Писмени испит из Теорије бројева 1
31. август 2023.

1 Дате су аритметичке функције

$$\lambda(n)=\prod_{p^\alpha\|n}(-1)^\alpha, \qquad \Box(n)=\begin{cases}1, & \text{ако је } n \text{ потпун квадрат,}\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases} \qquad \text{и} \qquad f(n)=\sum_{m=1}^{n}\lambda(m)\left[\frac{n}{m}\right].$$

а) Показати да је $\sum_{d\mid n}\lambda(d)=\Box(n)$.

б) Показати да је $f(n)=\Box(n)+f(n-1)$, за $n\neq 1$, и израчунати $f(2023)$.

2 Показати да важи

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_3(n)=\frac{1}{2}x(\log x)^2+(3\gamma-1)x\log x+O(x),$$

кад $x\to\infty$, где је $\tau_3(n)=\sum_{d_1d_2d_3=n}1$.

3 Нека је $p\equiv 1 \pmod 6$ прост број, χ Дирихлеов карактер реда 6 по модулу p и нека је N број решења конгруенције $y^2\equiv x^3+1 \pmod p$.

а) Показати да је $N=p+2\Re J\left(\chi^2,\chi^3\right)$.

б) Показати да је $J\left(\chi^2,\chi^3\right)=\sum_{t=0}^{p-1}\chi^2\left(1-t^2\right)$.

в) Показати да за свако $k\in\mathbb{Z}$, $p\nmid k$, важи $\dfrac{\chi^4(2)}{\chi^4(k)}\sum_{t=0}^{p-1}\chi^2(t(k-t))=J\left(\chi^2,\chi^3\right)$.

г) Показати да је $\chi^4(2)G\left(\chi^2\right)^2=J\left(\chi^2,\chi^3\right)G\left(\chi^4\right)$.

д) Показати да је $J\left(\chi^2,\chi^3\right)=\chi^4(2)J\left(\chi^2,\chi^2\right)$.

(Напонема: Овим је проблем сведен на Јакобијеву суму кубног карактера χ^2 коју знамо да израчунамо.)

4 Нека је α корен полинома $f(x)=x^3+2x^2+4$ и $\beta=\dfrac{\alpha^2}{2}$ и нека је $K=\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\beta)$.

а) Израчунати дискриминанту $d\left(1,\alpha,\alpha^2\right)$.

б) Показати да је β алгебарски цео број и одредити његов минимални полином.

в) Показати да је $\mathbb{Z}[1,\alpha,\beta]=\mathbb{Z}\left[1,\beta,\beta^2\right]=\mathcal{O}_K$.

Време за рад је 3 сата. Срећно!