Писмени испит из Теорије бројева 1

21. јун 2023.

① Дате су аритметичке функције $N_k(n) = \sum_{m \leqslant n} m^k$ и $\varphi_k(n) = \sum_{\substack{m \leqslant n \\ \text{НЗД}(m,n)=1}} m^k$, за $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (Специјално, $\varphi_0 = \varphi$.) Показати да важи

а) $N_k(n) = \sum_{d \mid n} \varphi_k(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k$, б) $\varphi_k(n) = \sum_{d \mid n} N_k(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k \mu\left(\frac{n}{d}\right)$,

в) $\varphi_2(n) = \frac{n^2 \varphi(n)}{3} + \frac{n}{6} \prod_{p \mid n} (1-p)$, за $n \neq 1$.

② Показати да важи

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p \log\log p} = \log\log\log x + c_1 + \frac{c_2}{\log\log x} + O\left(\frac{1}{\log x \log\log x}\right),$$

за неке реалне константе c_1 и c_2, кад $x \to \infty$.

③ За $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$ и непаран прост број p означимо са $N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ број природних бројева $n \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$ таквих да је $\left(\frac{n}{p}\right) = \varepsilon_1$ и $\left(\frac{n+1}{p}\right) = \varepsilon_2$. Показати да је

а) $N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dfrac{p - 2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \left(\frac{-1}{p}\right)}{4}$,

б) $N(1,1) = \left[\frac{p-3}{4}\right] = N(1,-1) - 1$ и $N(-1,1) = N(-1,-1) = \begin{cases} N(1,-1), & \text{ако је } p \equiv 1 \pmod 4, \\ N(1,1), & \text{ако је } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$

④ Нека је $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ пети корен из јединице и $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)} = \mathbb{Z}[\zeta]$ прстен целих одговарајућег циклотомичног бројног поља.

а) Израчунати дискриминанту овог бројног поља.

б) Ако је $\mathfrak{p} = \langle \zeta - 1 \rangle$ показати да важи $\langle \zeta^j - 1 \rangle = \mathfrak{p}$, за све $j = 1, 2, 3, 4$. Показати да је $\langle 5 \rangle = \mathfrak{p}^4$ и да је $\mathfrak{p}$ прост идеал у $\mathbb{Z}[\zeta]$.

в) Показати да важи $\langle 11 \rangle = \langle 11, \zeta^2 + 4\zeta + 1 \rangle \cdot \langle 11, \zeta^2 + 8\zeta + 1 \rangle$.

($\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ свуда означава идеал у $\mathbb{Z}[\zeta]$ генерисан са $a_1, \ldots, a_r$.)

Време за рад је 3 сата. Срећно!