Посматрајмо сада специјалан случај условне оптимизације код кога је допустив скуп S задата искључиво преко ограничења типа једнакости, односно са $S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0\}$, где су $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне функције.

Дефиниција 6 За тачку X^* са површи S кажемо да је регуларна уколико су градијенти

$$\nabla h_1(X^*), ..., \nabla h_m(X^*)$$

линеарно независни вектори. Уколико је $m = 1$, ово подразумева $h_1'(X^*) \neq 0$. Тангентни простор у тачки X^* на површ S дат је са

$$T(X^*) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Y^T \nabla h_i(X^*) = 0,\ i = 1, ..., m\}.$$

Теорема 7 Нека су $f, h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и нека је X^* регуларна тачка површи $S\{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0\}$ у којој функција f достиже локални минимум. Тада постоји вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..\lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ такав да је

$$\nabla f(X^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \nabla h_k(X^*) = 0. \tag{7.1}$$

Ако су додатно $f, h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, онда је

$$Y^T \left(\nabla^2 f(X^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \nabla^2 h_k(X^*) \right) Y \geq 0 \quad , \text{ за све } Y \in T(X^*). \tag{7.2}$$

Такође, ако је X произвољна регуларна тачка површи S за коју постоји $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такво да (X, λ) испуњава услов (7.1) и да је

$$Y^T \left(\nabla^2 f(X) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla^2 h_k(X) \right) Y > 0, \text{ за све } Y \in T(X),\ Y \neq 0, \tag{7.3}$$

онда се у тачки X налази строг локални минимум функције f на S.

Задатак 18 Одредити све тачке локалних минимума и максимума функције $f(x,y) = x_1 x_2^2$ на скупу $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2 + 1\}$.

Решење. Ако обележимо $h(X) = x_1^2 - x_2^2 - 1$, имамо $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : h(X) = 0\}$. Како је $\nabla h(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}^T = 0$ акко је $X = (0,0) \notin S$, закључујемо да су све тачке површи S регуларне. Неопходни услов првог реда (НУПР) је испуњен у тачки $X = (x_1,x_2) \in S$ уколико је

$$x_2^2 + 2\lambda x_1 = 0 \tag{18.1}$$
$$2x_1x_2 - 2\lambda x_2 = 2x_2(x_1 - \lambda) = 0. \tag{18.2}$$

1° $x_2 \neq 0$
Сада (18.2) повлачи $x_1 = \lambda$, па из (18.1) следи $x_2^2 = -2\lambda^2$, што је једино могуће ако је $\lambda = x_2 = 0$. Дошли смо до контрадикције са претпоставком, па прелазимо на следећи случај.
2° $x_2 = 0$
Из $h(X) = 0$ следи $x_1 = \pm 1$, што уз (18.1) повлачи $\lambda = 0$. Дакле у тачкама $X_1 = (1,0)$ и $X_2 = (-1,0)$ су испуњени неопходни услови првог реда. Обзиром да су све тачке скупа S регуларне, оне су једини кандидати за локални минимум/максимум. Испитајмо и услове другог реда.
Видимо да је

$$\nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix},$$

док ∇h^2 није потребан за даље разматрање, јер је $\lambda = 0$. Из $\nabla h = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}^T$ закључујемо

$$T(X_1) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^* y_1 - 2x_2^* y_2 = 2y_1 = 0\} = \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Исти закључак следи и за $T(X_2)$. Директна провера показује да је

$$\begin{bmatrix} 0 & t \end{bmatrix} \nabla^2 f(X_1) \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = 2t^2 > 0 \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 0 & t \end{bmatrix} \nabla^2 f(X_2) \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = -2t^2 < 0\,, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Како је у тачки $X_1 = (1,0)$ испуњен довољни услов друго реда, закључујемо да је она строг локални минимум функције f на S. Из истог разлога, тача $X_2 = (-1,0)$ је строг локални минимум функције $-f$, односно строг локални максимум функције f на S. △

У случају када је скуп S задат и са неједнакостима проблем се компликује. Ипак, некада се увођењем изравнавајућих функција дати проблем може свести на једноставнији проблем код кога су сва ограничења задата једначинама.

Задатак 19 Одредити тачке минимума и максимума функције $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ на скупу $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$.

Решење. Ослободићемо се неједнакости увођењем нове променљиве x_3 и изравнавајуће функције x_3^2. Овиме долазимо до проблема који је еквивалентан полазном и у коме нема ограничења задатих неједначинама

$$\max \hat{f}(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Ако нови допустиви скуп означимо са $\hat{S} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : h(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$ из $\nabla h = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}^T$ закључујемо да сву све тачке допустивог скупа регуларне, јер $(0,0,0) \notin \hat{S}$. Кандидате за тачке минимума/максимума одређујемо испитивањем неопходних услова. НУПР је испуњен у тачки $X = (x_1,x_2) \in \hat{S}$ уколико је

$$x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \tag{19.1}$$
$$x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \tag{19.2}$$
$$2\lambda x_3 = 0. \tag{19.3}$$

1° $\lambda = 0$
Из (19.1) и (19.2) следи $x_1 = x_2 = 0$, па је $x_3 = \pm 1$. Прва два кандидата су $X_1 = (0,0,1)$ и $X_2 = (0,0,-1)$.

2° $\lambda \neq 0$
Из (19.3) је $x_3 = 0$. Услови (19.1) и (19.2) повлаче $x_1 = 4\lambda^2 x_1$ и $x_2 = 4\lambda^2 x_2$. Како не може бити $x_1 = x_2 = 0$, јер $(0,0,0) \notin \hat{S}$, из претходног закључујемо да је нужно $\lambda^2 = 1/4$. Узимањем $\lambda = 1/2$ долази се до кандидата $X_3 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ и $X_4 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, док се са $\lambda = -1/2$ долази до кандидата $X_5 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ и $X_6 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$. Како је функција $\hat{f}$ непрекидна на $\hat{S}$, она достиже на

њему минимум и максимум и они су уједно и локални екстремуми, па је за одређивање тачака минимума/максимума довољно испитати вреднсоти функције у наведеним кандидатима. Одавде следи да су X_3 и X_4 тачке минимума, а X_5 и X_6 тачке максимума функције $\hat{f}$ на $\hat{S}$. Издвајањем прве две координате долази се до решења полазног проблема.

*За вежбу се могу испитати довољни услови у наведеним тачкама. Такође се може испробати решавање проблема геометријским приступом. △

Некада је згодно проблем безусловне оптимизације превести на проблем условне. Посматрајмо на пример проблем максимизације (аналогно се разматра и проблем минимизације) функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(X) = \frac{X^T QX}{X^T PX},$$

где су Q и P реалне симетричне матрице, при чему је P и позитивно дефинитна. Приметимо да уколико је X решење датог проблема, онда је решење и свака тачка облика tX, $t \neq 0$. Из овог разлога не губимо на општости увођењем услова $X^T PX = 1$, након чега се полазни проблем трансформише у

$$\begin{gathered} \max\, g(X) = X^T QX \\ 1 - X^T PX = 0. \end{gathered}$$

Једноставно је уверити се да су све тачке површи $S = \{X \in \mathbb{R}^n : X^T PX = 1\}$ регуларне. НУПР су испуњени у $X \in S$ уколико постоји $\lambda \in \mathbb{R}^n$ такво да је

$$2QX - 2\lambda PX = 0,$$

што је еквивалентно са

$$P^{-1}QX = \lambda X.$$

Одавде закључујемо да су кандидати за максимум функције g на S тачке $X_k \in S$, које одговарају сопственим векторима матрице $P^{-1}Q$. За свако овакво X_k испуњено је

$$X_k^T PX_k = 1 \quad \text{и} \quad QX_k = \lambda_k PX_k,$$

где је λ_k одговарајућа сопствена вредност. Како претходно повлачи $X_k^T QX_k = \lambda_k$ и како је S компактан, јасно је да се максимум достиже и то у тачки X^* коју одређује сопствени вектор који одговара највећој сопственој вредности. Дакле свака тачке облика tX^*, $t \neq 0$ представља решење полазног проблема.

Задатак 20 Одредити минимум и максимум функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задате са

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2}{x_1^2 + 2x_2^2}.$$

Решење. На основу претходног излагања, јасно је да је довољно одредити сопствене векторе матрице $P^{-1}Q$, где је

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Одавде је

$$P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad q_{P^{-1}Q}(\lambda) = \lambda^2 - 6.$$

Тачке максимума и минимума су облика tX_1 и tX_2, $t \neq 0$, где је $X_1 = (2, 2 - \sqrt{6})$ решење система $(P^{-1}Q - \sqrt{6}I)X_1 = 0$, а $X_2 = (2, 2 + \sqrt{6})$ решење система $(P^{-1}Q + \sqrt{6}I)X_1 = 0$. △

У случају када је допустив скуп задат и помоћу услова неједнакости, неопходни и довољни услови се морају адекватно модификовати. Уведимо пре свега неопходне појмове за формулисање теореме.

Дефиниција 8 Услов $g_j(X) \leq 0$ је активан у тачки X^* уколико је $g_j(X^*) = 0$. Са $J(X^*)$ означен је скуп свих индекса који одговарају условима типа неједнакости који су активни у тачки X^*, односно

$$J(X^*) = \{j : g_j(X^*) = 0\},$$

док је са $J(X^*, \mu^*)$ означен скуп свих оваквих индекса, којима додатно одговарају позитивни множиоци, односно

$$J(X^*, \mu^*) = \{j : g_j(X^*) = 0,\ \mu_j^* > 0\}.$$

Услови типа једнакости су активни у свакој тачки допустивог скупа S. За тачку $X^* \in S$ кажемо да је регуларна уколико је $\{\nabla h_i(X^*) : i = 1, ..., m\} \cup \{\nabla g_j(X^*) : j \in J(X^*)\}$ скуп линеарно независних вектора.

Тангентни простор у тачки X^* на површ $S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0,\, g_j(X) = 0,\, j \in J(X^*)\}$ одређену активним условима дефинисан је са

$$T(X^*) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Y^T \nabla h_i(X^*) = 0,\, i = 1, ..., m\} \cap \{Y \in \mathbb{R}^n : Y^T \nabla g_j(X^*) = 0,\, j \in J(X^*)\}.$$

Тангентни простор у тачки X^* на површ $S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0,\, g_j(X) = 0,\, j \in J(X^*, \mu^*)\}$ одређену активним условима, којим одговарају позитивни множиоци дефинисан је са

$$T(X^*, \mu^*) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Y^T \nabla h_i(X^*) = 0,\, i = 1, ..., m\} \cap \{Y \in \mathbb{R}^n : Y^T \nabla g_j(X^*) = 0,\, j \in J(X^*, \mu^*)\}.$$

Теорема 9 Нека су $f, g, h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и нека је X^* регуларна тачка површи $S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0,\, g(X) \le 0\}$ у којој функција f достиже локални минимум. Тада постоје $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ и $\mu^* \in \mathbb{R}^k$ за које важи

$$\mu^* \ge 0 \tag{9.1}$$

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j^* \nabla g_j(X^*) = 0 \tag{9.2}$$

$$(\mu^*)^T g(X^*) = 0. \tag{9.3}$$

Ако су додатно $f, g, h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, онда је

$$Y^T \left(\nabla^2 f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 h_i(X^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j^* \nabla^2 g_j(X^*) \right) Y \ge 0 \quad , \text{ за све } Y \in T(X^*). \tag{9.4}$$

Такође, ако је X произвољна регуларна тачка површи S за коју постоје $\lambda \in \mathbb{R}^m$ и $\mu \in \mathbb{R}^k$ такви да (X, λ, μ) испуњава (9.1), (9.2) и (9.3) и да је

$$Y^T \left(\nabla^2 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(X) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla^2 g_j(X) \right) Y > 0, \text{ за све } Y \in T(X, \mu),\, Y \ne 0, \tag{9.5}$$

онда се у тачки X налази строг локални минимум функције f на S.

Услови (9.1), (9.2) и (9.3) познати су и као ККТ[6] услови и представљају неопходне услове првог реда за егзистенцију локалног минимума функције f у регуларној тачки $X^* \in S$. Приметимо да је због $\mu \ge 0$ и $g(X) \le 0$ услов (9.3) еквивалентан са $\mu_j g_j(X) = 0,\, j = 1, ..., k$.

Задатак 21 Одредити тачку минимума и максимума функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задате са

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2,$$

на скупу $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 2,\, (x_1 - 1)^2 \le x_2\}$.

Решење. Увођењем функција $h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2$ и $g_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2$ допустиви скуп се може представити са $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : h(X) = 0,\, g(X) \le 0\}$. Приметимо да је допустив скуп S компактан. Ово није тешко видети скицирањем, а може се формално показати. Из $h(X) = 0,\, g(X) \le 0$ следи $(x_1 - 1)^2 \le x_2 = 2 - x_1$, односно $x_1^2 - x_1 - 1 \le 0$. Одавде је јасно да се допустив скуп може изразити као $S = \{(t, 2 - t) : t \in [(1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2]\}$, што је очигледно компактан скуп.

Како је $\nabla h_1(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \ne 0$ и $\nabla g_1(X) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) & -1 \end{bmatrix} \ne 0$ ови вектори могу бити линеарно зависни једино за $x_1 = 1/2$. Пошто у $(1/2, 3/2)$ није активан услов $g_1(X) \le 0$, закључујемо да су све тачке скупа S регуларне. На основу компактности допустивог скупа и непрекидности функције циља, знамо да постоји тачка минимума/максимума функције f на S и да је она уједно и тачка локалног минимума/максимума на S. Из регуларности тачака скупа S следи да је довољно пронаћи све тачке у којима су испуњени ККТ услови, како бисмо одредили тачку минимума и максимума.

ККТ услови за случај максимизације разликују се од случаја минимизације у томе што захтев $\mu^* \le 0$ постаје $\mu^* \ge 0$. Изузимањем датог услова се дакле могу одредити све тачке које су потенцијални локални

[6] Каруш-Кун-Такер

минимуми и максимуми. Расписивањем долазимо до

$$2x_1 - x_2 + \lambda_1 + 2\mu_1(x_1 - 1) = 0 \tag{21.2}$$
$$4x_2 - x_1 + \lambda_1 - \mu_1 = 0 \tag{21.3}$$
$$\mu_1((x_1 - 1)^2 - x_2) = 0. \tag{21.4}$$

$1^\circ \mu_1 \neq 0$
Из (21.4) је $x_2 = (x_1 - 1)^2$, што у комбинацији са $x_2 = 2 - x_1$ даје два кандидата

$$X_1^* = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{и} \quad X_2^* = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$2^\circ \mu_1 = 0$
У овом случају из (21.2) и (21.3) следи $3x_1 = 5x_2$, па из $h_1(X) = 0$ закључујемо да је трећи кандидат

$$X_3^* = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Како је $f(X_1^*) \approx 15.71, f(X_2^*) \approx 2.29$ и $f(X_1^*) = 1.75$, закључујемо да је X_3^* тачка минимума, а X_1^* тачка максимума функције f на S. △

Задатак 22 Нека је функција $f : R^2 \to R$, дефинисана са

$$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

Ако је допустив скуп задат са $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,\, x_1 \leq -4\}$

а) Расписати ККТ услове за наведени проблем минимизације.

б) Одредити све локалне минимуме функције f на S.

Решење. а) Увођењем функција $h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1$ и $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 4$ допустиви скуп се може представити са $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, h(X) = 0,\, g(X) \leq 0\}$. Расписивањем услова (9.1), (9.2) и (9.3) долазимо до

$$\mu_1 \geq 0 \tag{22.1}$$
$$2x_1 + \lambda_1 + \mu_1 = 0 \tag{22.2}$$
$$4x_2 + 2\lambda_1 = 0 \tag{22.3}$$
$$6x_3 + 3\lambda_1 = 0 \tag{22.4}$$
$$\mu_1(x_1 + 4) = 0. \tag{22.5}$$

Из (22.3) и (22.3) директно следи

$$x_2 = x_3. \tag{22.6}$$

б) Како $\nabla h_1(X) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ и $\nabla g_1(X) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ нису линеарно зависни, закључујемо да су све тачке допустивог скупа S регуларне. То значи да у свакој тачки скупа S у којој се налази локални минимум, морају бити испуњени ККТ услови.

$1^\circ \mu_1 \neq 0$
Из претпоставке и (22.5) следи да је $x_1 = -4$. Имајући у виду (22.6) и $h_1(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$ закључујемо да су ККТ услови испуњени у

$$X_1^* = (-4, 1, 1),$$

за $\lambda_1 = -2$ и $\mu_1 = 10$.
$2^\circ \mu_1 = 0$
У овом случају из (22.2) и (22.3) следи $x_1 = x_2$. Услов $h_1(X) = 0$ повлачи $x_1 = x_2 = x_3 = 1/6$ што је у контрадикцији са $g(X) = x_1 + 4 \leq 0$.
Дакле, X_1^* је једини кандидат за егзистенцију локалног минимума. Обзиром да је $H_1 = \nabla^2 h_1 = 0, G_1 = \nabla^2 g_1 = 0$, за тачку X_1^* је:

$$F(X_1^*) + \lambda_1^* H(X_1^*) + \mu_1^* G_1(X_1^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Како је ово позитивно дефинитна матрица, довољни услов другог реда (9.5) је очигледно испуњен, па закључујемо да је $X_1^* = (-4, 1, 1)$ једина тачка локалног минимума датог проблема.

*За додатну вежбу се може показати да је X_1^* глобални минимум датог проблема. **Помоћ:** увести нови услов $f(X) - f(X_1^*) \leq 0$. △

Задатак 23 Нека је функција $f : R^2 \to R$, дефинисана са

$$f(X) = x_1 + ax_2^2 \quad , a \in \mathbb{R}.$$

Ако је допустив скуп задат са $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 = 4,\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\}$

а) Расписати ККТ услове за проблем минимизације функције f на S.

б) Одредити све регуларне тачке које задовољавају ове услове у зависности од вредности параметра a.

в) Испитати НУДР и ДУДР за регуларне тачке које испуњавају ККТ услове, када је $a = \frac{1}{2}$.

Решење. а) Увођењем функција $h_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4$, $g_1(x_1, x_2) = -x_1$ и $g_2(x_1, x_2) = -x_2$ допустиви скуп се може представити са $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, h(X) = 0,\, g(X) \leq 0\}$. Расписивањем услова (9.1), (9.2) и (9.3) долазимо до

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0 \tag{23.1}$$
$$1 + 2\lambda_1 x_1 - \mu_1 = 0 \tag{23.2}$$
$$2ax_2 + 2\lambda_1 x_2 - \mu_2 = 0 \tag{23.3}$$
$$-x_1\mu_1 - x_2\mu_2 = 0. \tag{23.4}$$

б) Није тешко уверити се да су све тачке допустивог скупа S регуларне. Као што је напоменуто, услов (23.4) повлачи

$$x_1\mu_1 = 0,\ x_2\mu_2 = 0. \tag{23.5}$$

Из услова (23.2), (23.3) и (23.5) следи да је

$$\mu_1 x_1 = x_1(1 + 2\lambda_1 x_1) = 0 \tag{23.6}$$
$$\mu_2 x_2 = 2x_2^2(a + \lambda_1) = 0. \tag{23.7}$$

$1°\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 \neq 0$:
Ово би подразумевало $x_1 = x_2 = 0$, што није у складу са $h(X) = 0$, па не долази у обзир.
$2°\mu_1 = 0,\ \mu_2 \neq 0$:
У овом случају мора бити $x_2 = 0$, али уз (23.3) ово повлачи $\mu_2 = 0$ што доводи до контрадикције са претпоставком.
$3°\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 = 0$:
У овом случају је због (23.6) $x_1 = 0$, што уз $h(X) = 0$ и $g_2(X) = -x_2 \leq 0$ повлачи $x_2 = 2$. ККТ услови су тада испуњени у

$$X_1^* = (0, 2)\,,$$

за $\lambda_1^* = -a$, $\mu_1^* = 1$, $\mu_2^* = 0$ и свако $a \in \mathbb{R}$.
$4°\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0$:
Имајући у виду (23.2) и (23.3), закључујемо да је $2\lambda_1 x_1 = -1$ и $2x_2(a + \lambda_1) = 0$. У случају да је $x_2 = 0$, из $h_1(X) = 0$, $g_1(X) = -x_1 \leq 0$ директно следи $x_1 = 2$. ККТ услови су тада испуњени у

$$X_2^* = (2, 0)\,,$$

за $\lambda_1^* = -1/4$, $\mu_1^* = 0$, $\mu_2^* = 0$ и свако $a \in \mathbb{R}$.
Ако је $x_2 \neq 0$, (23.7) повлачи $\lambda_1 = -a$. Због (23.6) онда мора бити $1 = 2ax_1$, па је $a \neq 0$ и $x_1 = 1/2a$, што уз $g(x_1) \leq 0$ води до $a > 0$. Из $h_1(X) = 0$ додатно следи $a \geq 1/4$ и $x_2 = \sqrt{4 - 1/4a^2}$. Закључујемо да су ККТ услови испуњени у

$$X_3^* = \left(\frac{1}{2a}, \sqrt{4 - \frac{1}{4a^2}}\right),$$

за $\lambda_1^* = -a$, $\mu_1^* = \mu_2^* = 0$ и $a \in [1/4, \infty)$.

в) У случају $a = 1/2$ кандидати су нам $X_1^* = (0, 2), X_2^* = (2, 0)$ и $X_3^* = (1, \sqrt{3})$. Имамо и да је

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H_1(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ G_1(X) = G_2(X) = 0.$$

За тачку X_1^* је:

$$F(X_1^*) + \lambda_1^* H(X_1^*) + \mu_1^* G_1(X_1^*) + \mu_2^* G_2(X_1^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $\nabla h_1(X_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ и $\nabla g_1(X_1^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, а $J(X_1^*) = J(X_1^*, \mu^*) = \{1\}$, закључујемо да је

$$T(X_1^*) = T(X_1^*, \mu^*) = \{Y : Y \perp [0, 4]^T, Y \perp [-1, 0]^T\} = \{0\}.$$

Одавде је јасно да су у X_1^* испуњени ДУДР и да је ово тачка локалног минимума.

За тачку X_2^* је:

$$F(X_2^*) + \lambda_1^* H(X_2^*) + \mu_1^* G_1(X_2^*) + \mu_2^* G_2(X_2^*) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $\nabla h_1(X_2^*) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}^T$ и $\nabla g_2(X_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, а $J(X_2^*) = \{2\}, J(X_2^*, \mu^*) = \emptyset$, закључујемо да је

$$T(X_2^*) = \{Y : Y \perp [4, 0]^T, Y \perp [0, -1]^T\} = \{0\}$$
$$T(X_2^*, \mu^*) = \{Y : Y \perp [4, 0]^T\} = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Директном провером се потврђује да је и у овом случају испуњен услов (9.5) и да је X_2^* такође тачка локалног минимума.

За тачку X_3^* је:

$$F(X_3^*) + \lambda_1^* H(X_3^*) + \mu_1^* G_1(X_3^*) + \mu_2^* G_2(X_2^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $\nabla h_1(X_3^*) = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$ и $J(X_3^*) = J(X_3^*, \mu^*) = \emptyset$, закључујемо да је

$$T(X_3^*) = T(X_3^*, \mu^*) = \{Y : Y \perp [2, 2\sqrt{3}]^T\} = \{t(-2\sqrt{3}, 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Како је за $Y \in T(X_3^*)$

$$Y^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y = -12t^2 < 0 \quad (t \neq 0),$$

закључујемо да у овој тачки нису испуњени ни НУДР, те да она није тачка локалног минимума. $\triangle$

Итеративни алгоритми које смо користили за решавање проблема безусловне оптимизације могу се прилагодити за решавање проблема условне оптимизације. Овиме се бавимо у наставку.

Прво разматрамо методе пројекције. Идеја је да се у сваком кораку за следећи члан итеративног низа не узима $X^{(k)} + \alpha_k d_k$, који не мора нужно припадати допустивом скупу, већ $\Pi_S(X^{(k)} + \alpha_k d_k)$, где је Π_S оператор пројекције на допустив скуп дефинисан са

$$\Pi_S(X) = \arg\min_{Z \in S} \|Z - X\|.$$

Оператор пројекције је добро дефинисан само за одређене типове допустивог скупа S. Међутим, чак и у таквим случајевима одређивање пројекције $\Pi_S(X)$ може бити компликовано, па чак и подједнако тешко као решавање оригиналног проблема. Због тога се методе пројекције најчешће користе у случајевим када је допустив скуп једноставан.

Посматрајмо најпре случај када је допустив скуп задат са

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - C\| \leq r\} = K[C, r],$$

где је $\|\cdot\|$ стандардна еуклидска норма. Није тешко видети да је у овом случају оператор пројекције једнак

$$\Pi_S(X) = \begin{cases} X, & \text{за } \|X - C\| \leq r \\ C + r\frac{X - C}{\|X - C\|}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Оператор Π_S је такође једностанво одредити када је S задат као n-димензиони квадар, односно са

$$S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n],$$

где су $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, ..., n$. У овом случају пројекцију произвољне тачке $X \in \mathbb{R}^n$ на допустиви скуп S дата је са $\Pi_S(X) = Y$, где је

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{за } x_i \in [a_i, b_i] \\ a_i, & \text{за } x_i < a_i \\ b_i, & \text{за } x_i > b_i \end{cases}.$$

Задатак 24 Посматрајмо проблем минимизације функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2},$$

на $S \subseteq \mathbb{R}$. Написати Матлаб скрипту која решава наведени проблем условне оптимизације коришћењем Њутнове методе са пројекцијом ако је:

а) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + 4)^2 + (x_2 + 2)^2 \leq 1\}$.

б) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 2\}$.

За полазну тачку узети $X^{(0)} = (5, -2)$, максималан број итерација ограничити на 100 и зауставити итеративни процес када је $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq 10^{-6}$.

За крај узмимо у обзир случај када је допустив скуп задат системом линеарних једначина, односно са

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : Ax = b\},$$

где је $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и $\operatorname{rang}(A) = m$, а $b \in \mathbb{R}^m$ задати вектор. У овом случају оператор Π_S одговара оператору ортогоналне пројекције на S, односно, афином пресликавању

$$\Pi_S(X) = X - A^T(AA^T)^{-1}(AX - b).$$

Уколико је $X^{(k)} \in S$, закључујемо да је итеративни корак

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= \Pi_S(X^{(k)} + \alpha_k d_k) = X^{(k)} + \alpha_k d_k - A^T(AA^T)^{-1}(A(X^{(k)} + \alpha_k d_k) - b) \\ &= \Pi_S(X^{(k)}) + \alpha_k d_k - \alpha_k A^T(AA^T)^{-1}Ad_k = X^{(k)} + \alpha_k P d_k, \end{aligned}$$

где је $P = I - A^T(AA^T)^{-1}A$.

Задатак 25 Нека су $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ задате са

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ h(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ако је допустив скуп S задат са $S = \{X \in \mathbb{R}^3 : h(X) = 0\}$, написати Матлаб скрипту/функцију, која одређује да ли и ка чему конвергира итеративни низ $\{X^{(k)}\}$, конструисан при минимизацији f на S методом конјугованих градијената са пројекцијом. За почетну тачку узети $X^{(0)} = (0, 0, 0)$, а за критеријум заустављања користити $\|X^{(k)} - X^{(k+1)}\| \leq 10^{-3}$. Корак α_k одредити линијском претрагом користећи уграђену функцију `fminsearch`, а β_k срачунати по Флечер-Ривсововој формули. Сваких 5 итерација ресетовати правац претраге.

Пројекције које не дају тачку која је нужно најближа. Нпр. за $S = (x, \sin(x) : x \in \mathbb{R}$ може се дефинисати $\Pi_S(x, y) = (x, \sin(x))$. За $S = (x, e^x) : x \in \mathbb{R}$ може се дефинисати $\Pi_S(x, y) = (x, e^x)$, али ово баш и није најбоља идеја.

Осим метода пројекције, још један начин да се итеративне методе за проблем безусловне оптимизације прилагоде условљеном случају јесте коришћењем метода казнених функција. Казнене функције су непрекидне, ненегативне функције које узимају вредност 0 искључиво у тачкама допустивог скупа S. Додавањем казнене функције p помножене адекватним казненим параметром $\gamma > 0$ на полазну функцију циља f, добија се нова функција циља $\hat{f}$ на коју се могу применити методе безусловне оптимизације и чија тачка оптимума представља апроксимацију решења полазног проблема. (Проблем максимизације своди се на минимизацију функције $-f$, па без губитка општости разматрамо минимизацију.)

Нека је допустив скуп задат са

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : h_i(X) = 0,\ i = 1, ..., m,\ g_j(X) \leq 0,\ j = 1, ..., k\}.$$

Казнена функција се у овом случају може задати са

$$p(X) = \sum_i h_i^2(X) + \sum_j \left(g_j^+(X)\right)^2, \qquad g_j^+(X) = \max\{0,\, g_j(X)\}.$$

Овако задата казнена функција позната је као Курaнова казнена функција. Квадрат обезбеђује да је p глатка (диференцијабилна) свуда, а оператор $\max\{0,\cdot\}$ искључује казну унутар допустивог скупа, где је $g_j \leq 0$.

Решење проблема се обично тражи узастопним решавањем проблема безусловне оптимизације

$$F_{\gamma_k}(X) = f(X) + \frac{\gamma}{2}p(X),$$

методама за безусловун оптимизацију, за редом све веће вредности казненог параметра γ_k (нпр. $\gamma_{k+1} = \sigma\gamma_k,\ \sigma > 1$), при чему се за почетно решење сваког следећег проблема користи решење претходног проблема. За овако дефинисан казнени члан важи

$$\nabla F_\gamma(X) = \nabla f(X) + \gamma\left(\sum_{i=1}^m h_i(X)\nabla h_i(X) + \sum_{j=1}^k g_j^+(X)\nabla g_j(X)\right).$$

Пошто се казна плаћа тек ван допустивог скупа, минимизатори типично прилазе решењу споља, кроз недопустиву област, па се ове методе називају и спољашњим. За коначно γ остаје мало нарушење ограничења, које нестаје тек у граници $\gamma \to \infty$. Тада, међутим проблем минимизације функције F_γ постаје лоше условљен и незгодан за нумеричко решавање, што је највећа мана овог приступа.

Задатак 26 Посматрајмо проблем минимизације функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2,$$

на $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$. Написати Матлаб скрипту која решава наведени проблем условне оптимизације градијентним спустом, коришћењем Куранове казнене функције. За полазну тачку узети $X^{(0)} = (0, 0)$, а за казнене параметре користити $\gamma_k = 5^k, k = 0, 1, ..., 10$. Код градијентног спуста максималан број итерација ограничити на 20 и зауставити итеративни процес када је $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq 10^{-4}$. За одређивање дужине корака α_k користити Армихово правило са параметрима $(\hat{\alpha}, c, q) = (1, 0.1, 0.5)$

Док метод казнених функција прилазе допустивом скупу споља, методе баријере раде супротно. Оне подижу зид (баријеру) који дуж границе допустивог скупа тежи ка бесконачности, што за последицу има да се чланови итеративног низа задржавају строго унутар допустивог скупа. Ове методе се зато називају и унутрашњим, и природно се примењује на ограничења неједнакости $g_j(X) \leq 0$. Најчешће се користи логаритамска баријера.

$$F_\gamma(X) = f(X) - \gamma\sum_{j=1}^k \ln\big(-g_j(X)\big).$$

Члан $-\ln(-g_j)$ је коначан када је $g_j(X) < 0$ (строго допустиво), а тежи $+\infty$ када $g_j(X) \to 0^-$, тј. када се чланови итеративног нижа приближавају граници. За разлику од пре, параметар γ сада опада ка нули, чиме се баријера постепено спушта и допушта итератима да приђу правој граници.

Решење проблема се обично тражи узастопним решавањем проблема безусловне оптимизације $\min F_{\gamma_k}(X)$, при чему се полазно решење бира из допустивог скупа, а за параметре γ_k важи $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots \to 0$ (нпр. $\gamma_{k+1} = \sigma\gamma_k,\ \sigma \in (0, 1)$). За полазно решење сваког следећег проблема се, као и код казнених функција, узима решење претходног проблема. За овако дефинисану баријеру важи

$$\nabla F_\gamma(X) = \nabla f(X) - \gamma\sum_{j=1}^k \frac{1}{g_j(X)}\nabla g_j(X).$$

Као и код метода казнених функција, методе баријере трпе лошу условљеност када $\mu \to 0$. Модерне реформулације (метод унутрашње тачке) ту тешкоћу контролишу и представља основу данашњих ефикасних решавача.

Задатак 27 Посматрајмо проблем минимизације функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + \frac{x_2^4}{4},$$

на $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 \leq x_2\}$. Написати Матлаб скрипту која решава наведени проблем условне оптимизације градијентним спустом, коришћењем логаритамске баријере. За полазну тачку узети $X^{(0)} = (2, 1)$, а за параметре баријере користити $\gamma_k = 2^{-k}, k = 0, 1, ..., 10$. Код градијентног спуста максималан број итерација ограничити на 20 и зауставити итеративни процес када је $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq 10^{-4}$. За одређивање дужине корака α_k користити Армихово правило са параметрима $(\hat{\alpha}, c, q) = (1, 0.1, 0.5)$

Метода модификованог (проширеног) Лагранжијана представља један начин да се избегне лоша условљеност проблема, коју са собом повлаче обичне казнене функције и баријере. Чиста квадратна казна није тачна при коначном γ зато што нема начина да представи Лагранжов множилац. Казнени члан сам мора да држи ограничење, што и тера γ у бесконачност. Метод модификованог Лагранжијана отклања ту ману тако што уз казну носи и експлицитну процену множилаца. У ономе што следи ћемо се ради једноставности ограничити на поблеме са условима типа једнакости.

За ограничења $h_i(X) = 0$ дефинише се

$$\mathcal{L}_A(X; \lambda, \gamma) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(X) + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(X).$$

То је обичан Лагранжијан $f + \sum_i \lambda_i h_i$ на који је додата квадратна казна. Метода функционише тако што се $\mathcal{L}_A(X; \lambda, \gamma)$ минимизира по X, за фиксиране λ, γ, а затим се множиоци ажурирају правилом

$$\lambda_i \leftarrow \lambda_i + \gamma \, h_i(X).$$

Услов стационарности минимизатора гласи

$$\nabla f(X) + \sum_{i=1}^{m} \big(\lambda_i + \gamma \, h_i(X)\big) \nabla h_i(X) = 0,$$

а поређење са неопходним условом првог реда $\nabla f(X^\star) + \sum_i \lambda_i^\star \nabla h_i(X^\star) = 0$ показује да је оно што се налази у загради управо следећа процена множиоца. Кључна последица: ако λ конвергира ка $\lambda^\star$, тада $X \to X^\star$ за коначно γ. У овом случају множиоци носе ограничење, а не бесконачна казна, чиме се уклања лоша условљеност чисте казне. Казнени параметар се у пракси такође увећава у свакој итерацији, као и код казнеинх метода, али се на њега такође намеће неко коначно ограничење.

Задатак 28 Посматрајмо проблем минимизације функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2,$$

на $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = e^{x_1}\}$. Написати Матлаб скрипту која решава наведени проблем условне оптимизације градијентним спустом, коришћењем методе модификованог Лагранжијана. За полазну тачку узети $X^{(0)} = (0, 0)$, а полазну процену множиоца и параметре казнене функције користити $\lambda_0 = 0, \ \gamma_k = 2^k, k = 0, 1, ..., 10$. Код градијентног спуста максималан број итерација ограничити на 100 и зауставити итеративни процес када је $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq 10^{-4}$. За одређивање дужине корака α_k користити Армихово правило са параметрима $(\hat{\alpha}, c, q) = (1, 0.1, 0.5)$

Формуле

Градијентне методе:

$$d_k = -f_k$$

Корак најбржег спуста квадратне функције: $\alpha_k = \dfrac{f_k^T f_k}{f_k^T Q f_k}$

Њутнова метода:

$$d_k = -\nabla^2 f(X^{(k)})^{-1} f_k$$

Метода конјугованих градијената:

$$d_0 = -f_0, \quad d_k = -f_k + \beta_{k-1} d_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Флечер-Ривс: $\beta_{k-1} = \dfrac{f_k^T f_k}{f_{k-1}^T f_{k-1}}$

Хестенес-Штифел: $\beta_{k-1} = \dfrac{f_k^T (f_k - f_{k-1})}{d_{k-1}^T (f_k - f_{k-1})}$

Полак-Рибиер: $\beta_{k-1} = \dfrac{f_k^T (f_k - f_{k-1})}{f_{k-1}^T f_{k-1}}$

Квази-Њутнова метода:

$$H_0 = I, \quad d_k = -H_k f_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

За апроксимацију инверза Хесијана:

Алгоритам ранга један: $H_{k+1} = H_k + \dfrac{\varphi_k \varphi_k^T}{\varphi_k^T \Delta f_k}, \quad \varphi_k = \Delta X^{(k)} - H_k \Delta f_k$

ДФП алгоритам: $H_{k+1} = H_k + \dfrac{\Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{H_k \Delta f_k \Delta f_k^T H_k}{\Delta f_k^T H_k \Delta f_k}$

БФГС алгоритам: $H_{k+1} = H_k + \left(1 + \dfrac{\Delta f_k^T H_k \Delta f_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}\right) \dfrac{\Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{H_k \Delta f_k (\Delta X^{(k)})^T + \Delta X^{(k)} \Delta f_k^T H_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}$

За апроксимацију Хесијана:

Алгоритам ранга један: $B_{k+1} = B_k + \dfrac{\psi_k \psi_K^T}{\psi_k^T \Delta X^{(k)}}$, где је $\psi_k = \Delta f_k - B_k \Delta X^{(k)}$

ДФП алгоритам: $B_{k+1} = B_k + \left(1 + \dfrac{(\Delta X^{(k)})^T B_k \Delta X^{(k)}}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}\right) \dfrac{\Delta f_k \Delta f_k^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{B_k \Delta X^{(k)} \Delta f_k^T + \Delta f_k (\Delta X^{(k)})^T B_k}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}}$

БФГС алгоритам: $B_{k+1} = B_k + \dfrac{\Delta f_k \Delta f_k^T}{\Delta f_k^T \Delta X^{(k)}} - \dfrac{B_k \Delta X^{(k)} (\Delta X^{(k)})^T B_k}{(\Delta X^{(k)})^T B_k \Delta X^{(k)}}$