

1 Linearno programiranje

1.1 Grafička metoda

Zadatak 1 Odrediti maksimum funkcije $f(x, y) = 2x + y$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} -x + 3y &\leq 6 \\ 2x + y &\leq 9 \\ x - y &\leq 3 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 2 Odrediti minimum funkcije $f(x, y) = -2x - 3y + z$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} -x + y &\geq -1 \\ -\frac{x}{2} - y &\geq -1 \\ -x - 2y + z &= 0 \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 3 Odrediti minimum funkcije $f(x, y) = -2x + y$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 4 \\ x + y &\geq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\leq 1. \end{aligned}$$

1.2 Furije-Mockinov metod eliminacije

Zadatak 4 Odrediti barem jednu tačku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koja ispunjava ograničenja

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 1 \\ x + y &\leq 5 \\ 2x + y &\leq 8 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 5 Odrediti barem jednu tačku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koja ispunjava ograničenja

$$\begin{aligned} x - y &\geq 1 \\ -x + 2y &\geq 1 \\ 3x - 5y &\leq 1 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 6 Odrediti barem jednu tačku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koja ispunjava ograničenja

$$\begin{aligned} -2x + 2y - z &\geq 3 \\ 3x - 3y - 5z &\geq 8 \\ x + 4y + 7z &\geq 9 \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 7 Rešiti optimizacioni problem iz [1. zadatka](#) koristeći Furije-Mockinovu metodu eliminacije.

Zadatak 8 Furije-Mockinovom metodom eliminacije odrediti minimum funkcije $f(x, y, z) = -x + y + z$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} 2x - y + z &\leq -1 \\ -x + 3y - 5z &\leq 3 \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

1.3 Dual problema i uslovi komplementarnosti

Zadatak 9 Zapisati dual sledećeg problema linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 10 Zapisati dual sledećeg problema linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & 12x_1 - 13x_2 - 10x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - 1x_3 \geq 13 \\ & -1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 11 Odrediti da li je $\hat{x} = (2, 0, 1)$ optimalno rešenje problema linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \\ & 4x_1 + 2x_3 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 12 Odrediti da li je $\hat{x} = (1, 0, 1)$ optimalno rešenje problema linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_3 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 0 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ & 3x_1 - 4x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 13 Odrediti dual sledećeg problema linearnog programiranja, rešiti ga grafičkom metodom i na osnovu uslova komplementarnosti odrediti rešenje primala.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

1.4 Simpleks metoda

Zadatak 14 Simpleks metodom rešiti sledeci problem linearnog programiranja, ako su x_1 i x_2 polazne bazne promenljive.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 15 Tabličnom simpleks metodom rešiti sledeće probleme linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \text{a) } \min \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 3x_3 = 4 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \min \quad & -x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 16 Tabličnom simpleks metodom rešiti sledeći problem linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 \\ & 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ & x_1 - x_6 = 0 \\ & x_3 + x_6 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 17 Dvofaznom simpleks metodom rešiti sledeće probleme linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_3 + x_4 \\ & -x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & -x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 18 Dual simpleks metodom rešiti sledeće probleme linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & 9x_1 + x_2 + x_3 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 2x_2 \\ & -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 19 Rešiti sledeće probleme parametarskog linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & x_1 - 2x_3 - x_4 = 2 - a \\ & x_2 - x_3 + x_4 = a - 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 - a \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 + a \\ & x_1, x_2 \geq 0, a \geq 0. \end{aligned}$$

1.5 Transportni problem i problem raspoređivanja

Zadatak 20 Rešiti izbalansirani transportni problem i odrediti minimalnu ukupnu cenu transporta, ukoliko su ponuda (količine robe na skladistu), potreba (potražnja) i cene transporta između parova skladišta i prodavnica zadati sledećom tabelom:

a)

	K1	K2	K3	K4	Ponuda
S1	20	11	15	13	2
S2	17	14	12	13	6
S3	15	12	18	18	7
Potreba	3	3	4	5	

b)

	K1	K2	K3	Ponuda
S1	2	3	4	2
S2	1	6	1	6
S3	3	4	2	4
Potreba	3	5	4	

Zadatak 21 Rešiti neizbalansirani transportni problem i odrediti minimalnu ukupnu cenu transporta, ukoliko su ponuda (količine robe na skladistu), potreba (potražnja) i cene transporta između parova skladišta i prodavnica zadati sledećom tabelom:

a)

	K1	K2	K3	Ponuda
S1	5	1	2	7
S2	3	6	4	6
S3	2	3	7	7
Potreba	10	9	6	

b)

	K1	K2	K3	Ponuda
S1	4	5	2	9
S2	3	3	3	8
S3	3	4	5	7
Potreba	5	6	5	

Zadatak 22 Neka su vremena izvršavanja poslova radnika na različitim mašinama zadati u sledećoj tabeli. Odrediti raspored kojim se minimizuje ukupno vreme izvršavanja poslova.

a)

	M1	M2	M3
R1	10	8	6
R2	8	5	9
R3	9	6	7

b)

	M1	M2	M3
R1	3	5	6
R2	4	5	8
R3	4	4	7
R4	3	6	5
R5	4	7	4

c)

	M1	M2	M3	M4
R1	65	73	63	57
R2	67	70	65	58
R3	68	72	69	55
R3	71	69	75	57
R3	69	71	66	59

1.6 Matrične igre

Zadatak 23 ODrediti optimalne strategije i vrednost matrične igre sa čistim strategijama zadate matricom:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadatak 24 Rešiti matričnu igru sa mešovitim strategijama zadatu matricom:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Celobrojno programiranje

2.1 Gomorijev metod odsecanja

Zadatak 25 Rešiti sledeći problem celobrojnog programiranja korišćenjem Gomorijeve metode odsecanja.

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & 6x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zadatak 26 Rešiti sledeći problem celobrojnog programiranja korišćenjem Gomorijeve metode odsecanja.

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.2 Problem ranca

Zadatak 27 Rešavanjem unapred, odrediti rešenje sledećeg problema ranca.

a)

$$\begin{aligned} \max \quad & 21x_1 + 34x_2 + 30x_3 + 42x_4 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x_1 + 2x_2 + 25x_3 + 10x_4 \\ & 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zadatak 28 Rešavanjem unazad, odrediti rešenje sledećeg problema ranca.

a)

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x_1 + 31x_2 + 35x_3 \\ & 7x_1 + 10x_2 + 12x_3 \leq 37 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 \\ & 12x_1 + 21x_2 + 23x_3 + 29x_4 \leq 87 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.3 Grananje i ograničavanje

Zadatak 29 Implicitnim prebrojavanjem rešiti sledeći problem celobrojnog programiranja.

a)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \\ & x_1 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Zadatak 30 Dakinovom metodom rešiti sledeći problem celobrojnog programiranja.

a)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 5x_2 \\ & -8x_1 + 33x_2 \leq 110 \\ & 28x_1 + 9x_2 \leq 196 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

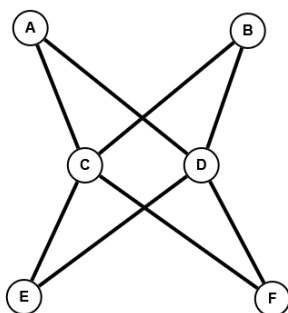
b)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 6x_1 + 22x_2 \geq 33 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

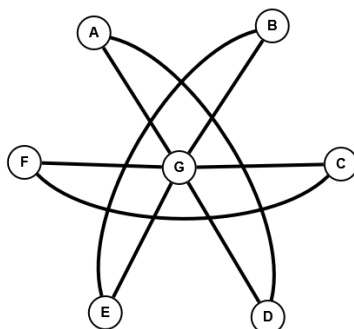
3 Algoritmi na grafovima

Zadatak 31 Orijentisati grane nusmerenog grafa tako da rezultujući digraf bude jako povezan. Ukoliko je to nemoguće, pronaći most u grafu.

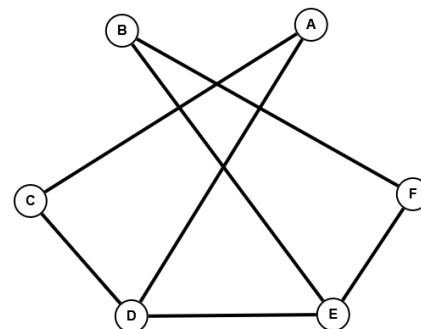
a)



b)

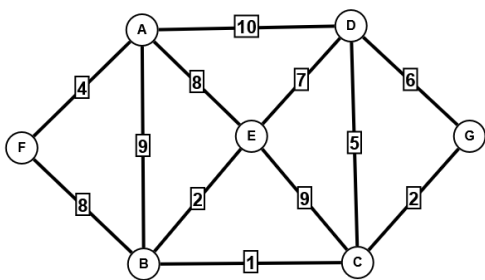


c)

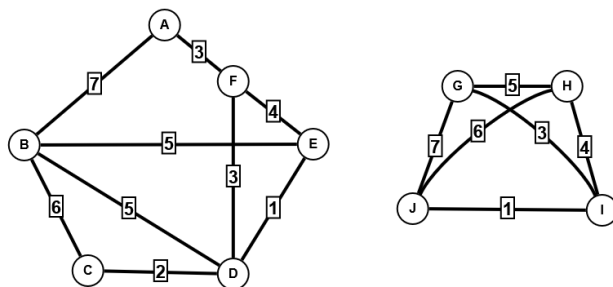


Zadatak 32 Kruskalovim algoritmom odrediti razapinjuće stablo/šumu minimalne težine.

a)

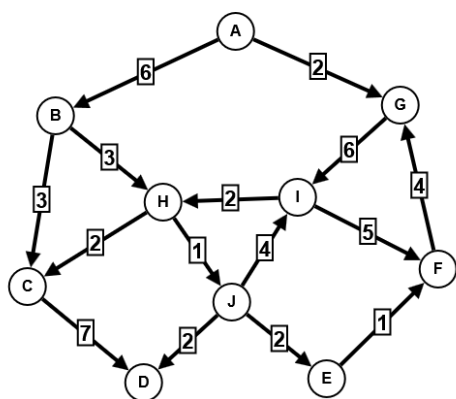


b)

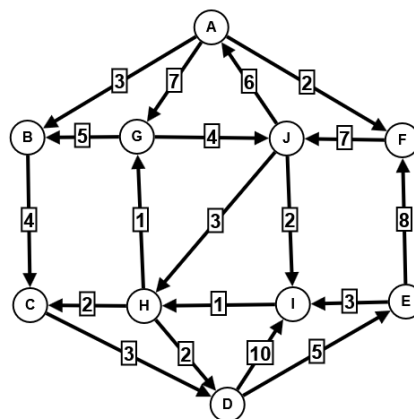


Zadatak 33 Edmondsonovim algoritmom odrediti minimalno orijentisano korensko razapinjuće stablo iz čvora A, ukoliko postoji.

a)

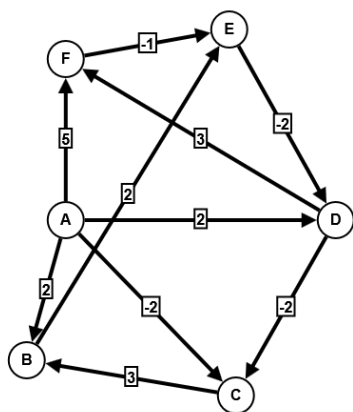


b)

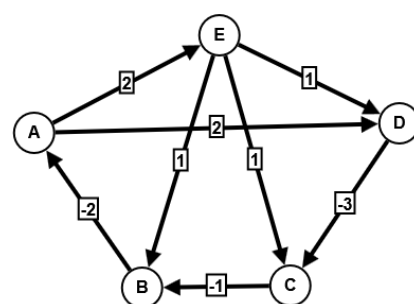


Zadatak 34 Odrediti najkraće puteve od čvora A do ostalih čvorova korišćenjem Belmanovog algoritma.

a)

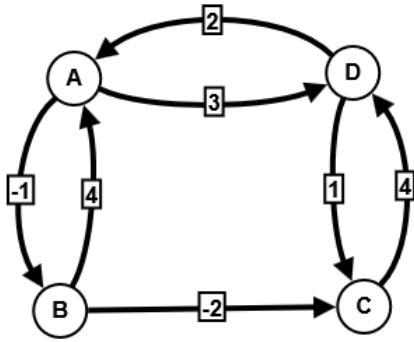


b)

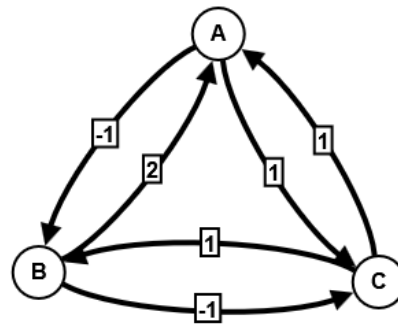


Zadatak 35 Floyd-Voršolovim algoritmom odrediti dužine najkraćih puteva u sledećem grafu.

a)

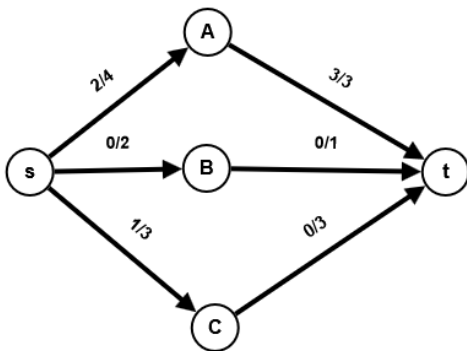


b)



Zadatak 36 Odrediti maksimalan tok od čvora s do čvora t u sledećem grafu.

a)



b)

