Писмени испит из Теорије бројева 1
2. фебруар 2023.

(1) Мебијусова функција реда k је дефинисана на следећи начин: Ако је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, факторизација природног броја n на просте чиниоце таква да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_r$, тада је

$$\mu_k(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } a_1 \geqslant k+1, \\ 1, & \text{ако је } a_1 \leqslant k-1, \\ (-1)^j, & \text{ако је } a_1 = \cdots = a_j = k \text{ и } a_{j+1} \leqslant k-1. \end{cases}$$

Подразумевамо да је $\mu_k(1) = 1$. Показати да је за $k \geqslant 2$ функција μ_k мултипликативна и задовољава једнакост

$$\mu_k(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right).$$

(2) Показати да важи

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} \log x + c + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

за неку константу c, кад $x \to \infty$.

(3) Нека је $p \equiv 1 \pmod 4$ прост број, χ Дирихлеов карактер по модулу p реда 4 и нека је N број решења конгруенције $x^4 + y^2 \equiv 1 \pmod p$ по $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Ако је $J\left(\chi, \chi^2\right) = a + bi$, за $a, b \in \mathbb{Z}$, показати да је:

а) $N = p - 1 + 2a$,

б) $N = p + 1 + \sum\limits_{n=0}^{p-2} \chi^2\left(1 - g^{4n}\right)$, где је g генератор мултипликативне групе $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$,

в) $a \equiv 2(-1)^m \binom{2m}{m} m \pmod p$, где је $m = \frac{p-1}{4}$.

(4) Одредити прстен целих кубног бројног поља $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{172}\right)$.

Време за рад је 3 сата. Срећно!