УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Драган З. Ђокић

ШЕСТИ МОМЕНТ ДИРИХЛЕОВИХ L-ФУНКЦИЈА НАД РАЦИОНАЛНИМ ФУНКЦИЈСКИМ ПОЉИМА

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Dragan Z. Đokić

THE SIXTH MOMENT OF DIRICHLET L-FUNCTIONS OVER RATIONAL FUNCTION FIELDS

doctoral dissertation

Belgrade, 2022.

Ментор:

др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Драган Станков, ванредни професор
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Мојим сестрама,
Маји и Александри

Наслов дисертације: Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима

Резиме: Расподела простих бројева је одређена расподелом нула Риманове зета функције, а посредно и расподелом величине ове функције на критичној линији $\Re s = \frac{1}{2}$. Слично, у циљу разматрања расподеле простих бројева у аритметичким низовима, Дирихле је увео L-функције као уопштење Риманове зета функције. Уопштена Риманова хипотеза, најзначајнији отворени проблем у математици, предвиђа да се све нетривијалне нуле Дирихлеове L-функције налазе на критичној линији.

Зато је један од главних циљева у Аналитичкој теорији бројева разматрање момената Дирихлеових L-функција (по одређеној добро дефинисаној фамилији). Веза са карактеристичним полиномима случајних унитарних матрица је један од основних алата за хеуристичко разумевање L-функција и извођење хипотеза о асимптотским формулама за њихове моменте. Асимптотика за парне моменте

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt,$$

кад $T \to \infty$, је и даље отворено питање (изузев за $k = 1, 2$), и повезано је са Линеделефовом хипотезом.

У овој дисертацији разматрамо шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$, где је $\mathbb{F}_q$ коначно поље. Приказаћемо асимптотску формулу за шести момент са троструким усредњењем

$$\sum_{\substack{Q \text{ моничан} \\ \deg Q = \mathbf{d}}} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ \chi \text{ непаран примитиван}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}$$

кад $\mathbf{d} \to \infty$. Сва додатна усредњења су тренутно неопходна за добијање асимптотике. Сумирање по Дирихлеовим карактерима и њиховим модулима је мотивисано Теоремом Бомбијери-Виноградова. Наш резултат је аналог за функцијска поља рада [25] за одговарајућу фамилију и усредњавање над пољем $\mathbb{Q}$. Такође, наш главни члан потврђује постојеће хипотезе из Теорије случајних матрица.

Кључне речи: Дирихлеове L-функције, моменти L-функција, рационална функцијска поља, Теорија случајних матрица, Хајесове L-функције

Научна област: Математика

Ужа научна област: Аналитичка теорија бројева

УДК број: 511.331::24(043.3)

Dissertation title: The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields

Abstract: The distribution of primes is determined by the distribution of zeros of Riemann zeta function, and indirectly by the distribution of magnitude of this function on the critical line $\Re s = \frac{1}{2}$. Similarly, in order to consider the distribution of primes in arithmetic progressions, Dirichlet introduced L-functions as a generalization of Riemann zeta function. Generalized Riemann hypothesis, the most important open problem in mathematics, predicts that all nontrivial zeros of Dirichlet L-function are located on the critical line.

Therefore, one of the main goals in Analytic Number Theory is to consider the moments of Dirichlet L-functions (according to a certain well defined family). The relation with the characteristic polynomials of random unitary matrices is one of the fundamental tools for heuristic understanding of L-functions and derivation hypotheses about asymptotic formulae for their moments. Asymptotics for even moments

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt,$$

as $T \to \infty$, is still an open question (except for $k = 1, 2$), and it is related to the Lindelöf Hypothesis.

In this dissertation we consider the sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$, where $\mathbb{F}_q$ is a finite field. We will present the asymptotic formula for the sixth moment with the triple average

$$\sum_{\substack{Q \text{ monic} \\ \deg Q = \mathbf{d}}} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ \chi \text{ odd primitive}}} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}$$

as $\mathbf{d} \to \infty$. All additional averaging is currently necessary to obtain the asymptotics. The summation over Dirichlet characters and their moduli is motivated by Bombieri-Vinogradov Theorem. Our result is a function field analogue of the paper [25] for the corresponding family and averaging over field $\mathbb{Q}$. Also, our main term confirms the existing Random matrix theory predictions.

Keywords: Dirichlet L-functions, moments of L-functions, rational function fields, Random matrix theory, Hayes L-functions

Research area: Mathematics

Research sub-area: Analytic number theory

UDC number: 511.331::24(043.3)

Захвалница

Пре свега, велику захвалност дугујем свом ментору, проф. др Горану Ђанковићу, на уложеном времену и труду да своје математичко знање и искуство подели са мном. Захваљујем му се што ме је увео у истраживачки процес и што је радио са мном још од првог дана мастер студија.

Желео бих да се захвалим члановима комисије, проф. др Александру Липковском, проф. др Марку Радовановићу, проф. др Драгану Станкову и др Тањи Стојадиновић, на пажљивом читању рукописа и корисним коментарима и смерницама, којима су унапредили ову дисертацију.

Посебно се захваљујем мојим колегама и коауторима Николи Леласу и Илији Врећици. Рад у групи, и уз подршку нашег заједничког ментора, је значајно унапредио и убрзао докторске студије.

Захвалио бих се и проф. др Зорану Ракићу и целој Катедри за геометрију, што су ми омогућили да као предавач активно учествујем у раду њиховог семинара.

На крају, велику захвалност дугујем својој породици и пријатељима, који су својим стрпљењем, подршком и позитивном енергијом допринели реализацији ове дисертације.

У Ораовици, октобра 2022. *Драган Ђокић*

Садржај

Списак ознака

Асимптотске ознаке (f и h су функције са комплексним вредностима, а g функција са позитивним вредностима):

O и $\ll$ — Пишемо $f(x) = O(g(x))$ (Ландауов симбол) или $f(x) \ll g(x)$ (симбол Виноградова), кад $x \to \infty$, ако постоји константа $C > 0$ таква да важи $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ за све довољно велике вредности x. Уколико желимо да нагласимо да функције f и g и константа C зависе од параметра a писаћемо O_a или $\ll_a$.

o — Пишемо $f(x) = o(g(x))$, кад $x \to \infty$, ако је $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$\sim$ — Пишемо $f(x) \sim h(x)$, кад $x \to \infty$, ако је $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$.

$\asymp$ — Пишемо $f(x) \asymp g(x)$, кад $x \to \infty$, ако је $f(x) \ll g(x)$ и $g(x) \ll |f(x)|$, кад $x \to \infty$.

Симболи:

ε — Произвољно мали позитиван број (не обавезно исти у сваком појављивању).

$\Re$ — Реални део комплексног броја.

$\Im$ — Имагинарни део комплексног броја.

$[\cdot]$ — Са $[x]$ означавамо цео део реалног броја x.

$(\cdot,\cdot)$ — Са (m, n) означавамо највећи заједнички делилац бројева (полинома) m и n.

$[\cdot,\cdot]$ — Са $[m, n]$ означавамо најмањи заједнички садржалац бројева (полинома) m и n.

$\#$ — Са $\#S$ означавамо број елемената скупа S.

$\times$ — Са $M^{\times}$ означавамо групу јединица (инвертибилних елемената) моноида M.

Познате функције и константе:

Γ Гама функција $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} e^x dx$, за $s \in \mathbb{C}$.

γ Ојлер-Маскеронијева константа

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(-\log n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = -\Gamma'(1) \approx 0,577.$$

B_n n-ти Бернулијев број је коефицијент у развоју $\dfrac{x}{e^x - 1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n x^n}{n!}$.

δ_0 Диракова функција (дистрибуција): $\delta_0(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ако је } x = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

e Адитивни карактер $e(\theta) = e^{2\pi i\theta}$, за $\theta \in \mathbb{R}$.

φ Ојлерова функција $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = n \prod\limits_{\substack{p \text{ прост} \\ p|n}} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, за $n \in \mathbb{N}$.

ω Број простих делилаца $\omega(n) = \sum\limits_{\substack{p \text{ прост} \\ p|n}} 1$, за $n \in \mathbb{N}$.

τ Број делилаца $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$, за $n \in \mathbb{N}$.

τ_k Број могућих разлагања природног броја n на k делилаца: $\tau_k(n) = \sum\limits_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \\ n_1 n_2 \ldots n_k = n}} 1$.

Λ Фон Манголтова функција (од природног броја n) је

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ако је } n \text{ степен простог броја } p, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ За прост број p и цео број a, $(a, p) = 1$, Лежандров симбол $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ је

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1 + \# \left\{ x \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \;\middle|\; x^2 \equiv a \pmod{p} \right\}.$$

Кронекеров симбол $\left(\dfrac{a}{n}\right)$, за $n \in \mathbb{Z}$, уопштава Лежандров симбол тако што је тотално мултипликативан по n и важи

$$\left(\frac{a}{-1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } a \geqslant 0, \\ -1, & \text{ако је } a < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \left(\frac{a}{0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } a = \pm 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

W Вандермондова детерминанта

$$W(z_1, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < l \leqslant n} (z_l - z_j).$$

Стандардне групе:

$U(N)$ Унитарна група реда N: скуп свих $N \times N$ комплексних матрица A таквих да важи $AA^* = A^*A = E$.

$O(N)$ Ортогонална група реда N: скуп свих реалних матрица из $U(N)$.

$Sp(2N)$ (Унитарна) симплектичка група реда $2N$: скуп свих матрица $A \in U(2N)$ за које важи $U^T JU = J$, где је $J = \begin{pmatrix} 0 & E_N \\ -E_N & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 1

Увод

1.1 Риманова зета функција и прости бројеви

Риманова зета функција је аналитички објекат (мероморфна функција) која контролише просте бројеве и њихову расподелу. За $\Re s > 1$ ова функција је дефинисана редом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1.1}$$

Везу Риманове зета функције са *простим бројевима* је први приметио Ојлер у раду [33] из 1737. године. Изразио је зета функцију у облику производа по простим бројевима (тзв. *Ојлеров производ*)

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

Дивергенција реда (1.1) за $\Re s \leqslant 1$ је један од доказа да има бесконачно много простих бројева. Даљим изучавањем зета функције, или прецизније $\lim\limits_{s \to 1+} \log \zeta(s)$, Ојлер долази до чувене формуле

$$\sum_{\substack{p \text{ прост} \\ p \leqslant x}} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1),$$

кад $x \to \infty$. Појачана верзија претходне оцене је позната и као Друга Мертенсова теорема (видети [3, Последица 2.7]).

Помоћу производа (1.2) Ојлер добија изразе за зета функцију од првих неколико парних бројева. Ови резултати су касније уопштени у

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

за све $n \in \mathbb{N}$, где B_{2n} означава $2n$-ти Бернулијев број (детаљније у [13, Поглавље 12.12]). Специјално, $\zeta(2n)$ је ирационалан број за све $n \in \mathbb{N}$. Вредности зета функције од непарних бројева је много теже разумети. У [72] је показано да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је број $\zeta(2n+1)$ ирационалан. Додатно, познато је да је $\zeta(3)$ ирационалан [12], као и да у сваком од скупова $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\}$, $\{\zeta(7), \zeta(9), \ldots, \zeta(37)\}$ и $\{\zeta(9), \zeta(11), \ldots, \zeta(53)\}$ постоји бар по један ирационалан број [4, 5].

Риман у свом мемоару [71] из 1859. године почиње да изучава зета функцију као функцију комплексне променљиве s методама комплексне анализе. Показао је да зета функција има мероморфно продужење на целу комплексну раван, при чему у тачки $s = 1$ има прост пол са резидуумом 1. Главна идеја његовог доказа је коришћење тзв. *Јакобијеве тета-функције*

$$\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

која задовољава функционалну једначину

$$\Theta\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{2}}\Theta(x). \tag{1.3}$$

Риман најпре елементарним рачуном долази до идентитета

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)\,dx,$$

за $\Re s > 1$, где је

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} = \frac{\Theta(x)-1}{2}.$$

Затим, помоћу функционалне једначине (1.3) добија

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\Psi(x)\,dx, \tag{1.4}$$

при чему интеграл на десној страни конвергира за све $s \in \mathbb{C}$ и даје *мероморфно продужење* зета функције. Десна страна има просте полове у двема тачкама, тачка $s = 1$ ће бити пол Риманове зета функције, док је тачка $s = 0$ заправо прост пол гама функције. Додатно, гама функција има просте полове и у тачкама $s \in -2\mathbb{N}$, што значи да зета функција мора имати нуле у тим тачкама. Ове нуле ћемо звати *тривијалним нулама* Риманове зета функције.

Десна страна (1.4) је инваријантна на смену $s \longleftrightarrow 1-s$, што даје функционалну једначину зета функције:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{1.5}$$

за све $s \in \mathbb{C}$. Другим речима, *комплетирана зета функција* $\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ задовољава симетричну функционалну једначину $\xi(s)=\xi(1-s)$. Зато се често каже да је права $\Re s=\frac{1}{2}$ „оса симетрије“ зета функције, иако је то суштински централна симетрија око тачке $s=\frac{1}{2}$.

Једно познато (и делимично отворено) питање у Теорији бројева је асимптотско понашање функције

$$\pi(x)=\#\{p\leqslant x\,|\,p \text{ је прост}\}=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ прост}}}1.$$

На основу одређених израчунавања и апроксимација Гаус [38] у писму из 1849. године долази до претпоставке да је

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\sim\int_2^x\frac{dt}{\log t}, \tag{1.6}$$

кад $x\to\infty$ (*Теорема о простим бројевима*). Интеграл $\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$ је познат као логаритамски интеграл и не може се израчунати аналитичким методама. Овај интеграл се може асимптотски оценити са $\mathrm{Li}(x)=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$. Ради једноставности, обично се уместо бројачке функције $\pi(x)$ користе тзв. *Чебишовљеве функције*

$$\theta(x)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ прост}}}\log p \qquad \text{и} \qquad \psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$$

које броје просте са одређеним тежинама. Еквивалент Теореми о простим бројевима је

$$\theta(x)\sim x, \qquad \text{односно} \qquad \psi(x)\sim x,$$

кад $x\to\infty$.

Први велики напредак у правцу Теореме о простим бројевима дао је Чебишов [7] пар година пре објављивања Римановог мемоара. Он је показао да је функција $\frac{\theta(x)}{x}$, а самим тим и $\pi(x)\frac{\log x}{x}$, ограничена и одоздо и одозго за велико x. Помоћу тих неједнакости Чебишов је доказао да за сваки природан број n у интервалу $(n, 2n)$ постоји бар један прост број (*Бертранов постулат*).

Адамар [43] и де ла Вале Пусин [27] 1896. године независно долазе до израза

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho\in Z} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \tag{1.7}$$

где је

$$Z = \{\rho = \beta + i\gamma \in \mathbb{C} \,|\, \zeta(\rho) = 0,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\},$$

скуп нетривијалних нула Риманове зета функције. (Лако се показује да се све нетривијалне нуле зета функције налазе у тзв. *критичној траци* $0 \leqslant \Re s \leqslant 1$.)

Овим је добијен „главни члан" у Теореми о простим бројевима: $\psi(x) \sim x$, кад $x \to \infty$. Међутим, остаје питање колика је грешка $\psi(x) - x$, односно $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$, и да ли је та грешка уопште мања од поменутог „главног члана". На основу (1.7) имамо

$$\psi(x) - x \ll \sum_{\rho\in Z} \frac{x^{\Re\rho}}{|\rho|} \ll \sum_{\beta+i\gamma\in Z(T)} \frac{x^\beta}{\gamma} \leqslant \sup_{\beta+i\gamma\in Z(T)} x^\beta \sum_{\beta+i\gamma\in Z(T)} \frac{1}{\gamma},$$

где је $Z(T) = \{\beta + i\gamma \in Z \,|\, 0 < \gamma < T\}$ и T оптимално изабран параметар засецања. Овде ће то бити конкретно $T = e^{(\log x)^{\frac{1}{2}}}$, али сви резултати који ће бити изложени важе за општи параметар T. Дакле, имамо два питања:

- Прво треба ограничити суму $\sum_{\beta+i\gamma\in Z(T)} \frac{1}{\gamma}$. Нека је

  $$N(T) = \#Z(T) = \sum_{\beta+i\gamma\in Z(T)} 1$$

  број нула Риманове зета функције на делу критичне траке. Асимптотску формулу

  $$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.8}$$

  је предвидео Риман у свом мемоару [71], а доказао фон Маголт [81]. Парцијалном сумацијом из (1.8) добијамо $\sum_{\beta+i\gamma\in Z(T)} \frac{1}{\gamma} \ll (\log T)^2$.

- Слично, треба ограничити $\sup_{\beta+i\gamma\in Z(T)} x^\beta$. Тривијална оцена $\beta \leqslant 1$ неће дати довољно добар резултат, па треба покушати са сужењем критичне траке.

Тренутно најбоља позната оцена је

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c}{(\log\gamma)^{\frac{2}{3}}(\log\log\gamma)^{\frac{1}{3}}}, \tag{1.9}$$

где је c апсолутна константа, коју су дали Виноградов [1] и Коробов [6] (видети и [53, Глава 6]). Следи, $\sup\limits_{\beta+i\gamma\in Z(T)} x^{\beta} \leqslant x^{1-\frac{c}{(\log T)^{\frac{2}{3}}(\log\log T)^{\frac{1}{3}}}}$, што заједно са претходном дискусијом даје Теорему о простим бројевима у облику

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-c\frac{(\log x)^{\frac{3}{5}}}{(\log\log x)^{\frac{1}{5}}}}\right).$$

Хипотеза 1.10 (Риманова хипотеза)**.** *Све нетривијалне нуле Риманове зета функције имају реални део* $\frac{1}{2}$ *(тзв. критична линија).*

Из Риманове хипотезе следи

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2\right). \tag{1.11}$$

Видимо да је оцена (1.9) само мало боља од тривијалне оцене ($\beta \leqslant 1$), и још увек далеко од Риманове хипотезе. Са друге стране, за разлику од тривијалне, оцена (1.9) је довољна за доказ Теореме о простим бројевима. Свако побољшање у овој оцени доноси оштрију оцену грешке у Теореми о простим бројевима, а занимљиво је да важи и обрнуто.

Риманова хипотеза представља најважнији и најпознатији отворен проблем у математици. То је један од седам миленијумских проблема за чије решење Математички институт Клеј нуди награду од милион америчких долара. Урађено је више нумеричких провера које потврђују Риманову хипотезу (нпр. [68]). Такође, у [18] је показано да се најмање 41% нула зета функције налази на критичној линији.

За крај, навешћемо још једно занимљиво својство зета функције, познато као Вороњинова теорема универзалности [2]. Претпоставимо да је K компактан подскуп од $\left\{s \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{2} < \Re s < 1\right\}$ са повезаним комплементом, и $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ функција која је холоморфна у унутрашњости K и нема нуле на K. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $t \geqslant 0$такво да је

$$|f(s) - \zeta(s+it)| < \varepsilon,$$

за све $s \in K$.

1.2 Дирихлеове L-функције и прости бројеви у аритметичким низовима

Као што су у Римановој зета функцији записане информације о простим бројевима, L-функције садрже информације о разним аритметичким објектима. Конкретно, Дирихлеове L-функције служе за детектовање простих бројева у аритметичким низовима.

Нека је $r \geqslant 2$ природан број. За пресликавање $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ такво да за све $m, n \in \mathbb{Z}$ важи

- тотална мултипликативност: $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$,
- периодичност: $\chi(m) = \chi(n)$, ако је $m \equiv n \pmod r$,
- $\chi(n) \neq 0$, ако и само ако је $(n, r) = 1$,

кажемо да је *Дирихлеов карактер* по модулу r и пишемо $\chi \pmod r$.

Из претходне дефиниције следи да је $|\chi(n)| = 1$, за све $(n, r) = 1$, као и $\chi(1) = 1$ и $\chi(-1) = \pm 1$. Кажемо да је Дирихлеов карактер χ *паран* ако је $\chi(-1) = 1$, и *непаран* ако је $\chi(-1) = -1$. Дирихлеов карактер се може видети и као периодично проширење карактера мултипликативне групе $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$ на скуп целих бројева.

Са χ_0 ћемо надаље означавати тривијални Дирихлеов карактер

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (n, r) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека је χ нетривијалан Дирихлеов карактер по модулу r и нека $r_1 | r$. Уколико постоји Дирихлеов карактер χ_1 по модулу r_1 такав да важи $\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n), & \text{ако је } (n, r) = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ кажемо да је карактер χ индукован карактером χ_1. Најмањи овакав број r_1 (у односу на релацију дељивости) зовемо *кондуктор* карактера χ. Уколико је кондуктор баш једнак модулу r кажемо да је карактер χ *примитиван.*

Дефиниција 1.12. *Нека је χ Дирихлеов карактер по модулу r. Дирихлеова L-функција придружена карактеру χ је ред и Ојлеров производ*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p \nmid r}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Дирихлеова L-функција придржена тривијалном карактеру $\chi_0 \pmod r$ је суштински Риманова зета функција. Прецизније, важи $L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p|r}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)$. Зато ћемо се у даљем излагању углавном бавити нетривијалним карактерима.

Уколико је $\chi \neq \chi_0$ ред из Дефиниције 1.12 конвергира за $\Re s > 0$. Специјално, то значи да Дирихлеова L-функција (за разлику од зета функције) нема пол у тачки $s = 1$. Имамо аналитичко продужење

$$\left(\frac{r}{\pi}\right)^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}-1}\Theta(x,\chi)\,dx + \frac{1}{2}\frac{i^{\mathfrak{a}} r^{\frac{1}{2}}}{\eta(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-\frac{1+s+\mathfrak{a}}{2}}\Theta(x,\overline{\chi})\,dx,$$

где је

$$\Theta(x,\chi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{r}}, \qquad \eta(\chi) = \sum_{m=0}^{r-1} \chi(m) e^{\frac{2\pi i m}{r}}$$

$$\text{и} \qquad \mathfrak{a} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \chi \text{ паран,} \\ 1, & \text{ако је } \chi \text{ непаран.} \end{cases}$$

Дирихлеова L-функција ће имати *тривијалне нуле* које одговарају половима гама функције $s \in -2(\mathbb{N}\cup\{0\}) - \mathfrak{a}$. Затим, имамо функционалну једначину

$$\Lambda(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^{\mathfrak{a}} r^{\frac{1}{2}}}{\eta(\chi)}\Lambda(s,\chi),$$

где је

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{r}{\pi}\right)^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) L(s,\chi) \tag{1.13}$$

комплетирана L-функција.

Дирихлеови карактери задовољавају *релацију ортогоналности*

$$\frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \chi(m)\overline{\chi}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } m \equiv n \pmod r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зато усредњавање по карактерима користимо као детектор *аритметичког низа* целих бројева. Овај низ видимо као скуп свих целих бројева који дају исти остатак a по неком фиксираном модулу r, где је $(a,r) = 1$. Грубо говорећи, уколико у тврђењима о простим бројевима заменимо зета функцију сумом $\frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \overline{\chi}(a) L(\cdot,\chi)$ добићемо аналогна тврђења за просте бројеве у аритметичким низовима:

- Поменути аритметички низ садржи бесконачно много простих бројева и важи
$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ прост}\\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, r)}} \frac{1}{p} = \frac{\log\log x}{\varphi(r)} + O(1).$$

- *Дирихлеова теорема о простим бројевима у аритметичким низовима*: Број
$$\pi(x;r,a) = \#\{p \leqslant x \,|\, p \text{ прост}, \, p \equiv a \pmod r\}$$
простих бројева у аритметичком низу је
$$\pi(x;r,a) \sim \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(r)}, \tag{1.14}$$
кад $x \to \infty$. Специјално, прости бројеви су равномерно распоређени по класама еквиваленције $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{\times}$. Ово је сагласно са општом филозофијом да су прости бројеви случајно распоређени међу природним бројевима.

- Грешка у (1.14) је у директној вези са сумом $\sum_{\rho\in Z} \frac{x^{\Re\rho}}{|\rho|}$, где је
$$Z = \{\rho \in \mathbb{C} \,|\, (\exists\chi \pmod r)\, L(\rho,\chi) = 0, \, 0 \leqslant \Re\rho \leqslant 1\}$$
скуп нетривијалних нула Дирихлеових L-функција (за које је познато да се налазе унутар критичне траке).

Хипотеза 1.15 (Уопштена Риманова хипотеза)**.** *Све нетривијалне нуле Дирихлеове L-функције се налазе на критичној линији $\Re s = \frac{1}{2}$.*

Помоћу Уопштене Риманове хипотезе грешка у (1.14) би могла да се оцени са $O\left(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2\right)$, кад $x \to \infty$, за $r \leqslant x$. Као и у случају Риманове зета функције, критична трака се може незнатно смањити, али је то и даље далеко од Уопштене Риманове хипотезе, те исто важи и за оцену у (1.14). Преглед таквих резултата (у зависности од међусобног односа r и x) се може пронаћи у [26, Главе 20 и 22].

- Број
$$N(T,\chi) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \in \mathbb{C} \,|\; L(\rho,\chi) = 0, \, 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \, 0 < \gamma < T\}$$

нула Дирихлеове L-функције на делу критичне траке је

$$N(T,\chi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{rT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log r + \log T),$$

где је r кондуктор карактера χ.

Детаљније информације о Римановој зета и Дирихлеовој L-функцији, као и докази свих поменутих особина и тврђења, могу се пронаћи у [3, 26, 53, 54]. Ове функције су најједноставнији примери једног општијег концепта, а то је L-функција придружена аритметичком објекту f. Под тим подразумевамо ред

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \tag{1.16}$$

где су коефицијенти $\lambda_f(n) \in \mathbb{C}$, $\lambda_f(1) = 1$, такви да претходни ред апсолутно конвергира за $\Re s > 1$ и да се може изразити у облику Ојлеровог производа

$$L(f,s) = \prod_{p \text{ прост}} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Овде број $d \in \mathbb{N}$ зовемо степен Ојлеровог производа, а бројеве $\alpha_1(p), \ldots, \alpha_d(p) \in \mathbb{C}$ локални корени од $L(f,s)$ у p. Додатно, захтева се и да комплетирана L-функција (дефинисана слично као у (1.13)) има мероморфно продужење на целу комплексну раван које задовољава функционалну једначину. Комплетна дефиниција, као и особине и примери L-функција се могу наћи у [54, Глава 5].

Редови облика (1.16), али без икаквих ограничења за $\lambda_f(n) \in \mathbb{C}$, су познати као *Дирихлеови редови.*

1.3 Моменти Риманове зета и Дирихлеове L-функције

Као што смо већ рекли, многе ствари о зета и L-функцијама нису до краја истражене. Са друге стране, верујемо да су прости бројеви некако случајно распоређени међу природним бројевима, што повлачи да се понашање зета и L функције непредвидиво мења. У недостатку прецизнијих информација, неки статистички (усредњени) резултати могу дати (барем делимичне) одговоре на поједина питања.

Један од њих је и $2k$-*ти момент* (средња вредност $2k$-тог степена апсолутне вредности) Риманове зета функције је

$$M_k(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}, \tag{1.17}$$

кад $T \to \infty$, за $k \in \mathbb{N}$. Комплетан преглед резултата о моментима зета функције се може наћи у [52], овде ћемо поменути само неке најважније. Изучавање момената M_k има историју дужу од једног века и уско је повезано са чувеном Линделефовом хипотезом [61].

Хипотеза 1.18 (Линделефова хипотеза)**.** *Важи* $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\varepsilon}$, *кад* $t \to \infty$.

Линделефова хипотеза је слабија од Риманове тј. следи из Риманове хипотезе. Еквивалент Линделефове хипотезе је асимптотска оцена $M_k(T) \ll T^{\varepsilon}$, кад $T \to \infty$, за све $k \in \mathbb{N}$.

Познати Фрагмен-Линделефов принцип конвексности [74, Глава 12] даје границу $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, кад $t \to \infty$, која је позната као *конвексна оцена.* Побољшање ове оцене, односно смањење експонента на десној страни у правцу Линделефове хипотезе је једно значајно питање, познато као проблем *подконвексне оцене.* Комбиновањем момената са разним другим техникама поменути експонент је више пута смањиван. Тренутно најоштрију познату оцену је дао Бурген [16] и његов експонент износи $\frac{13}{84}+\varepsilon$.

Харди и Литлвуд [44] су 1918. године показали да је други момент

$$M_1(T) \sim \log T, \tag{1.19}$$

кад $T \to \infty$. Затим је Ингам [51] 1926. године појачао њихов резултат добивши

$$M_1(T) = \log\frac{T}{2\pi} + 2\gamma - 1 + O\left(\frac{\log T}{T^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{1.20}$$

кад $T \to \infty$. У истом раду Ингам даје и главни члан у асимптотској формули за четврти момент. Касније је Хит-Браун [47] добио четврти момент у облику

$$M_2(T) = \frac{1}{2\pi^2}P_4(\log T) + O\left(T^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right),$$

кад $T \to \infty$, где је P_4 моничан полином четвртог степена са експлицитно израчунатим коефицијентима. Овде је битно истаћи да главни члан у претходне две асимптотске формуле садржи цео полином по $\log T$, а грешка има мањи степен (по T) од главног члана.

Асимптотика за шести момент Риманове зета функције (кад $T \to \infty$) је и даље отворено питање. Прву познату хипотезу о шестом моменту дали су Конри и Гош [23] тек 1998. године:

$$M_3(T) \sim 42 a_3 \frac{\log^9 T}{9!}, \tag{1.21}$$

кад $T \to \infty$, где је константа a_3 дата са

$$a_3 = \prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right). \tag{1.22}$$

Ваља напоменути да је ова хипотеза добијена само техникама Теорије бројева (хеуристика за Тичмаршев проблем делиоца са померајима), за разлику од неких других хипотеза о којима ћемо говорити. Показана је оцена $M_3(T) \ll T^{\varepsilon}$ [52, Поглавље 4.7], предвиђена Линделефовом хипотезом, али та оцена је већег асимптотског реда од оне коју предвиђа хипотеза Конри-Гоша. Пар година касније, на сличан начин Конри и Гонек долазе до хипотезе за осми момент (видети [24]).

Слично, можемо разматрати и моменте Дирихлеових L-функција. Тај момент може да буде усредњење по критичној линији (као у случају Риманове зета функције), али су значајнији моменти који представљају усредњење по фамилији свих Дирихлеових карактера за један фиксиран кондуктор r у критичној тачки $s = \frac{1}{2}$. Другим речима, изучавамо моменте

$$M_k(r) = \frac{1}{\varphi^*(r)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)}^{*} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right|^{2k}, \tag{1.23}$$

где $\displaystyle\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)}^{*}$ означава рестрикцију сумације на примитивне карактере χ по модулу r, а $\varphi^*(r)$ број таквих карактера. Напомињемо да неки аутори изостављају дељење са дужином сумације $\varphi^*(r)$ и под моментом L-функције подразумевају само суму на десној страни (1.23). Аналогно, често се назив момент зета функције користи само за интеграл на десној страни (1.17) без дељења са дужином интервала интеграције T.

Други момент

$$M_1(r) \sim \frac{\varphi(r)}{r} \log r \tag{1.24}$$

је дао Пејли [69] 1931. године. Ова асимптотска формула представља аналог (1.19) јер је $\dfrac{\varphi(r)}{r} \sim 1$. Цео израз за други момент Дирихлеове L-функције (аналог (1.20)) израчунали су Ивањец и Сарнак [55].

Када је у питању четврти момент, прву познату асимптотику је дао Хит-Браун 1981. године. Његов главни члан је доминантан у односу на грешку само када кондуктор r има мало простих делилаца, за прецизну формулацију видети [48]. Саундарараџан [78] је добио четврти момент у облику

$$M_2(r) = \frac{1}{2\pi^2}(\log r)^4 \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p|r}} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^3}{1+\frac{1}{p}} \left(1 + O\left(\frac{\omega(r)}{\log r}\left(\frac{r}{\varphi(r)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) + O\left(\frac{r}{\varphi^*(r)}(\log r)^{\frac{7}{2}}\right). \tag{1.25}$$

За непаран прост број r Јанг [84] је извео асимптотску формулу са целим полиномом по $\log r$, а исти резултат се може наћи и у [14] са оштријом оценом за грешку.

Овде имамо и додатну могућност да усредњавамо и по променљивој t и по карактеру χ:

$$M_k(r,T) = \frac{1}{\varphi^*(r)T} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \int_0^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^{2k} dt,$$

што је такође занимљив проблем. Други момент (у оваквој поставци) следи из [66], док се четврти момент може наћи у [19].

Као и у случају Риманове зета функције, и асимптотика за шести момент Дирихлеове L-функције $M_3(r)$, као и $M_3(r,T)$, је и даље отворен проблем. Наредна теорема даје шести момент са додатним (трећим) усредњењем по кондуктору r.

Теорема 1.26 (Конри, Ивањец, Саундарараџан, [25, Последица 1]). *Кад $R \to \infty$ важи*

$$\sum_{r \leqslant R} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Lambda\left(\frac{1}{2}+iy,\chi\right)\right|^6 dy \sim \frac{42\, a_3}{9!} \sum_{r \leqslant R} \varphi^\sharp(r)(\log r)^9 \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p|r}} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^5}{1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+iy}{2}\right)\right|^6 dy,$$

где је a_3 аритметички фактор и Λ комплетирана L-функција дефинисани у (1.22) и (1.13), редом, а $\sum\limits_{\chi\,(\mathrm{mod}\,r)}^{\sharp}$ означава сумацију по парним примитивним карактерима по модулу r и $\varphi^{\sharp}(r)$ је број таквих карактера.

Претходна теорема представља усредњену верзију Хипотезе Конри-Гоша (1.21), при чему се уместо кондуктора T из (1.21) овде појављује кондуктор r. Овде је практично узет лимес кад $T \to \infty$. Рестрикција на парне карактере је урађена из техничких разлога и не мења суштину.

Мотивација за усредњење по модулу долази из чувене Теореме Бомбијери-Виноградова. Нека је $E(x;r,a) = \psi(x;r,a) - \dfrac{x}{\varphi(r)}$ грешка из Теореме о простим бројевима у аритметичким низовима, где је $(a,r) = 1$ и $\psi(x;r,a) = \sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,r)}} \Lambda(n)$. Риманова хипотеза предвиђа оцену $E(x;r,a) \ll x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2$. Са друге стране, *Теорема Бомбијери-Виноградова* даје

$$\frac{1}{R}\sum_{r\leqslant R}\max_{y\leqslant x}\max_{\substack{a\leqslant r\\ (a,r)=1}} |E(y;r,a)| \ll x^{\frac{1}{2}}(\log x)^5,$$

за $A > 0$ и $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^A} \leqslant R \leqslant x^{\frac{1}{2}}$. Ова теорема је по јачини јако близу Римановој хипотези у средњем и сматра се једним од највећих достигнућа Аналитичке теорије бројева. У појединим применама, у комбинацији са комбинаторним и Селберговим решетима, Теорема Бомбијери-Виноградова може у потпуности заменити Риманову хипотезу. За више детаља погледати [26, Главе 28 и 29].

Подразумевајући Уопштену Риманову хипотезу, Чанди и Ли [20] су израчунали осми момент Дирихлеових L-функција са троструким усредњењем као у Теореми 1.26.

Помоћу Великог решета Хаксли [50] је добио горњу оцену за шести момент L-функције са двоструким усредњењем

$$\sum_{r\leqslant R}\ \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,r)}^{*}\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^6 \ll R^2(\log R)^9,$$

која је тачног асимптотског реда, као и аналогни резултат за осми момент.

Поред момената по фамилији свих примитивних карактера изучавају се и моменти по одређеним подфамилијама. Најпознатија таква фамилија је фамилија *квадратних карактера*. То су једини реални карактери и сви се могу представити у облику $\chi_d(n) = \left(\dfrac{d}{n}\right)$, где је d производ узајамно простих бројева из скупа $\left\{-4, \pm 8, (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \,\middle|\, p \text{ непаран прост}\right\}$. Кондуктор квадратног карактера χ_d је $|d|$. Број d за који постоји карактер χ_d зовемо *фундаментална дискриминанта*. Еквивалентан опис оваквих d-ова је $d = m \equiv 1 \pmod 4$ бесквадратан или $d = 4m$, где је $m \equiv 2$ или $3 \pmod 4$ бесквадратан. Такође, фундаменталне дискриминанте d можемо видети и као дискриминанте квадратних бројних поља $\mathbb{Q}\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$ (видети [3, Поглавље 9.3]).

Код реалних тј. квадратних карактера постоји могућност да се израчунају и непарни моменти, па би проблем гласио

$$\frac{\pi^2}{6D} \sum_{d \in [-D, D]}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right)^k, \tag{1.27}$$

где $\displaystyle\sum_{d \in [-D, D]}^{*}$ означава сумацију по фундаменталним дискриминантама $d \in [-D, D]$. Испред суме у (1.27) имамо дељење са $\dfrac{6}{\pi^2} D$ што је асимптотски број фундаменталних дискриминанти $d \in [-D, D]$, тј. очекивана дужина сумације. До сада су израчунати први, други и трећи момент [56, 77] који показују да је (1.27) полином по $\log D$ степена $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

1.4 Теорија случајних матрица

Теорија случајних матрица проучава статистичка својства унитарних матрица чији су коефицијенти случајне промењливе, првенствено кроз *карактеристичне полиноме* тих матрица. Ова теорија је оригинално развијена за потребе физике, користи се за моделовање језгара тешких атома, квантног хаоса, у физици чврстог стања, итд. (видети [15] и [63, Глава 1]). Последњих педесетак година Теорија случајних матрица се користи и за *моделовање понашања* зета и L-функција, и тренутно представља основни алат за хеуристичко разумевање особина ових функција и извођење разних хипотеза.

Подразумевајући Риманову хипотезу Монтгомери [64] је 1973. године израчунао *корелацију парова* нула, тј. расподелу размака између нула Риманове зета функције. Под Римановом хипотезом, нетривијалне нуле зета функције се могу линеарно уредити. С обзиром на број нула на делу критичне линије (1.8) очекивано је да за n-ту нулу $\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$ приближно важи $\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}$, кад $n \to \infty$. Зато ће очекивани размак између нормираних ордината $\widetilde{\gamma_n} = \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n \sim n$ бити 1. Монтгомери је разматрао колико размак одступа од те вредности и подразумевајући Риманову хипотезу закључио да је

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{\substack{m,n\leqslant T \\ m\neq n}} \phi\left(\widetilde{\gamma_m} - \widetilde{\gamma_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right) dx, \tag{1.28}$$

за све тест-функције ϕ које су Шварцове и такве да је носач њихове Фуријеове трансформације $\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$ садржан у $(-1, 1)$. И управо је тај услов за носач кључан у Монтгомеријевом доказу, евентуално повећање носача је и даље отворено питање.

На основу претходног Монтгомери долази до хипотезе да за $\alpha < \beta$ важи

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \# \left\{ m, n \in [0, T] \mid \alpha \leqslant \widetilde{\gamma_m} - \widetilde{\gamma_n} \leqslant \beta \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 + \delta_0(x)\right) dx, \tag{1.29}$$

где је δ_0 Диракова функција. Другим речима, он је заменио тест-функцију ϕ у (1.28) индикатором интервала $[\alpha, \beta]$ који не испуњава поменути услов за носач Фуријеове трансформације.

Још пре објављивања рада [64], Монтгомери је показао своја израчунавања Дајсону, који је препрознао функцију расподеле на десној страни (1.29). Тај догађај се сматра почетком повезивања зета функције са случајним матрицама. Наиме, десетак година раније, Дајсон [31] је израчунао корелацију парова сопствених вредности случајне унитарне матрице. Нека је $A \in U(N)$ случајна матрица, $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}$ сопствене вредности матрице A и нека су $\widetilde{\theta_n} = \frac{N}{2\pi}\theta_n \in [0, N)$, за $1 \leqslant n \leqslant N$, нормирани (растуће уређени) аргументи тих вредности. Дајсон [31] је показао да је

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{G(N)} \sum_{\substack{m,n\leqslant N \\ m\neq n}} \phi\left(\widetilde{\theta_m} - \widetilde{\theta_n}\right) dA = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right) dx, \tag{1.30}$$

где је ϕ тест функција таква да $\phi(x) \to 0$, кад $|x| \to \infty$, а $G(N)$ је једна од група $U(N)$, $O(N)$ и $Sp(2N)$, и dA вероватносна Харова мера на тој групи.

Мера dA за групу $U(N)$ ће дата бити у (1.36), док се мере за преостале две групе могу пронаћи у [59, 66].

Као уопштење (1.28) имамо корелацију парова нула зета функције на n нивоа

$$\lim_{T\to\infty}\frac{n!}{T}\sum_{\substack{S\subseteq\{\widetilde{\gamma_1},\ldots,\widetilde{\gamma_T}\}\\|S|=n}}\phi(S)$$
$$=\underset{\mathbb{R}^n}{\int\cdots\int}\phi\left(x_1,\ldots,x_n\right)\det\left(\frac{\sin\pi\left(x_i-x_j\right)}{\pi\left(x_i-x_j\right)}\right)^n_{i,j=1}\delta_0\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n. \tag{1.31}$$

За више детаља и услове које функција ϕ треба да испуњава видети [75]. Специјално, (1.31) за $n = 2$ постаје (1.28). Функција расподеле на десној страни (1.31) се такође поклапа са функцијом расподеле која се појављује у корелацији парова на n нивоа за сопствене вредности случајних матрица из [31].

Идеја о вези нула зета функције са спектром матрице или оператора постојала је и раније. *Хипотеза Хилберт-Поља* предвиђа да нетривијалне нуле $\rho = \dfrac{1}{2} + i\gamma$ Риманове зета функције одговарају сопственим вредностима γ неког самоадјунгованог оператора. Поља је веровао да је то пут којим се може доказати Риманова хипотеза.

Кац и Сарнак [57, 58] су развили идеју да свакој фамилији L-функција треба придружити *групу симетрија*, то је једна од три групе које се појављују у Дајсоновој теореми (1.30) и која се одређује на основу неких симетрија у тој фамилији. Карактеристични полином случајне матрице из групе симетрија ће бити модел за случајну L-функцију из те фамилије. Ова идеја је заснована на Монтгомеријевом раду [64], али и проучавању расподеле нула зета функције над функцијским пољима изложеном у [58].

Претходна прича је поткрепљена и великим бројем нумеричких провера које је углавном радио Одлижко [49, 67]. Такође, сви познати резултати о зета и L функцијама се поклапају са предвиђањима из Теорије случајних матрица.

1.5 Групе симетрија и хипотезе о моментима

За детаљнији преглед хипотеза о моментима из Теорије случајних матрица упућујемо на [22]. Овај рад проширује и обједињује претходне радове

[21, 59, 60] истих аутора.

Нека је $A \in U(N)$ унитарна матрица и нека је

$$\Psi(s,A) = \det\left(E - sA^*\right) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 - se^{-i\theta_j}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n.$$

њен карактеристични полином. Функција $\Psi(\cdot, A)$ има сличне особине (аналитичко продужење, функционална једначина, распоред нула, кондуктор...) као L-функција, видети [22, Поглавље 1.2].

Пратећи Кац-Сарнак филозофију свакој фамилији L-функција, може се придружити одређена група симетрија (тип симетрије), која ће бити модел за ту фамилију.

Први (а за нас и најзначајнији) пример су фамилије које имају *унитарну симетрију* (тј. њихова група симетрија је $U(N)$). Китинг и Снеит [59] су израчунали $2k$-ти момент функције Ψ:

$$\int\limits_{U(N)} |\Psi(1,A)|^{2k} dA = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{j!(j+2k)!}{(j+k)!^2}, \tag{1.32}$$

где је dA вероватносна Харова мера на унитарној групи. Касније је у раду [22] десна страна (1.32) изражена и у облику $\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(k+j)!} \prod_{l=1}^{k} (N+j+l)$. Последњи израз је полином по N степена k^2 са водећим коефицијентом $\dfrac{g_k}{k^2!}$, где је

$$g_k = k^2! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(k+j)!}$$

тзв. *геометријски фактор* (а $k^2!$ је додато како би се обезбедило да g_k има целобројну вредност). Сада ћемо навести неколико фамилија које имају унитарну симетрију.

- Прва је фамилија $\left\{\zeta\left(\dfrac{1}{2} + it\right) \,\middle|\, t \geqslant 0\right\}$ индексирана са t. На основу момента (1.32) функције Ψ за унитарну фамилију долази се до следеће хипотезе.

  Хипотеза 1.33 (Китинг-Снеит, 2000., [22, 59])**.** *За све природне бројеве k, кад $T \to \infty$ важи*

  $$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^{2k} dt = \frac{a_k g_k}{k^2!} P_k(\log T) + O\left(T^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где је P_k полином степена k^2, а

$$a_k = \prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_k\left(p^n\right)^2}{p^n} = \prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{(k-1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j}^2 p^{-j}$$

тзв. аритметички фактор.

Објаснимо сада улогу аритметичког фактора у претходној хипотези. Риманове зета функција се на критичној линији моделује са

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \approx \prod_{\substack{p \leqslant X \\ p \text{ прост}}} \left(1 - p^{-\frac{1}{2} - it}\right)^{-1} \prod_{\substack{\gamma_n \\ \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_n\right) = 0 \\ |t - \gamma_n| < \frac{1}{\log X}}} \left(i\left(t - \gamma_n\right) e^{\gamma} \log X\right),$$

за одговарајући параметар засецања X, где је γ Ојлер-Маскеронијева константа (видети [39]). Овде је Риманова зета функција представљена као производ засеченог Ојлеровог и засеченог *Адамаровог производа* (производа по нулама зета функције), и претпоставља се да је момент зета функције производ момента Ојлеровог производа и момента Адамаровог производа. Поменути Адамаров производ је полином по t за који очекујемо да на висини T има $\asymp \dfrac{\log T}{\log X}$ нула, и он се моделује помоћу случајних матрица. Преостале нуле зета функције долазе из Ојлеровог производа. Момент Ојлеровог производа је експлицитно изражен у [39] у облику полинома по $\log T$ чији је водећи коефицијент управо аритметички фактор a_k. Зато се овај фактор појављује у хипотези као „допуна“ онога што предвиђа Теорија случајних матрица.

- Као уопштење претходног случаја могуће је заменити Риманову зета функцију Дирихлеовом L-функцијом придруженом примитивном карактеру.

- Затим, имамо фамилију $\left\{L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \,\middle|\, \chi \pmod r \text{ примитиван}\right\}$, за фиксиран модул r. Аналогно Хипотези 1.33 Китинг и Снеит [22, 60] су добили хипотезу о $2k$-том моменту Дирихлеове L-функције

$$\frac{1}{\varphi^*(r)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \left|L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)\right|^{2k} \sim \frac{a_k g_k}{k^2!} (\log q)^{k^2} \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p | r}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_k\left(p^n\right)^2}{p^n}\right)^{-1}. \quad (1.34)$$

Претходна хипотеза је сагласна са познатим резултатима за други (1.24) и четврти момент (1.25), као и за шести момент са додатним усредњењем из Теореме 1.26.

(*Унитарна*) *симплектичка група* $Sp(2N)$ се користи као модел за фамилију квадратних карактера. Китинг и Снеит [22, 60] су израчунали моменте карактеристичног полинома случајне симплектичке матрице:

$$\int\limits_{Sp(2N)} |\Psi(1,A)|^k dA = 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{j!}{(2j)!}(N+j) \prod_{1\leqslant j<l\leqslant k} \left(N + \frac{j+l}{2}\right)$$
$$\sim (2N)^{\frac{k(k+1)}{2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{j!}{(2j)!},$$

кад $N \to \infty$, где је dA вероватносна Харова мера на унитарној симплектичкој групи $Sp(2N)$. Помоћу тога дошли су до хипотезе да свако $k \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{\pi^2}{6D} \sum_{d\in[-D,D]}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right)^k = \frac{a_k g_k}{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!} Q_k(\log D) + O\left(D^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{1.35}$$

где је Q_k полином степена $\dfrac{k(k+1)}{2}$, а аритметички и геометријски фактор су дати са

$$a_k = \prod_{p \text{ прост}} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1+\frac{1}{p}} \left(\frac{\left(1-p^{-\frac{1}{2}}\right)^{-k} + \left(1+p^{-\frac{1}{2}}\right)^{-k}}{2} + \frac{1}{p}\right)$$

и

$$g_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)! \, \frac{j!}{(2j)!}.$$

Ортогонална група се користи као модел за фамилију L-функција придружених модуларним формама, о којима овде неће бити речи. За још примера фамилија и њихових типова симетрије видети [22, Поглавље 1.3].

Занимљиво је да Теорија случајних матрица предвиђа да вредност момента Дирихлеове L-функције у фиксираној тачки на критичној линији зависи од врсте симетрије. У случају унитарне симетрије, претпоставка је да момент (1.34) има исту вредност и уколико критичну тачку $\dfrac{1}{2}$ заменимо произвољном тачком $\dfrac{1}{2} + it$ са критичне линије. Са друге стране, претходно речено не важи за момент (1.35), односно за фамилију са симплектичком симетријом.

Као што смо већ рекли, хипотезе о моментима су оригинално изведене уз помоћ Теорије случајних матрица. Пар година касније, Ђакону, Голдфелд и Хофстеин [28] су добили исти резултат користећи вишеструке Дирихлеове редове.

За крај, изложићемо доказ (1.32), оригинално дат у [59]. Вероватносна Харова мера на унитарној групи $U(N)$ је дата са

$$dA = \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} \left|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_l}\right|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N, \tag{1.36}$$

где су $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$ сопствене вредности матрице $A \in U(N)$ (детаљније у [63]). Зато је

$$\begin{aligned}&\int\limits_{U(N)} |\Psi(1,A)|^{2k} dA \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N N!} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \left|\prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{-i\theta_j}\right)\right|^{2k} \prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} \left|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_l}\right|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Овај интеграл се уз помоћ неколико трансформација своди на познати Селбергов интеграл

$$\begin{aligned}&J(a,b,\alpha,\beta,\gamma,N) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} (a+ix_j)^{-\alpha} (b-ix_j)^{-\beta} \left|\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} (x_j - x_l)\right|^{2\gamma} dx_1 \dots dx_N \\ &= \frac{(2\pi)^N}{(a+b)^{(\alpha+\beta-1)N-\gamma N(N-1)}} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1+\gamma+j\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-(N+j-1)\gamma-1)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha-j\gamma)\Gamma(\beta-j\gamma)},\end{aligned}$$

за $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, такве да је $\Re a, \Re b, \Re\alpha, \Re\beta > 0$, $\Re(\alpha+\beta) > 1$ и

$$-\frac{1}{N} < \Re\gamma < \min\left\{\frac{\Re\alpha}{N-1}, \frac{\Re\beta}{N-1}, \frac{\Re(\alpha+\beta-1)}{2(N-1)}\right\}$$

(видети рад [76] и његово уопштење [63, Глава 17]). Селбергов интеграл представља уопштење бета функције у N димензија и има широку примену у математици и физици, за више детаља о томе видети [37].

Да бисмо видели везу са Селберговим интегралом, прво ћемо помоћу адиционих формула трансформисати (1.37) у

$$\frac{2^{N(N-1)+2kN}}{(2\pi)^N N!} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{N} \left(\sin\frac{\theta_j}{2}\right)^{2k} \prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} \left(\sin\frac{\theta_j - \theta_l}{2}\right)^2 d\theta_1 \dots d\theta_N$$

$$= \frac{2^{N^2+2kN}}{(2\pi)^N N!} \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \prod_{j=1}^{N} (\sin\theta_j)^{2(N-1+k)} \prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} (\operatorname{ctg}\theta_j - \operatorname{ctg}\theta_l)^2 \, d\theta_1 \ldots d\theta_N,$$

након смене промењљивих $\theta_j \mapsto 2\theta_j$, и уз напомену да је $\sin(\theta_j - \theta_l) = \sin\theta_j \sin\theta_l (\operatorname{ctg}\theta_l - \operatorname{ctg}\theta_j)$. На крају уводимо смену $x_j = \operatorname{ctg}\theta_j$, за $1 \leqslant j \leqslant N$. Тада је $(\sin\theta_j)^2 = \dfrac{1}{1+x_j^2}$, а претходни интеграл постаје

$$\frac{2^{N^2+2kN}}{(2\pi)^N N!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} \left((1+ix_j)(1-ix_j)\right)^{-N-k} \prod_{1\leqslant j<l\leqslant N} (x_j - x_l)^2 \, dx_1 \ldots dx_N$$

$$= \frac{2^{N^2+2kN}}{(2\pi)^N N!} J(1,1,N+k,N+k,1,N) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(j)\Gamma(2k+j)}{\Gamma(k+j)^2},$$

као што смо и тврдили у (1.32).

Глава 2

Дирихлеове L-функције над рационалним функцијским пољима

2.1 Рационална функцијска поља и аналогија са рационалним бројевима

Надаље ћемо са q означавати степен непарног простог броја p, а са $\mathbb{F}_q$ *коначно поље* са q елемената. Затим, $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ ће означавати прстен полинома по промењљивој x са коефицијентима у пољу $\mathbb{F}_q$. *Рационално функцијско поље* је количничко поље прстена $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$:

$$\mathbb{F}_q(\mathrm{x}) = \left\{ \frac{M}{N} \;\middle|\; M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}],\ N \neq 0 \right\}.$$

Прстен $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ и прстен целих бројева $\mathbb{Z}$ имају доста истих алгебарских особина (видети [73, Глава 1]). Ако $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ видимо као аналог прстена $\mathbb{Z}$, онда ће $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$ бити аналог поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Слично, аналог поља реалних бројева $\mathbb{R}$ је поље $\mathbb{F}_q(\!(\mathrm{x})\!)$ Лоранових редова над $\mathbb{F}_q$ као комплетирање $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$.

Група јединица (инвертибилних елемената) у $\mathbb{Z}$ је $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$, док је група јединица у $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ једнака $(\mathbb{F}_q[\mathrm{x}])^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0\} = \mathbb{F}_q^\times$. Зато ће не-нула скалари из $\mathbb{F}_q$ над функцијским пољима преузети улогу знака код бројева. Као последицу тога имамо да је *скуп моничних полинома* $\mathcal{M}$ из $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ аналог позитивних бројева у $\mathbb{Z}$. Затим, са $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{M}_{\leqslant n}$ ћемо означавати скуп свих моничних полинома степена n и степена највише n, редом. Лако се проверава да је

$\#\mathcal{M}_n = q^n$ и $\#\mathcal{M}_{\leqslant n} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, за све $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Степен полинома N ћемо означавати са $\mathtt{d}(N)$.

Скуп полинома фиксираног степена $\mathcal{M}_n$ представља аналог диадичког интервала $[D, 2D]$ у $\mathbb{Z}$. Затим, аналог кратког интервала $[T, T+h]$, за $h \ll T$, над $\mathbb{Q}$ ће бити тзв. *кратка лопта* (коју ћемо исто звати *кратак интервал*) задата са

$$\{\, M \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}] \mid \mathtt{d}(M) = n,\, \mathtt{d}(M-N) = k\}$$

за фиксиран полином $N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ степена n и $k < n$.

Норма на функцијском пољу се дефинише као $|Q| = q^{\mathtt{d}(Q)}$, за све $Q \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}] \setminus \{0\}$, и $|0| = 0$. Овако дефинисана норма се може видети и као $|Q| = \#\left(\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]/\,Q\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]\right)$, што је у аналог $|r| = \#(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$, за $r \in \mathbb{Z}$. Зато ће степен полинома над функцијским пољима преузети улогу логаритма. Ова норма задовољава ултраметричку неједнакост $|M+N| \leqslant \max\{|M|, |N|\}$, при чему се за $|M| \neq |N|$ достиже једнакост.

Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих нерастављивих полинома из $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$. Прстен $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ је домен са јединственом факторизацијом, па се $\mathcal{P}$ поклапа са скупом простих елемената (полинома) прстена $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ и представља аналог скупа простих бројева. *Теорема о простим полиномима* [73, Теорема 2.2] каже да је

$$\#\left(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_n\right) = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^{\frac{n}{2}}}{n}\right). \tag{2.1}$$

Ова теорема представља аналог Теореме о простим бројевима (1.6), тј. ово је њена појачана верзија за „диадичке интервале“. Горња граница x из (1.6) је замењена са q^n, што би била норма произвољног полинома из $\mathcal{M}_n$. Додатно, овде имамо и оцену за грешку која одговара Хипотези (1.11) (и која је за нијансу оштрија од Хипотезе (1.11)). Главни разлог је то што над $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$ важи Риманова хипотеза. Али кренимо редом, од дефиниције Риманове зета функције.

Дефиниција 2.2. *Риманова зета функција над функцијским пољем је ред и Ојлеров производ*

$$\zeta(s) = \sum_{N \in \mathcal{M}} \frac{1}{|N|^s} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|^s}\right)^{-1},$$

за $\Re s > 1$.

Како норма полинома зависи само од степена, Риманова зета функција је једнака

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{N \in \mathcal{M}_n} \frac{1}{|N|^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#\mathcal{M}_n}{q^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(1-s)n} = \frac{1}{1-q^{1-s}}.$$

Последњи израз представља аналитичко продужење зета функције на $\mathbb{C} \Big\backslash \left(1 + \frac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z}\right)$. Као што можемо видети Риманова хипотеза над рационалним функцијским пољима тривијално важи, јер нема нула ван критичне линије.

Овде је згодно увести смену $u = q^{-s}$ и са $\mathcal{Z}(u) = \dfrac{1}{1-qu}$ означити $\zeta(s)$. Оригинална зета функција ζ је $\dfrac{2\pi i}{\log q}$-периодична, а смена преводи сваки од периода у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Овим критична линија $\Re s = \dfrac{1}{2}$ прелази у *критични круг* $|u| = q^{-\frac{1}{2}}$, док се сви полови $s \in 1 + \dfrac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z}$ сликају у пол $u = \dfrac{1}{q}$. Риманова зета функција задовољава функционалну једначину

$$(1-qu)\mathcal{Z}(u) = \left(1 - \frac{1}{u}\right) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{qu}\right)$$

која представља аналог (1.5).

За више детаља о рационалним функцијским пољима и Римановој зета функцији над њима видети [73].

2.2 Дирихлеови карактери и Дирихлеове L-функције

Као и у случају бројева, за полиноме $M, N, Q \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ кажемо да су M и N конгруентни по модулу Q и пишемо $M \equiv N \pmod{Q}$ уколико постоји полином $S \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ такав да је $M = N + QS$.

Дефиниција 2.3. *Нека је* $Q \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ *полином позитивног степена. За пресликавање* $\chi : \mathbb{F}_q[\mathrm{x}] \longrightarrow \mathbb{C}$ *кажемо да је Дирихлеов карактер по модулу* Q *и пишемо* $\chi \pmod{Q}$ *ако за све* $M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ *важи*

- *тотална мултипликативност:* $\chi(MN) = \chi(M)\chi(N)$,
- *периодичност:* $\chi(M) = \chi(N)$, *ако је* $M \equiv N \pmod{Q}$,

- $\chi(N) \neq 0$, *ако и само ако је* $(N, Q) = 1$.

Понекад се у овој дефиницији захтева да је модул Q моничан. Један разлог је аналогија са бројевима, где је модул позитиван. Други разлог је што се карактери по модулу cQ поклапају са карактерима по модулу Q, за све $c \in \mathbb{F}_q^\times$. Међутим, обично се над функцијским пољима дозвољава произвољан модул, иако знамо да то неће донети ништа ново.

Из Дефиниције 2.3 следи да је $|\chi(N)| = 1$, за све $(N, Q) = 1$, и $\chi(1) = 1$. Зато се Дирихлеов карактер може видети и као периодично проширење карактера мултипликативне групе $(\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]/\, Q\mathbb{F}_q[\mathrm{x}])^\times$ на $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$. Са χ_0 ћемо означавати тривијални Дирихлеов карактер $\chi_0(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (N, Q) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Скуп свих Дирихлеових карактера по модулу Q са операцијом множења је Абелова група са неутралом χ_0 и инверзом $\chi^{-1} = \overline{\chi}$. Ова група је изоморфна са мултипликативном групом $(\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]/\, Q\mathbb{F}_q[\mathrm{x}])^\times$ и представља њен *Понтрјагинов дуал*. Специјално, број свих Дирихлеових карактера по модулу Q је

$$\varphi(Q) = \#\left(\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]/\, Q\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]\right)^\times = |Q| \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|Q}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right).$$

По аналогији са $\mathbb{Q}$ мултипликативну функцију φ зовемо Ојлерова функција.

Већ смо рекли да улогу знака над рационалним функцијским пољима играју константе из $\mathbb{F}_q^\times$. Како је мултипликативна група $\mathbb{F}_q^\times$ циклична, вредности $\chi(c)$ морају бити $(q-1)$-ви корени из јединице, за све $c \in \mathbb{F}_q^\times$. Рећи ћемо да је карактер χ *паран* уколико важи $\chi(c) = 1$, за све $c \in \mathbb{F}_q^\times$, и *непаран* у супротном. Карактер χ је паран ако и само ако постоји генератор c мултипликативне групе $\mathbb{F}_q^\times$ такав да је $\chi(c) = 1$. Приметимо да ако је Дирихлеов карактер χ непаран, тада $\chi(c)$ може имати $q-2$ различитих вредности, па можемо очекивати да непарних карактера има $q-2$ пута више од парних (у шта ћемо се ускоро и уверити).

Нека је χ нетривијалан Дирихлеов карактер по модулу Q и нека $Q_1|Q$. Уколико постоји Дирихлеов карактер $\chi_1 \pmod{Q_1}$ такав да важи $\chi(N) = \begin{cases} \chi_1(N), & \text{ако је } (N, Q) = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ кажемо да је карактер χ индукован карактером χ_1. Најмањи овакав полином Q_1 (у односу на релацију дељивости) зовемо *кондуктор* карактера χ. Уколико је кондуктор баш једнак модулу Q кажемо да је карактер χ *примитиван*.

Ако је $\chi \pmod{Q}$ и $Q = Q_1 Q_2$, где је $(Q_1, Q_2) = 1$, тада ће постојати Дирихлеови карактери $\chi_1 \pmod{Q_1}$ и $\chi_2 \pmod{Q_2}$ такви да важи $\chi = \chi_1 \chi_2$. Следи, сваки Дирихлеов карактер је производ Дирихлеових карактера чији је модул степен простог полинома.

Дефиниција 2.4. *Дирихлеова L-функција придружена Дирихлеовом карактеру $\chi \pmod{Q}$ је ред и Ојлеров производ*

$$L(s,\chi) = \sum_{N \in \mathcal{M}} \frac{\chi(N)}{|N|^s} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(P)}{|P|^s}\right)^{-1}$$

за $\Re s > 1$.

Дирихлеова L-функција има мероморфно $\dfrac{2\pi i}{\log q}$-периодично проширење на целу комплексну раван, које је цела функција у случају да је χ нетривијалан карактер.

Уопштену Риманову хипотезу за Дирихлеове L-функције над функцијским пољима је показао Веил у својој тези [82]. За разлику од Риманове зета функције, овде је ситуација знатно компликованија и L-функција може имати нуле на критичној линији (али највише коначно много њих на једном периоду).

Из Уопштене Риманове хипотезе следи Линделефова хипотеза која представља оцену за Дирихлеове L-функције на критичној линији. Нама ће за касније примене требати следећа оцена за L-функције десно од критичне линије, која такође следи из Уопштене Риманове хипотезе.

Тврђење 2.5 ([62, Тврђење 1.2])**.** *Нека је $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ фиксирано и нека је $Q \in \mathcal{M}$ и χ нетривијалан Дирихлеов карактер по модулу Q. За произвољан комплексан број s такав да је $\Re s = \sigma$ важи*

$$\log L(s,\chi) \ll_\sigma \frac{\mathtt{d}(Q)^{2(1-\sigma)}}{\log \mathtt{d}(Q)}.$$

Претпоставља се да при условима претходног тврђења важи и оштрија оцена $\log L(s,\chi) \ll_\sigma \dfrac{\mathtt{d}(Q)^{(1-\sigma)}}{(\log \mathtt{d}(Q))^\sigma}$ (видети [65, Формула (9)]). Ова оцена је најбоља могућа будући да смо у [32, Теорема 1.8] показали да за сваки прост модул Q постоји карактер $\chi \pmod{Q}$ такав да важи $\log L(s,\chi) \gg_\sigma \dfrac{\mathtt{d}(Q)^{(1-\sigma)}}{(\log \mathtt{d}(Q))^\sigma}$.

Као и у случају Риманове зета функције, и овде је згодно увести смену $u = q^{-s}$ и ознаку $\mathcal{L}(u,\chi) = L(s,\chi)$, где је χ Дирихлеов карактер. Надаље ћемо са $\mathbf{d}$ означавати степен кондуктора Q. Дирихлеове L-функције задовољавају следећу функционалну једначину.

Лема 2.6. *Нека је $Q \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ степена $\mathbf{d} \geqslant 1$ и нека је χ примитиван Дирихлеов карактер по модулу Q. Тада, ако је карактер χ непаран важи*

$$\mathcal{L}(u,\chi) = \varepsilon(\chi)\left(q^{\frac{1}{2}}u\right)^{\mathbf{d}-1}\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu},\overline{\chi}\right),$$

а ако је χ паран важи

$$\mathcal{L}(u,\chi) = \varepsilon(\chi)\left(q^{\frac{1}{2}}u\right)^{\mathbf{d}-2}\frac{1-u}{1-\frac{1}{qu}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu},\overline{\chi}\right),$$

где је $\varepsilon(\chi)$ комплексан број модула 1.

Доказ. Ово је специјални случај [73, Теорема 9.24А]. □

За крај, напоменимо да из $\overline{\mathcal{L}(u,\chi)} = \mathcal{L}\left(\overline{u},\overline{\chi}\right)$ следи $\overline{\varepsilon(\chi)} = \varepsilon\left(\overline{\chi}\right)$, а тиме и $\varepsilon(\chi)\varepsilon\left(\overline{\chi}\right) = 1$.

2.3 Моменти Дирихлеових L-функција

Како се израз за Риманову зета функцију значајно поједноставио, нема потребе испитивати њене моменте. Са друге стране, моменти Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима представљају један занимљив и изучаван проблем. Хипотезе о моментима над $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$ које долазе из Теорије случајних матрица су потпуно аналогне онима над $\mathbb{Q}$ и могу се пронаћи у [83].

Други и четврти момент у овој поставци су израчунали Андраде и Јасемидес [10] 2021. године:

$$\frac{1}{\varphi^*(Q)}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}^{*}\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^2 = \frac{\varphi(Q)}{|Q|}\mathtt{d}(Q) + O(\log\omega(Q)),$$

$$\frac{1}{\varphi^*(Q)}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}^{*}\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^4 = \frac{1-\frac{1}{q}}{12}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|Q}}\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^3}{1+\frac{1}{|P|}}\mathtt{d}(Q)^4\left(1+O\left(\left(\frac{\omega(Q)}{\mathtt{d}(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right),$$

где $\displaystyle\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}^{*}$ означава сумацију по примитивним карактерима по модулу Q, $\varphi^*(Q)$ број таквих карактера, а $\omega(Q)$ број простих делилаца полинома Q.

Ови резултати представљају аналог (1.24) и (1.25). Додатно, у случају да је полином Q бесквадратан, исти аутори су у [10] добили и тачну вредност за други момент, што није тако често у Аналитичкој теорији бројева. Исте резултате је имала и Тамам [79] пар година раније, али само за просте полиноме Q.

Као уопштење претходног Андраде и Јасемидес [11] су израчунали и четврти момент извода $\frac{1}{\varphi(Q)}\frac{1}{(\log q)^{2k+2l}}\sum_{\substack{\chi \pmod Q\\ \chi\neq\chi_0}}\left|L^{(k)}\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^2\left|L^{(l)}\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^2$, за ненегативне целе бројеве k и l.

Наш главни резултат је шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима и биће изложен у наредној глави.

Неки моменти Дирихлеових L-функција по фамилији квадратних карактера над функцијским пољима се могу пронаћи у [17, 29, 34, 35, 36].

Глава 3

Главни резултати

Наш главни резултат ће бити шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима, аналог Теореме 1.26. Са $\sum\limits_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\flat}$ ћемо означавати сумацију по непарним примитивним карактерима по модулу Q, а са $\varphi^{\flat}(Q)$ број таквих карактера.

Теорема 3.1. *Кад позитиван цео број* $\mathbf{d} \to \infty$ *важи*

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\flat} \int_{0}^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \frac{42\, a_{3,q}}{9!} \mathbf{d}^9 \sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \mid Q}} \frac{\left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^5}{1 + \frac{4}{|P|} + \frac{1}{|P|^2}}, \tag{3.2}$$

где је

$$a_{3,q} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{|P|} + \frac{1}{|P|^2}\right).$$

Усредњење модула $r \leqslant R$ из Теореме 1.26 смо овде заменили усредњењем $Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}$ (што је аналог диадичког интервала). Поређења ради, идентичну ситуацију смо имали и у Теореми о простим бројевима (1.6) и Теореми о простим полиномима (2.1). Додатно, с обзиром да је Дирихлеова L-функција $\frac{2\pi i}{\log q}$-периодична, скратили смо домен интеграције на један период са критичне линије. Рестрикција на непарне карактере је чисто техничке природе како би функционална једначина (Лема 2.6) имала једноставнији облик. Истим методом се може извести аналогни резултат за парне, а самим тим и за све примитивне карактере.

Асимптотску формулу (3.2) смо изразили у овом облику како би било видљиво да је добијени резултат у складу са Хипотезом (1.34) (односно њеним аналогом [83, Претпоставке 2.4.3 и 2.4.5 и Теорема 2.4.4] над функцијским пољима). Напомињемо да у (3.2) интегралимо по вероватносној мери, па је интеграл уједно и средња вредност. Дужине сумација по χ и Q су $\varphi^{\flat}(Q)$ и $q^{\mathbf{d}}$, редом, а остатак десне стране (3.2) долази из поменутих хипотеза. Додатним сређивањем израза на десној страни (3.2) добијамо следећи експлицитнији облик.

Последица 3.3. *Кад позитиван цео број* $\mathbf{d} \to \infty$ *важи*

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \frac{42\, \widetilde{a}_{3,q}}{9!} \frac{q-2}{q-1} q^{2\mathbf{d}} \mathbf{d}^9,$$

где је

$$\widetilde{a}_{3,q} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^5 \left(1 + \frac{5}{|P|} - \frac{5}{|P|^2} + \frac{14}{|P|^3} - \frac{15}{|P|^4} + \frac{5}{|P|^5} + \frac{4}{|P|^6} - \frac{4}{|P|^7} + \frac{1}{|P|^8}\right).$$

Сада ћемо формулисати један општији резултат из којег следи Теорема 3.1. У питању је шести момент Дирихлеових L-функција са *померајима*. Најпре ћемо увести пар ознака. За непаран Дирихлеов карактер χ (mod Q), *комплетирана L-функција* је дефинисана са

$$\Lambda\left(\frac{1}{2} + s, \chi\right) = q^{\frac{(\mathrm{d}(Q)-1)s}{2}} L\left(\frac{1}{2} + s, \chi\right). \tag{3.4}$$

Из Леме 2.6 следи да комплетирана L-функција задовољава симетричну функционалну једначину $\Lambda(s, \chi) = \Lambda\left(1 - s, \overline{\chi}\right)$.

Нека су $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ тројке комплексних помераја. Са $\boldsymbol{\alpha} + s = (\alpha_1 + s, \alpha_2 + s, \alpha_3 + s)$ ћемо означавати транслирану тројку, за све $s \in \mathbb{C}$. Користићемо краћу ознаку за следећи производ шест вредности комплетиране L-функције са померајима:

$$\Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{j=1}^{3} \Lambda\left(\frac{1}{2} + \alpha_j, \chi\right) \Lambda\left(\frac{1}{2} - \beta_j, \overline{\chi}\right).$$

Пар $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ можемо поистоветити са шесторком $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$, где је $\alpha_{3+j} = \beta_j$, за $j = 1, 2, 3$. Тада имамо природно дејство симетричне групе $\mathbb{S}_6$ дато са $\pi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(6)}\right)$, за све $\pi \in \mathbb{S}_6$. Означићемо са $\pi(\boldsymbol{\alpha})$ прве три, а са $\pi(\boldsymbol{\beta})$ последње три координате шесторке $\pi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Из Дефиниције (3.4) је јасно да је комплетирана L-функција $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$-инваријантна, а из симетричности функционалне једначине следи да је иста функција и $\mathbb{S}_6$-инваријантна.

Теорема 3.5. *Нека* $\mathbf{d} \to \infty$ *по позитивним целим бројевима, и нека су* $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$ *две тројке комплексних бројева такве да је* $\alpha_j, \beta_j \ll \dfrac{1}{\mathbf{d}}$*, за* $j = 1, 2, 3$*. Тада за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha} + it, \boldsymbol{\beta} + it) \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} = \sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^\flat(Q) \widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right),$$

где је

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3)} \mathcal{Q}(Q; \pi(\boldsymbol{\alpha}), \pi(\boldsymbol{\beta})) \tag{3.6}$$

а функција $\mathcal{Q}$ *ће бити накнадно дефинисана у (7.6).*

Ова теорема представља аналог [25, Теорема 1] над $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{r}{R}\right) \sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha} + iy, \boldsymbol{\beta} + iy)\, dy \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{r}{R}\right) \varphi^\sharp(r) \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{Q}}(r; \boldsymbol{\alpha} + iy, \boldsymbol{\beta} + iy)\, dy + O\left(R^{\frac{19}{10}+\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

кад $R \to \infty$ и $\alpha_j, \beta_j \ll \dfrac{1}{\log R}$, за $j = 1, 2, 3$, где је Ψ глатка функција компактно садржана у $[1, 2]$, $\sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, r)}$ означава сумацију по парним примитивним карактерима по модулу r, $\varphi^\sharp(r)$ број таквих карактера, а функција $\widetilde{\mathcal{Q}}$ се дефинише на сличан начин као у Теореми 3.5. Језгро Ψ овде ограничава сумацију на диадички интервал.

У поређењу са (3.7) Теорема 3.5 доноси два побољшања. Прво је оштрија оцена за грешку и јавља се због интеграције по компактном интервалу. Друго побољшање је што интеграл који се јавља на десној страни (3.7) над $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$ можемо експлицитно израчунати. Ваља напоменути и да је у доказу (3.7) коришћено велико решето као замена за Уопштену Риманову хипотезу, која важи над функцијским пољима, али то не доноси никакво побољшање резултата.

Теорему 3.1 ћемо добити као гранични случај Теореме 3.5 када $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, где је $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Као што ћемо видети у Дефиницији (7.6), функција $\mathcal{Q}$ садржи чинилац $\prod_{j,l=1}^{3} \zeta\left(1 + \alpha_j - \beta_l\right)$, па ће имати пол реда 9 у тачки

$(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Приликом сумирања (3.6) доћи ће до покраћења $\#\left(\mathbb{S}_6 / (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3)\right) = 20$ оваквих полова, што ће омогућити израчунавање жељеног лимеса кад $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \to (\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Сада је јасно зашто разматрамо момент са померајима. Помераји нам омогућавају да некако раздвојимо поменуте полове. Зато Теорема 3.5 представља уопштење Теореме 3.1, али истовремено и корак у доказу Теореме 3.1.

У наставку ћемо дати доказ Теорема 3.1 и 3.5 и Последице 3.3, који су оригинално објављени у [30].

Глава 4

Још о карактерима

4.1 Ортогоналност Дирихлеових карактера

Дирихлеови карактери на $\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ задовољавају уобичајене *релације ортогоналности*. У овом поглављу ћемо претпостављати да за кондуктор Q важи $\mathbf{d} = \mathtt{d}(Q) \geqslant 1$.

Прво, за било која два Дирихлеова карактера χ_1, χ_2 по модулу Q важи

$$\frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{N} \chi_1(N)\overline{\chi}_2(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \chi_1 = \chi_2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{4.1}$$

при чему сумација иде по скупу представника по модулу Q.

Специјално, за $n \geqslant \mathbf{d}$ скуп $\mathcal{M}_n$ је дисјунктна унија $q^{n-\mathbf{d}}$ скупова представника по модулу Q, па (4.1) даје

$$\sum_{N \in \mathcal{M}_n} \chi(N) = 0, \tag{4.2}$$

за нетривијалан карактер $\chi \pmod{Q}$. Ово даље значи да је $\mathcal{L}(u, \chi)$ полином по u степена највише $\mathbf{d} - 1$.

Такође, за све полиноме $M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ узајамно просте са Q важи

$$\frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\chi \pmod{Q}} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } M \equiv N \pmod{Q}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Релације (4.1) и (4.3) следе из [3, Теорема 1.24].

Следећа лема даје релације ортогоналности за (не)парне карактере. (Надаље ћемо све изразе за суме $\displaystyle\sum_{\chi} \chi(M)\overline{\chi}(N)$ звати релацијама ортогоналности по узору на (4.3).)

Лема 4.4. *За све $M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ узајамно ӣросӣе са Q важи*

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ \chi \text{ ӣаран}}} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(Q)}{q-1}, & \text{ако је } cM \equiv N \pmod{Q}, \text{ за неко } c \in \mathbb{F}_q^{\times}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{4.5}$$

и

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ \chi \text{ неӣаран}}} \chi(M)\overline{\chi}(N)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{q-2}{q-1}\varphi(Q), & \text{ако је } M \equiv N \pmod{Q}, \\ -\dfrac{\varphi(Q)}{q-1}, & \text{ако је } cM \equiv N \pmod{Q}, \text{ за неко } c \in \mathbb{F}_q^{\times},\ c \neq 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Доказ. Показаћемо да важи (4.5), тада (4.6) следи из (4.3) и (4.5). Рестрикција било ког карактера $\chi \pmod{Q}$ на константе је карактер мултипликативне групе $\mathbb{F}_q^{\times}$. Тај рестриковани карактер је тривијалан ако и само ако је почетни карактер χ паран. Зато релација ортогоналности (из [3, Теорема 1.24]) за рестрикован карактер постаје

$$\frac{1}{q-1}\sum_{c \in \mathbb{F}_q^{\times}} \chi(c) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \chi \text{ паран}, \\ 0, & \text{ако је } \chi \text{ непаран}. \end{cases}$$

Користећи претходно као детектор парних карактера добијамо

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ \chi \text{ паран}}} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \frac{1}{q-1}\sum_{c \in \mathbb{F}_q^{\times}} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \chi(cM)\overline{\chi}(N),$$

што заједно са (4.3) даје (4.5). □

Следећи циљ је израчунати аналогне суме уз ограничење на примитивне карактере. За то ћемо користити *Мебијусову инверзију*, тј. њен аналог над рационалним функцијским пољима. Нека су $f, g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ такве да важи

$$g(N) = \sum_{\substack{D \in \mathcal{M} \\ D \mid N}} f(D),$$

за све $N \in \mathcal{M}$. Мебијусова формула инверзије каже да је тада

$$f(N) = \sum_{\substack{D \in \mathcal{M} \\ D \mid N}} \mu\left(\frac{N}{D}\right) g(D),$$

за све $N \in \mathcal{M}$, где је

$$\mu(N) = \begin{cases} (-1)^{\omega(N)}, & \text{ако је } N \text{ бесквадратан}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

за $N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$. Доказ је исти као за класичну Мебијусову формулу инверзије [3, Теорема 1.11] над $\mathbb{Q}$.

Лема 4.7. *За све $M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ узајамно просте са Q важи*

$$\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{*} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \sum_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ K \mid (Q, M-N)}} \mu\left(\frac{Q}{K}\right) \varphi(K),$$

где $\sum\limits_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{*}$ *означава сумацију по примитивним карактерима по модулу Q.*

Доказ. Следи из (4.3) и Мебијусове инверзије. За случај да модул Q није моничан видети напомену иза Дефиниције 2.3. □

Специјално, заменом $M = N$ у претходној леми добијамо да је број примитивних карактера по модулу Q једнак $\varphi^*(Q) = \sum\limits_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ K \mid Q}} \mu\left(\frac{Q}{K}\right) \varphi(K)$.

Функција φ^* је мултипликативна и важи

$$\varphi^*(P^a) = \begin{cases} |P| - 2, & \text{ако је } a = 1, \\ |P|^{a-2}(|P|-1)^2, & \text{ако је } a \geqslant 2, \end{cases} \tag{4.8}$$

за све просте полиноме P и $a \in \mathbb{N}$.

Лема 4.9. *За све $M, N \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ узајамно просте са Q важи*

$$\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\sharp} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \frac{1}{q-1} \sum_{c \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ K \mid (Q, cM-N)}} \mu\left(\frac{Q}{K}\right) \varphi(K)$$

и

$$\begin{aligned} &\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\flat} \chi(M)\overline{\chi}(N) \\ &= \frac{q-2}{q-1} \sum_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ K \mid (Q, M-N)}} \mu\left(\frac{Q}{K}\right) \varphi(K) - \frac{1}{q-1} \sum_{\substack{c \in \mathbb{F}_q^\times \\ c \neq 1}} \sum_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ K \mid (Q, cM-N)}} \mu\left(\frac{Q}{K}\right) \varphi(K), \end{aligned}$$

где $\sum\limits_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\sharp}$ *и* $\sum\limits_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}^{\flat}$ *означавају сумације по парним и непарним примитивним карактерима по модулу Q, редом.*

Доказ. Показује се на исти начин као и Лема 4.4, уз коришћење Леме 4.7 уместо (4.3). □

Специјално, из претходне две леме следи да су број парних и број непарних примитивних Дирихлеових карактера по модулу Q једнаки $\varphi^\sharp(Q) = \dfrac{\varphi^*(Q)}{q-1}$ и $\varphi^\flat(Q) = \dfrac{q-2}{q-1}\varphi^*(Q)$, редом.

4.2 Хајесови карактери и придружене L-функције

Сада ћемо дати кратак преглед *Хајесових карактера*. За више детаља и комплетне доказе свега наведеног упућујемо на Хајесов рад [46], заснован на његовој тези, где су ови карактери први пут уведени. Исте резултате у модерној нотацији, заједно са неким занимљивим применама, је могуће пронаћи у радовима Городетског [40, 41, 42].

Дирихлеове карактере смо користили за детектовање аритметичких низова. Хајесови карактери ће бити њихово уопштење које детектује пресек аритметичког низа и кратког интервала (кратке лопте).

Нека је l ненегативан цео број и $F \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$. Имамо релацију еквиваленције $R_{l,F}$ на скупу моничних полинома $\mathcal{M}$ задату са $M \equiv N \pmod{R_{l,F}}$ ако и само ако је $M \equiv N \pmod{F}$ и полиноми M и N имају истих l коефицијената иза водећег. По конвенцији, подразумеваћемо да је j-ти коефицијент иза водећег од полинома $N \in \mathcal{M}$ једнак нули за све $j > \mathtt{d}(N)$. Напомињемо да овде не захтевамо да су полиноми M и N истог степена, захтевамо само да им је водећи коефицијент 1, и затим упоређујемо наредних l коефицијената. На пример, $\mathrm{x}^5 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + 1 \equiv \mathrm{x}^3 + \mathrm{x} + 1 \pmod{R_{4,\mathrm{x}}}$.

Као и код Дирихлеових карактера релација $R_{l,F}$ се поклапа са релацијом $R_{l,cF}$, за све $c \in \mathbb{F}_q^\times$.

Занимљиво је да Хајесови карактери немају аналог над прстеном целих бројева $\mathbb{Z}$ јер концепт „коефицијенти иза водећег“ не можемо превести на бројеве.

Са $\underline{N}$ ћемо означавати класу еквиваленције полинома $N \in \mathcal{M}$ по модулу $R_{l,F}$. Може се проверити да је $\mathcal{M}/R_{l,F}$ добро дефинисан комутативан моноид, где је операција уобичајено множење полинома са неутралом $\underline{1}$. Класа $\underline{N}$ је јединица у $\mathcal{M}/R_{l,F}$ ако и само ако је N узајамно прост са F. Група јединица овог моноида је

$$(\mathcal{M}\,/R_{l,F})^{\times} \cong \mathcal{M}\,/\big(1+\mathrm{x}^{l+1}\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]\big) \oplus (\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]/\,F\mathbb{F}_q[\mathrm{x}])^{\times}$$

(видети [42, Формула (2.1)]). Специјално, $\#\,(\mathcal{M}\,/R_{l,F})^{\times} = q^l\varphi(F)$.

Један скуп представника по модулу $R_{l,F}$ је $\mathcal{M}_{l+\mathtt{d}(F)}$. Општије, за сваки $n \geqslant l + \mathtt{d}(F)$ скуп $\mathcal{M}_n$ је дисјунктна унија $q^{n-l-\mathtt{d}(F)}$ скупова представника по модулу $R_{l,F}$. Уколико бисмо фиксирали степен, за сваки $N \in \mathcal{M}_n$, скуп $\{M \in \mathcal{M}_n \mid M \in \underline{N}\}$ се може експлицитно описати са

$$\{M \in \mathcal{M}_n \,|\, M \equiv N \pmod{F}\} \cap \{M \in \mathcal{M}_n \,|\, \mathtt{d}(M-N) \leqslant n-l-1\}.$$

Другим речима, добили смо пресек аритметичког низа и кратког интервала око N, као што смо и најавили.

За сваки карактер $\underline{\chi}$ Абелове групе $(\mathcal{M}\,/R_{l,F})^{\times}$ имаћемо придружен Хајесов карактер χ по модулу $R_{l,F}$ на скупу $\mathcal{M}$ задат са $\chi(N) = \begin{cases} \underline{\chi}\,(\underline{N})\,, & \text{ако је } (N,F)=1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Број Хајесових карактера по модулу $R_{l,F}$ је $\#\,(\mathcal{M}\,/R_{l,F})^{\times} = q^l\varphi(F)$.

Тривијални Хајесов карактер $\chi_0(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (N,F)=1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ по модулу $R_{l,F}$ се на $\mathcal{M}$ поклапа са тривијалним Дирихлеовим карактером по модулу F. Слично, Хајесов карактер по модулу $R_{0,F}$ је само рестрикција Дирихлеовог карактера по модулу F на моничне полиноме. Затим, сваки Хајесов карактер по модулу $R_{l,F}$ се може представити као производ једног Дирихлеовог карактера по модулу F и једног Хајесовог карактера $R_{l,1}$ („карактера кратког интервала“).

Рекли смо да је сваки Дирихлеов карактер производ Дирихлеових карактера чији је модул степен простог полинома. Хајесови карактери ће укључивати још један додатни чинилац који одговара „простом полиному у бесконачности“. Да будемо прецизнији, конгруенција $M \equiv N \pmod{P^a}$ значи да је P-адска норма разлике $M-N$ мања или једнака $|P|^{-a}$. Са друге стране, за $M, N \in \mathcal{M}_n$ конгруенција $M \equiv N \pmod{R_{l,1}}$ би значила да је $|M-N| \leqslant q^{n-l-1}$, а норма $|\cdot|$ се поистовећује са P-адском нормом за $P = \infty$.

Имамо и релације ортогоналности сличне онима које важе за Дирихлеове карактере. Претпоставићемо да је $\mathtt{d}(F) \geqslant 1$ (како скуп карактера по модулу

$R_{0,F}$ не би био празан). За свака два Хајесова карактера $\chi_1, \chi_2 \pmod{R_{l,F}}$ важи

$$\frac{1}{q^l \varphi(F)} \sum_N \chi_1(N)\overline{\chi_2}(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \chi_1 = \chi_2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

кад N пролази скуп представника по модулу $R_{l,F}$. Специјално, за нетривијални кррактер $\chi \pmod{R_{l,F}}$ и $n \geqslant l + \mathtt{d}(F)$ је

$$\sum_{N \in \mathcal{M}_n} \chi(N) = 0. \tag{4.10}$$

Такође, за све $M, N \in \mathcal{M}$ узајамно просте са F важи

$$\frac{1}{q^l \varphi(F)} \sum_{\chi \left(\operatorname{mod} R_{l,F}\right)} \chi(M)\overline{\chi}(N) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } M \equiv N \pmod{R_{l,F}}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{4.11}$$

(видети [40, Формуле (2.1) – (2.3)]).

Дефиниције примитивних и (не)парних Хајесових карактера су аналогне онима у случају Дирихлеових карактера, и могу се наћи у [42, Поглавље 2.1.3].

Хајесовом карактеру $\chi \pmod{R_{l,F}}$ се може придружити *L-функција* задата редом и Ојлеровим производом

$$L(s,\chi) = \sum_{N \in \mathcal{M}} \frac{\chi(N)}{|N|^s} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(P)}{|P|^s}\right)^{-1},$$

Уколико је Хајесов карактер χ нетривијалан, претходна L-функција конвергира за $\Re s > 0$ и има холоморфно продужење на целу комплексну раван.

За L-функцију придружену Хајесовом карактеру такође важи Уопштена Риманова хипотеза, тј. све нуле ове L-функције се налазе на критичној линији $\Re s = \dfrac{1}{2}$. Доказ је дао Рин у својој тези [70, Теорема 3], имитирајући Вејлов доказ [82] истог тврђења за Дирихлеове карактере. Следеће ограничење за L-функцију придружену Хајесовом карактеру је засновано на Уопштеној Римановој хипотези и представља уопштење Тврђења 2.5.

Тврђење 4.12. *Нека је $\dfrac{1}{2} < \sigma < 1$ фиксирано и нека је l ненегативан цео број, $F \in \mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ и χ нетривијалан Хајесов карактер по модулу $R_{l,F}$. Тада за сваки комплексан број s такав да је $\Re s = \sigma$ важи*

$$\log L(s,\chi) \ll_\sigma \frac{(l + \mathtt{d}(F))^{2(1-\sigma)}}{\log(l + \mathtt{d}(F))}.$$

Доказ. Помоћу Тејлоровог развоја логаритма добијамо да је

$$\log L(s,\chi) = -\sum_{P\in\mathcal{P}} \log\left(1-\frac{\chi(P)}{|P|^s}\right) = \sum_{P\in\mathcal{P}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{\chi(P)}{|P|^s}\right)^a = \sum_{N\in\mathcal{M}}\frac{\Lambda(N)\chi(N)}{\mathtt{d}(N)|N|^s}, \tag{4.13}$$

где је

$$\Lambda(N) = \begin{cases} \mathtt{d}(P), & \text{ако је } N \text{ степен простог полинома } P,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

фон Манголтова функција (над функцијским пољима). Затим ћемо раздвојити суму по N на два дела: $\mathtt{d}(N) \leqslant m$ и $\mathtt{d}(N) > m$, при чему ћемо параметар m изабрати касније.

Прва од тих сума је

$$\sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant m}}\frac{\Lambda(N)\chi(N)}{\mathtt{d}(N)|N|^s} \ll \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ \mathtt{d}(P)\leqslant m}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a|P|^{a\sigma}} \ll \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ \mathtt{d}(P)\leqslant m}}\frac{1}{|P|^{\sigma}},$$

што се може ограничити са

$$\zeta(2-\sigma)\frac{q^{m(1-\sigma)}}{m} \ll_\sigma \frac{q^{m(1-\sigma)}}{m}$$

помоћу [62, Лема 2.2].

Преостала сума је

$$\sum_{\substack{N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(N)>m}}\frac{\Lambda(N)\chi(N)}{\mathtt{d}(N)|N|^s} = \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{nq^{ns}}\sum_{N\in\mathcal{M}_n}\Lambda(N)\chi(N). \tag{4.14}$$

Овде ћемо искористити границу

$$\left|\sum_{N\in\mathcal{M}_n}\Lambda(N)\chi(N)\right| \leqslant (l+\mathtt{d}(F)-1)q^{\frac{n}{2}}$$

из [42, Формула (2.10)], која се заснива на Уопштеној Римановој хипотези за L-функције придружене Хајесовом карактеру. Помоћу ње можемо ограничити (4.14) са

$$(l+\mathtt{d}(F))\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{nq^{n\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}} \ll \frac{l+\mathtt{d}(F)}{mq^{m\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Све заједно, то значи да је (4.13) ограничено са $O_\sigma\left(\frac{q^{m(1-\sigma)}}{m} + \frac{l+\mathtt{d}(F)}{mq^{m\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}}\right)$. Оптималним избором параметра $m = [2\log_q(l+\mathtt{d}(F))]$ завршавамо доказ. □

Овде такође уводимо смену $u = q^{-s}$ и пишемо $\mathcal{L}(u,\chi) = L(s,\chi)$, где је χ Хајесов карактер по модулу $R_{l,F}$. Уколико је карактер χ нетривијалан из (4.10) следи да је $\mathcal{L}(u,\chi)$ полином по u степена највише $l + \mathtt{d}(F) - 1$.

4.3 Перонова формула

У Аналитичкој теорији бројева *Перонова формула* омогућава да се парцијална сума Дирихлеовог реда израчуна помоћу комплексне интеграције.

Као мотивацију прво ћемо навести Перонову формулу над пољем рационалних бројева и једну њену класичну примену. Нека је $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ функција таква да ред $\mathcal{A}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ апсолутно конвергира за $\Re s > \sigma$. Тада је

$$\sum_{n\leqslant x}{}' a(n) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \mathcal{A}(s) \frac{x^s}{s} ds, \tag{4.15}$$

за $c > \max\{0,\sigma\}$ и $x > 0$, где $\sum_{n\leqslant x}{}'$ значи да је последњи члан сумације помножен са $\frac{1}{2}$ у случају да је x цео број. За доказ Перонове формуле видети [3, Теорема 3.24].

Перонова формула (4.15) заузима важно место у доказу Теореме о простим бројевима. Помоћу ње се Чебишовљева бројачка функција $\psi = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)$ трансформише у

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds, \tag{4.16}$$

при чему је последња једнакост добијена диференцирањем израза

$$\log\zeta(s) = \log \prod_{p \text{ прост}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = -\sum_{p \text{ прост}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p \text{ прост}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

по s. Затим се у (4.16) искористи Кошијева теорема о резидуумима [74, Теорема 13.13] за правоугаоник са теменима $c - iT$, $c + iT$, $-U + iT$ и $-U - iT$, где $U \to \infty$. Интеграл по преостале три странице улази у грешку, па је (4.16) асимптотски једнако

$$-\sum_{\rho\in R} \operatorname*{Res}_{s=\rho} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s},$$

где је R скуп полова интегранда у поменутом правоугаонику. Скуп R садржи пол зета функције ($s = 1$), нетривијалне нуле зета функције, $s = 0$ и тривијалне нуле зета функције, што су управо четири сабирка из (1.7).

Сада ћемо дати аналог Перонове формуле над рационалним функцијским пољима. Уз стандардну смену $u = q^{-s}$ она добија елегантнији облик. Нека је $R < 1$ и нека је $a : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ функција таква да степени ред $A(u) = \sum_{N \in \mathcal{M}} a(N) u^{\mathrm{d}(N)}$ апсолутно конвергира за $|u| \leqslant R$. Тада је

$$\sum_{N \in \mathcal{M}_n} a(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=R} \frac{A(u)}{u^{n+1}} du \tag{4.17}$$

и

$$\sum_{N \in \mathcal{M}_{\leqslant n}} a(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=R} \frac{A(u)}{(1-u)u^{n+1}} du. \tag{4.18}$$

Формула (4.17) је познатија под називом *Кошијева интеграална формула* [8, Формула 4.2.3(24)], али ћемо је звати Пероновом јер тај назив носи њен аналог над пољем $\mathbb{Q}$. Уколико сумирамо (4.17) добићемо

$$\sum_{N \in \mathcal{M}_{\leqslant n}} a(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=R} A(u) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u^{k+1}} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=R} A(u) \frac{\frac{1}{u^{n+1}} - 1}{1-u} du.$$

Последње је једнако (4.18) јер је функција $\dfrac{A(u)}{1-u}$ аналитичка на диску $|u| < R$, па је њен интеграл једнак нули по Кошијевој интегралној теореми [74, Теорема 10.12].

Глава 5

„Апроксимативна“ функционална једначина

Као мотивацију прво наводимо апроксимативну функционалну једначину за Риманову зета функцију над $\mathbb{Q}$, коју су први извели Харди и Литлвуд у [45, Теорема А] (видети и [53, Теорема 4.1]). Ако је $s = \sigma + it$, где је $\sigma \in [0, 1]$ и $|t| = 2\pi xy$, при чему су x, y и $|t|$ већи од неке позитивне константе, тада је

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}} \sum_{n \leqslant y} \frac{1}{n^{1-s}} + O\left(x^{-\sigma}\right) + O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right). \tag{5.1}$$

Затим ћемо показати како се апроксимативна функционална једначина користи за израчунавање момената кроз скицу доказа (1.19), комплетан доказ се може наћи у [80, Теорема 7.3]. Избором параметара $x = \dfrac{t}{2\pi(\log t)^{\frac{1}{2}}}$ и $y = (\log t)^{\frac{1}{2}}$ апроксимативна функционална једначина (5.1) на критичној линији постаје

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} + O\left((\log t)^{\frac{1}{4}}\right),$$

па је други момент

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \sim \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m,n \leqslant x} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+it} n^{\frac{1}{2}-it}} dt. \tag{5.2}$$

Заменићемо редослед сумације и интеграције, при чему треба имати на уму да x зависи од t. Нека је $X = \dfrac{T}{2\pi(\log T)^{\frac{1}{2}}}$ и $T_1 = T_1(m, n)$ такво да важи

$\dfrac{T_1}{2\pi\,(\log T_1)^{\frac{1}{2}}} = \max\{m,n\}$. Тада је десна страна (5.2) једнака

$$\frac{1}{T}\sum_{m,n\leqslant X}\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\int_{T_1}^{T}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}dt = \sum_{n\leqslant X}\frac{1-\frac{T_1(n,n)}{T}}{n} + O\left(\frac{1}{T}\sum_{m<n\leqslant X}\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{n}{m}}\right).$$

Коначно, (1.19) следи из

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n}\sim\log X\sim\log T,$$

према [3, Лема 1.14],

$$\frac{1}{T}\sum_{n\leqslant X}\frac{T_1(n,n)}{n}\ll\frac{1}{T}\sum_{n\leqslant X}(\log n)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{X(\log X)^{\frac{1}{2}}}{T}\ll 1$$

и

$$\frac{1}{T}\sum_{m<n\leqslant X}\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{n}{m}}\ll\frac{X\log X}{T}\ll(\log T)^{\frac{1}{2}},$$

према [80, Формула (7.2.1)].

Сада прелазимо на рационална функцијска поља. Нека је $Q\in\mathbb{F}_q[\mathrm{x}]$ степена $\mathbf{d}\geqslant 1$ и нека је χ непаран примитиван карактер по модулу Q. Као што смо већ рекли, из (4.2) следи да је

$$\mathcal{L}(u,\chi)=\sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{d}-1}}\chi(N)u^{\mathrm{d}(N)}$$

полином по u степена највише $\mathbf{d}-1$.

Функционална једначина за Дирихлеове L-функције (Лема 2.6) нам омогућава да дужину сумације са $\mathbf{d}-1$ скратимо на $\left[\dfrac{\mathbf{d}}{2}\right]$. Из поменуте леме следи да се Дирихлеова L-функција придружена непарном карактеру χ може изразити у облику

$$\mathcal{L}(u,\chi)=\sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant\left[\frac{\mathbf{d}}{2}\right]}}\chi(N)u^{\mathrm{d}(N)}+\varepsilon(\chi)\left(q^{\frac{1}{2}}u\right)^{\mathbf{d}-1}\sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant\left[\frac{\mathbf{d}}{2}\right]-1}}\frac{\overline{\chi}(N)}{|N|u^{\mathrm{d}(N)}}\tag{5.3}$$

(видети [9, Формула (3.23)]). Специјално, у критичној тачки $u=q^{-\frac{1}{2}}$ имамо две исте суме чије се дужине разликују за 1. Иако је у питању тачна формула, израз (5.3) се традиционално назива *апроксимативна функционална једначина* јер представља аналог такве једначине (5.1) над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$.

Наш следећи циљ је апроксимативна функционална једначина за производ шест L-функција $\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ који се појављује у Теореми 3.5. То можемо урадити множењем шест апроксимативних функционалних једначина (5.3), али ћемо ефективнији резултат добити уколико изведемо једну заједничку апроксимативну функционалну једначину за производ свих шест L-функција.

Поред тога, у апроксимативну функционалну једначину ћемо укључити и полином

$$H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\prod_{j,l=1}^{3}\left(1-q^{-\alpha_j+\beta_l}u\right)\left(1-q^{\alpha_j-\beta_l}u\right)=\sum_{n=0}^{18}h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n.$$

Улога овог полинома је да „замаскира“ неке полове који ће се појавити у даљем рачуну. (Да будемо прецизнији, значај функције H ће се видети нпр. приликом примене Кошијеве теореме о резидуумима у (7.4). Комплетан рачун до тог места се може аналогно извести и без H, али бисмо у том случају имали знатно већи број резидуума у (7.5), рачун би се закомпликовао, нарушила би се симетрија, итд.) Није тешко проверити да функција H задовољава функционалну једначину

$$H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=u^{18}H\left(\frac{1}{u};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right). \tag{5.4}$$

Уведимо сада пар ознака. Нека је

$$\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j-\beta_j)$$

и

$$\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\prod_{j=1}^{3}\mathcal{L}\left(q^{-\alpha_j}u,\chi\right)\mathcal{L}\left(q^{\beta_j}u,\overline{\chi}\right).$$

Тада је

$$\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}},\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right).$$

За крај, нека је

$$\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})=\sum_{\substack{N_1,N_2,N_3\in\mathcal{M}\\ N=N_1N_2N_3}}|N_1|^{-\alpha_1}|N_2|^{-\alpha_2}|N_3|^{-\alpha_3},$$

функција која броји делиоце полинома N са одређеним тежинама $\boldsymbol{\alpha}$. Специјално, $\tau_3(N)=\sigma(N;\mathbf{0})$ је баш број разлагања полинома N на три делиоца.

Тврђење 5.5. *За непаран примитиван карактер χ по модулу Q и тројке $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^3$ важи*

$$
\begin{aligned}
&H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+15}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right) \\
&\quad + q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+14}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\beta})\sigma(N;-\boldsymbol{\alpha})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right),
\end{aligned}
$$

где је

$$V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = \sum_{m=0}^{\min\{18,n\}} h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(m).$$

Доказ. Можемо писати

$$\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n,$$

где су коефицијенти дати са

$$
\begin{aligned}
b_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) &= \sum_{\substack{M_1,M_2,M_3,N_1,N_2,N_3\in\mathcal{M} \\ \sum_{j=1}^{3}\mathtt{d}(M_j)+\sum_{l=1}^{3}\mathtt{d}(N_l)=n}} \frac{\chi\left(M_1M_2M_3\right)\overline{\chi}\left(N_1N_2N_3\right)}{|M_1|^{\alpha_1}|M_2|^{\alpha_2}|M_3|^{\alpha_3}|N_1|^{-\beta_1}|N_2|^{-\beta_2}|N_3|^{-\beta_3}} \\
&= \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)=n}} \chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta}), \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

за све $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Извешћемо апроксимативну функционалну једначину за функцију

$$u \mapsto H\left(qu^2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n, \qquad (5.7)$$

где је

$$a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = \sum_{m=0}^{\min\left\{18,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}} b_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n-2m)h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(m)q^m.$$

Због (4.2) можемо (али и не морамо) додатно претпостављати да је $\mathtt{d}\left(M_j\right), \mathtt{d}\left(N_j\right) \leqslant \mathbf{d}-1$ у (5.6), за $j=1,2,3$. То специјално значи да за $n > 6(\mathbf{d}-1)$ важи $b_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = 0$ као празна сума. Последица тога је да је $a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = 0$, за све $n > 6(\mathbf{d}+5)$.

Из функционалне једначине (Лема 2.6) следи

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \prod_{j=1}^{3} \varepsilon(\chi)\left(q^{\frac{1}{2}-\alpha_j}u\right)^{\mathbf{d}-1}\mathcal{L}\left(\frac{q^{\alpha_j}}{qu},\overline{\chi}\right)\varepsilon(\overline{\chi})\left(q^{\frac{1}{2}+\beta_j}u\right)^{\mathbf{d}-1}\mathcal{L}\left(\frac{q^{-\beta_j}}{qu},\chi\right)\\ &= q^{(\mathbf{d}-1)\left(3+\sum\limits_{j=1}^{3}(\beta_j-\alpha_j)\right)}u^{6(\mathbf{d}-1)}\prod_{j=1}^{3}\mathcal{L}\left(\frac{q^{-\beta_j}}{qu},\chi\right)\mathcal{L}\left(\frac{q^{\alpha_j}}{qu},\overline{\chi}\right)\\ &= q^{(\mathbf{d}-1)(3+2\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}))}u^{6(\mathbf{d}-1)}\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu},\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Комбинујући последње са (5.4), тј. $H\left(qu^2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) = \left(qu^2\right)^{18}H\left(\frac{1}{qu^2};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$ добијамо функционалну једначину

$$\begin{aligned}&H\left(qu^2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\ &= q^{2(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}\left(q^{\frac{1}{2}}u\right)^{6(\mathbf{d}+5)}H\left(\frac{1}{qu^2};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu},\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right)\\ &= q^{2(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}\sum_{n=0}^{6(\mathbf{d}+5)}a_{\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(n)q^{3(\mathbf{d}+5)-n}u^{6(\mathbf{d}+5)-n}.\end{aligned}$$

Уколико упоредимо коефицијенте последњег полинома (по u) са коефицијентима из (5.7) добијамо

$$q^{2(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}a_{\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(n)q^{3(\mathbf{d}+5)-n} = a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(6(\mathbf{d}+5)-n),$$

за све $n \leqslant 6(\mathbf{d}+5)$. Затим ћемо ову релацију применити на све коефицијенте са индексом већим од $3(\mathbf{d}+5)$. Тиме ћемо суму (5.7) дужине $6(\mathbf{d}+5)$ заменити са две упола краће суме:

$$\begin{aligned}&H\left(qu^2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{L}(u,\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\ &= \sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+15}a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n + \sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+14}a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(6(\mathbf{d}+5)-n)u^{6(\mathbf{d}+5)-n}\\ &= \sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+15}a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n + q^{2(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}\sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+14}a_{\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(n)q^{3(\mathbf{d}+5)-n}u^{6(\mathbf{d}+5)-n}.\end{aligned}$$

Специјално, у критичној тачки $u = q^{-\frac{1}{2}}$ имамо

$$H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}},\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) = \sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+15}\frac{a_{\chi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)}{q^{\frac{n}{2}}} + q^{2(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}\sum_{n=0}^{3\mathbf{d}+14}\frac{a_{\chi;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(n)}{q^{\frac{n}{2}}}.$$

На крају, множењем са $q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$ добијамо тврђење уз напомену да је $\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = -\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$. □

Суштина претходног тврђења је да преполови дужину сумације. Наравно, могли смо извести исти резултат и за $\mathcal{L}(\chi; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ и добити суме дужине $3\mathbf{d} - 3$ и $3\mathbf{d} - 4$. Међутим, одлучили смо се да у апроксимативну једначину укључимо и функцију H јер ће олакшати даљи рачун, а продужење дужине сумације за константу је занемарљиво када $\mathbf{d} \to \infty$.

Глава 6

Усредњавање по кругу и по карактерима и модулима

Нека је χ непаран примитивни Дирихлеов карактер по модулу Q. Апроксимативна функционална једначина (Тврђење 5.5) даје

$$
\begin{aligned}
&H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\\
&= H(1;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+15}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha}+it)\sigma(N;-\boldsymbol{\beta}-it)}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right)\\
&\quad + q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+14}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\beta}+it)\sigma(N;-\boldsymbol{\alpha}-it)}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\beta}+it,\boldsymbol{\alpha}+it}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right)\\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+15}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{|N|}{|M|}\right)^{it} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right)\\
&\quad + q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)+\mathtt{d}(N)\leqslant 3\mathbf{d}+14}} \frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\beta})\sigma(N;-\boldsymbol{\alpha})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{|M|}{|N|}\right)^{it} V_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14-\mathtt{d}(M)-\mathtt{d}(N)}{2}\right]\right),
\end{aligned}
$$

јер из $H(u;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it) = H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ следи $V_{\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it}(n) = V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)$, за све $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Сада ћемо претходну једнакост усредњити по $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{\log q}\right]$. Како за све $m \in \mathbb{Z}$ важи

$$
\int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} q^{imt}\frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } m = 0,\\ 0, & \text{ако је } m \neq 0,\end{cases}
$$

након интеграције ће остати само сабирци код којих је $\mathtt{d}(M) = \mathtt{d}(N)$. Другим речима,

$$\begin{aligned}
&H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\int_0^{\frac{2\pi}{\log q}}\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}\\
&=q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right]}}\frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right]-\mathtt{d}(N)\right)\\
&\quad+q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}\sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right]}}\frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\beta})\sigma(N;-\boldsymbol{\alpha})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right]-\mathtt{d}(N)\right).
\end{aligned}\tag{6.1}$$

Затим ћемо усредњити (6.1) по фамилији свих непарних примитивних Дирихлеових карактера по модулу Q, кад Q пролази свим моничним полиномима фиксираног степена $\mathbf{d}$. Нека је

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}}\sideset{}{^\flat}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}\int_0^{\frac{2\pi}{\log q}}\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}\\
&=\Delta\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right];\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)+\Delta\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right];\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
&\Delta(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&=q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}}\sideset{}{^\flat}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}\sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k}}\frac{\chi(M)\overline{\chi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N)),
\end{aligned}$$

за позитиван цео број k. Наш циљ ће бити да асимптотски оценимо $\Delta(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ за $k\in\left\{\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right],\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right]\right\}$. Као што смо и најавили израз $\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ садржи $H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ из техничких разлога. На крају ћемо дељењем $\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ са $H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ добити Теорему 3.5.

Релација ортогоналности из Леме 4.9 за $(MN,Q)=1$ даје

$$\sideset{}{^\flat}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}\chi(M)\overline{\chi}(N)=\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times}w(c)\sum_{\substack{D,R\in\mathcal{M}\\ DR=Q\\ R|cM-N}}\mu(D)\varphi(R)\tag{6.2}$$

где је

$$w(c)=\begin{cases}\dfrac{q-2}{q-1}, & \text{ако је } c=1,\\ -\dfrac{1}{q-1}, & \text{ако је } c\in\mathbb{F}_q^\times,\ c\neq 1.\end{cases}$$

Након примене ортогоналности (6.2) можемо поделити суму $\Delta(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ на

$$\begin{aligned}\Delta(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) =& q^{(\mathtt{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N))\\ &\times \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c) \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d}}\\ (D,MN)=1}} \mu(D) \sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathtt{d}-\mathtt{d}(D)}\\ R|cM-N\\ (R,MN)=1}} \varphi(R)\\ =&\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{S}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{G}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Сума $\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ ће бити дијагонални допринос, тј. сума свих чланова из $\Delta(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ код којих је $M = N$. Код другог и четвртог момента [10] (као и у доказу (1.19) представљеном у Глави 5) цео главни члан долази из дијагоналног доприноса. Овде ћемо имати и вандијагонални допринос ($M \neq N$) у главном члану Теореме 3.5. Најтежи задатак је препознати шта је највеће у том вандијагоналном доприносу и издвојити га од остатка. Урадићемо и једно додатно засецање, нека је $\mathbf{z} < \mathbf{d}$ целобројни параметар који ће бити накнадно одабран. Суме $\mathcal{S}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ и $\mathcal{G}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ ће означавати вандијагонални допринос ($M \neq N$) са додатним условом $\mathtt{d}(D) > \mathbf{z}$ и $\mathtt{d}(D) \leqslant \mathbf{z}$, редом.

Приметимо да у (6.2) највећи допринос имамо када је R велико (јер је $|\mu(D)| \leqslant 1$, а $\varphi(R) \sim |R|$). Зато је природно очекивати да поред $\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ главни допринос долази и из $\mathcal{G}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

Глава 7

Оцена дијагоналног доприноса $\mathcal{D}$

7.1 Почетне трансформације

Код дијагоналног доприноса $\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ нећемо почети са изразом из (6.3), већ ћемо се вратити корак уназад пре примене ортогоналности (6.2). Формално речено, поновном применом Леме 4.9 за $(Q,N)=1$ добијамо

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c) \sum_{\substack{D,R\in\mathcal{M}\\ DR=Q\\ R|(c-1)N}} \mu(D)\varphi(R) = \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \pmod{Q}} \chi(N)\overline{\chi}(N) = \varphi^\flat(Q).$$

Овим дијагонални допринос постаје

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) =& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathsf{d}(N))\\
&\times \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c) \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}}\\ (D,N)=1}} \mu(D) \sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathsf{d}(D)}\\ R|(c-1)N\\ (R,N)=1}} \varphi(R)\\
=& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{N\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathsf{d}(N)) \sum_{\substack{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}\\ (Q,N)=1}} \varphi^\flat(Q)\\
=& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^\flat(Q) \sum_{\substack{N\in\mathcal{M}_{\leqslant k}\\ (N,Q)=1}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathsf{d}(N))\\
=& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^\flat(Q) \sum_{n=0}^{k} a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n),
\end{aligned}$$

где је

$$a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = \sum_{\substack{N \in \mathcal{M}_{\leqslant n} \\ (N,Q)=1}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n - \mathtt{d}(N)).$$

Подсећамо да су коефицијенти $h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)$ дефинисани у Тврђењу 5.5, а додатно ћемо претпостављати и да је $h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) = 0$, за $n > 18$.

Наредни циљ је применити Перонову формулу на суму $\sum_{n=0}^{k} a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)$, и затим оценити добијени интеграл. Да бисмо то могли да урадимо прво треба одредити област у којој сума $\sum_{n=0}^{\infty} a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)$ конвергира и евентуално пронаћи њено аналитичко продужење на неку већу област.

7.2 Значајни Ојлерови производи

Почећемо са редом и Ојлеровим производом

$$\mathcal{B}(u,Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{\substack{N \in \mathcal{M} \\ (N,Q)=1}} \sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta}) u^{\mathtt{d}(N)} = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid Q}} \mathcal{B}_P(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

а користићемо и ознаку $\mathcal{B}_Q(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | Q}} \mathcal{B}_P(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. И генерално, кад год имамо функцију F изражену у облику Ојлеровог производа, са F_P ћемо означавати њен *Ојлеров P-чинилац*, тј. писаћемо $F(\dots) = \prod_{P \in \mathcal{P}} F_P(\dots)$.

За број делилаца важи

$$\tau(N) \ll_{\varepsilon} |N|^{\varepsilon}, \tag{7.1}$$

кад $\mathtt{d}(N) \to \infty$, за све $\varepsilon > 0$, што се може показати на исти начин као што је то урађено над пољем $\mathbb{Q}$ у [3, Тврђење 1.15]. Следи,

$$\tau_3(N) = \sum_{\substack{D \in \mathcal{M} \\ D|N}} \tau(D) \ll \sum_{\substack{D \in \mathcal{M} \\ D|N}} |D|^{\frac{\varepsilon}{2}} \ll |N|^{\frac{\varepsilon}{2}} \tau(N) \ll |N|^{\varepsilon},$$

за све $\varepsilon > 0$. Како је по претпоставци $\alpha_j \ll \dfrac{1}{\mathbf{d}}$ можемо сматрати да је $|\alpha_j| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, за $j = 1, 2, 3$. Тада је

$$\sigma(N;\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\substack{N_1,N_2,N_3 \in \mathcal{M} \\ N = N_1 N_2 N_3}} |N_1|^{-\alpha_1} |N_2|^{-\alpha_2} |N_3|^{-\alpha_3}$$

$$\leqslant |N|^{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}|\alpha_j|} \sum_{\substack{N=N_1N_2N_3\\ N_1,N_2,N_3\in\mathcal{M}}} 1 < |N|^{\frac{\varepsilon}{2}}\tau_3(N) \ll |N|^{\varepsilon}. \tag{7.2}$$

за све $\varepsilon > 0$. Аналогно, $\sigma(N;-\boldsymbol{\beta}) \ll |N|^{\varepsilon}$.

Као што можемо видети из првих неколико процена, $\varepsilon > 0$ увек можемо прескалирати. Зато то надаље нећемо наглашавати (сем када је неопходно), писаћемо ε и подразумевати да то ε није обавезно исто у сваком појављивању.

Из (7.2) следи да Ојлеров производ $\mathcal{B}(u,Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ апсолутно конвергира за $|u| < q^{-1-\varepsilon}$ јер је

$$|\mathcal{B}(u,Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \ll \sum_{\substack{N\in\mathcal{M}\\ (N,Q)=1}} |N|^{\varepsilon}|u|^{\mathrm{d}(N)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} q^{n\varepsilon}|u|^{n}\#\mathcal{M}_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^{1+\varepsilon}|u|\right)^{n}.$$

Користићемо следећи производ Риманових зета функција:

$$\mathcal{Z}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \prod_{j,l=1}^{3} \mathcal{Z}\left(q^{-\alpha_j+\beta_l}u\right).$$

Јасно је да за Ојлерове P-чиниоце важи $\mathcal{Z}_P(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \prod\limits_{j,l=1}^{3} \mathcal{Z}_P\left(q^{-\alpha_j+\beta_l}u\right)$, где $\mathcal{Z}_P(u) = \dfrac{1}{1-u^{\mathrm{d}(P)}}$ представља Ојлеров P-чинилац зета функције.

Помоћу $\mathcal{Z}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ ћемо „извући полове“ из функције $\mathcal{B}(u;Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ и тако обезбедити њено мероморфно продужење на ширу област. Ојлеров производ

$$\mathcal{A}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \prod_{P\in\mathcal{P}} \frac{\mathcal{B}_P}{\mathcal{Z}_P}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{7.3}$$

апсолутно конвергира за $|u| < q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ будући да у његовом Ојлеровом P-чиниоцу

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{B}_P}{\mathcal{Z}_P}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = &\prod_{j,l=1}^{3}\left(1-|P|^{-\alpha_j+\beta_l}u^{\mathrm{d}(P)}\right)\\ &\times\Bigg(1+\left(|P|^{-\alpha_1}+|P|^{-\alpha_2}+|P|^{-\alpha_3}\right)\left(|P|^{\beta_1}+|P|^{\beta_2}+|P|^{\beta_3}\right)u^{\mathrm{d}(P)}\\ &\quad+\sum_{a=2}^{\infty}\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^a;-\boldsymbol{\beta}\right)u^{a\mathrm{d}(P)}\Bigg)\end{aligned}$$

коефицијент испред $u^{\mathrm{d}(P)}$ постаје нула након скраћивања. Тада је

$$\mathcal{B}(u,Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathcal{A}\mathcal{Z}}{\mathcal{B}_Q}(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

при чему десна страна претходне једнакости представља мероморфно продужење функције $\mathcal{B}(u, Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ на већи диск $|u| < q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

7.3 Асимптотска оцена $\mathcal{D}$

Применићемо Перонову формулу (4.18) на функцију

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{N\in\mathcal{M}_{\leqslant n}\\(N,Q)=1}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n-\mathtt{d}(N))u^n \\
&= \sum_{m=0}^{18} h_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(m)u^m \sum_{\substack{N\in\mathcal{M}\\(N,Q)=1}} \frac{\sigma(N;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|} u^{\mathtt{d}(N)} \\
&= H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mathcal{B}\left(\frac{u}{q}, Q; \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right),
\end{aligned}$$

која апсолутно конвергира на диску $|u| \leqslant q^{-\varepsilon}$, што оправдава примену поменуте формуле. Помоћу (4.18) и Ојлерових производа из претходног поглавља дијагонални допринос можемо изразити у облику

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q)\frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_{Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n)u^n}{(1-u)u^{k+1}} du \\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q)\frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mathcal{B}\left(\frac{u}{q}, Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)}{(1-u)u^{k+1}} du \\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q)\frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\frac{\mathcal{A}\mathcal{Z}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)}{(1-u)u^{k+1}} du. \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Последње мероморфно продужење нам омогућава да повећамо контуру интеграције са $|u| = q^{-\varepsilon}$ на $|u| = q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. У кружном прстену $q^{-\varepsilon} < |u| < q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ имамо само један прост пол у тачки $u = 1$. Будући да је

$$H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mathcal{Z}\left(\frac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) = \prod_{j,l=1}^{3}\left(1 - q^{\alpha_j-\beta_l}u\right)$$

функција H поништава полове зета функција у овом прстену (као што је и најављено).

Са повећањем контуре у (7.4) смањује се вредност интегранда (за велико k), те очекујемо да интеграл по помереној контури буде прихватљиво мали. Функција $\dfrac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mathcal{AZ}\left(\frac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)}{1-u}$ мора бити ограничена константом на диску $|u| = q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, јер је аналитичка у некој околини тог диска. Исти закључак не можемо применити и на $\dfrac{1}{\mathcal{B}_Q}\left(\dfrac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$, јер би тада константа зависила од Q. Уместо тога, приметимо да је $\left|\mathcal{B}_P\left(\dfrac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$, за скоро све просте полиноме P, што повлачи

$$\frac{1}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) \ll 2^{\omega(Q)} \leqslant \tau(Q) \ll |Q|^{\varepsilon} = q^{\mathbf{d}\varepsilon},$$

према (7.1). Зато је интеграл по помереној контури ограничен са $\dfrac{q^{\mathbf{d}\varepsilon}}{\left(q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)^{k+1}} \ll q^{\mathbf{d}\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)}$.

Заједно са тривијалном оценом $\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q) \leqslant q^{\mathbf{d}}\#\mathcal{M}_\mathbf{d} = q^{2\mathbf{d}}$, из претходног и Кошијеве теореме о резидуумима следи

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= -q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\operatorname*{Res}_{u=1}\frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\frac{\mathcal{AZ}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{u}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)}{(1-u)u^{k+1}} + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)}\right)\\
&= q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\frac{\mathcal{AZ}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)}\right)\\
&= H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\mathcal{Q}(Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)}\right), \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

при чему смо увели додатну ознаку

$$\mathcal{Q}(Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\frac{\mathcal{AZ}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right). \qquad (7.6)$$

Тиме смо добили следеће тврђење.

Тврђење 7.7. *За* $k \in \left\{\left[\dfrac{3\mathbf{d}+15}{2}\right], \left[\dfrac{3\mathbf{d}+14}{2}\right]\right\}$ *важи*

$$\mathcal{D}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\mathcal{Q}(Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)}\right).$$

Ово тврђење ће нам дати два главна члана

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\mathcal{Q}(Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \qquad \text{и} \qquad \sum_{Q\in\mathcal{M}_\mathbf{d}} \varphi^\flat(Q)\mathcal{Q}(Q;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) \qquad (7.8)$$

у изразу за шести момент Дирихлеових L-функција из Теореме 3.5 који долазе из $\mathcal{D}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right];\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$ и $\mathcal{D}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right];\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right)$, редом. Сваки од чланова из (7.8) је $\mathbb{S}_3\times\mathbb{S}_3$-инваријантан, али није $\mathbb{S}_6$-инваријантан (што је својство шестог момента). Зато је природно очекивати да израз за шести момент садржи свих 20 чланова $\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}}\varphi^{\flat}(Q)\mathcal{Q}(Q;\pi(\boldsymbol{\alpha}),\pi(\boldsymbol{\beta}))$, кад π пролази $\mathbb{S}_6\,/(\mathbb{S}_3\times\mathbb{S}_3)$. У (7.8) имамо чланове који одговарају класама еквиваленције идентичке пермутације и пермутације $(1\,4)(2\,5)(3\,6)$, а остале треба пронаћи у вандијагоналном доприносу.

Глава 8

Ограничавање вандијагоналног доприноса $\mathcal{S}$

Подсећамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) =& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ M\neq N\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N))\\ &\times \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c) \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}\\ (D,MN)=1}} \mu(D) \sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}\\ R|cM-N\\ (R,MN)=1}} \varphi(R)\\ =& q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}}} \mu(D) \sum_{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \varphi(R) \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c)\\ &\times \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ M\neq N\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k\\ (MN,DR)=1\\ R|cM-N}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N)).\end{aligned}$$

Услов дељивости $R \mid (cM-N)$ можемо детектовати непарним Дирихлеовим карактерима ψ по модулу R, на основу Леме 4.4. Тиме претходно постаје

$$\begin{aligned}&q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}}} \mu(D)\\ &\times \sum_{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \sum_{\substack{\psi \,(\mathrm{mod}\, R)\\ \psi \text{ непаран}}} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\ M\neq N\\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k\\ (MN,DR)=1}} \frac{\psi(M)\overline{\psi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N))\end{aligned}$$

Сада ћемо комплетирати унутрашњу суму додавањем дијагоналних чланова $M = N$. Очекујемо да је тај додатак асимптотски мањи од $\mathcal{D}$ јер смо у међувремену прешли са Q на мањи модул R. Заиста, из (7.2) и тривијалне оцене $V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(n) \ll 1$, за све n, следи да је укупан допринос свих додатих чланова

$$\begin{aligned}
&\ll q^{(\mathbf{d}-1)\Re\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M} \\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}}} \sum_{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \varphi(R) \sum_{\substack{N\in\mathcal{M}_{\leqslant k} \\ (N,DR)=1}} |N|^{-1+\varepsilon} \\
&\ll q^{\mathbf{d}\varepsilon} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M} \\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}}} \sum_{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \varphi(R) \sum_{n=0}^{k} \frac{\#\mathcal{M}_n}{q^n} \\
&\ll \mathbf{d}q^{\mathbf{d}\varepsilon} \sum_{R\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{d}-\mathbf{z}}} \varphi(R) \sum_{D\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(R)}} 1 \\
&\ll q^{\mathbf{d}\varepsilon} \sum_{R\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{d}-\mathbf{z}}} |R| \frac{q^{\mathbf{d}}}{|R|} \ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Ово комплетирање нам омогућава да унутрашњу двоструку суму по M и N трансформишемо помоћу Пероних формула. За фиксиран степен $n = \mathtt{d}(M) = \mathtt{d}(N)$ можемо применити (4.17) на функције $F_1(v_1) = \sum_{\substack{M\in\mathcal{M} \\ (M,DR)=1}} \frac{\psi(M)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})}{|M|^{\frac{1}{2}}} v_1^{\mathtt{d}(M)}$ и $F_2(v_2) = \sum_{\substack{N\in\mathcal{M} \\ (N,DR)=1}} \frac{\overline{\psi}(N)\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|N|^{\frac{1}{2}}} v_2^{\mathtt{d}(N)}$ и (4.18) на функцију $H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. Функција F_i, за $i = 1, 2$, апсолутно конвергира За $|v_i| \leqslant q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ јер из (7.2) следи $F_i(v_i) \ll \sum_{M\in\mathcal{M}} |M|^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#\mathcal{M}_n}{q^{n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \ll 1$, док полином H апсолутно конвергира за све $u \in \mathbb{C}$. Следи,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M}_n \\ (MN,DR)=1}} \frac{\psi(M)\overline{\psi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-n) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\oint_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}} \frac{\sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ (MN,DR)=1}} \frac{\psi(M)\overline{\psi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} v_1^{\mathtt{d}(M)} v_2^{\mathtt{d}(N)}}{(v_1 v_2)^{n+1}} dv_1 dv_2 \\
&\times \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(1-u)u^{k-n+1}} du.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Приметимо да је

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{u^{k-n+1}(v_1 v_2)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{(v_1 v_2)^{k+1}} - \frac{1}{u^{k+1}}}{u - v_1 v_2},$$

као и да је допринос у интегралу по v_1 (или v_2) у (8.2) који одговара другом сабирку $-\dfrac{1}{(u-v_1v_2)\,u^{k+1}}$ једнак нули по Кошијевој интегралној теореми, јер интегранд нема сингуларитете на диску $|v_1| < q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Зато (8.2) износи

$$\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint\oint_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}}\oint_{|u|=q^{-\varepsilon}}\frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum\limits_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\(MN,DR)=1}}\dfrac{\psi(M)\overline{\psi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}v_1^{\mathtt{d}(M)}v_2^{\mathtt{d}(N)}}{(1-u)\,(u-v_1v_2)\,(v_1v_2)^{k+1}}du\,dv_1dv_2$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\oint_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}}\frac{H(v_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum\limits_{\substack{M,N\in\mathcal{M}\\(MN,DR)=1}}\dfrac{\psi(M)\overline{\psi}(N)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}v_1^{\mathtt{d}(M)}v_2^{\mathtt{d}(N)}}{(1-v_1v_2)\,(v_1v_2)^{k+1}}dv_1dv_2, \tag{8.3}$$

јер је интеграл по u имао само један прост пол у тачки $u = v_1v_2$ унутар диска $|u| < q^{-\varepsilon}$.

На кружници $|v_1| = q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ важи

$$\sum_{\substack{M\in\mathcal{M}\\(M,DR)=1}}\frac{\psi(M)\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})}{|M|^{\frac{1}{2}}}v_1^{\mathtt{d}(M)}=\prod_{j=1}^{3}\frac{\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)}{\mathcal{L}_{DR}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)},$$

где је $\mathcal{L}_{DR}(w,\psi) = \prod\limits_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|DR}}\dfrac{1}{1-\psi(P)w^{\mathtt{d}(P)}}$, и слично за суму по N. Како је Дирихлеов карактер ψ нетривијалан можемо померити контуре све до критичног круга L-функције. Другим речима, увећаћемо обе контуре до $|v_1| = |v_2| = q^{-\varepsilon}$ без преласка преко полова. Тада (8.3) постаје

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\oint_{|v_1|=|v_2|=q^{-\varepsilon}}\frac{H(v_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\prod\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)}{\mathcal{L}_{DR}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)}\dfrac{\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}+\beta_j}v_2,\overline{\psi}\right)}{\mathcal{L}_{DR}\left(q^{-\frac{1}{2}+\beta_j}v_2,\overline{\psi}\right)}}{(1-v_1v_2)\,(v_1v_2)^{k+1}}dv_1dv_2. \tag{8.4}$$

Како је $|\alpha_j| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ по претпоставци, из Тврђења 2.5 следи да је $\left|\log\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)\right| \leqslant C(s)\dfrac{\mathtt{d}(R)^{1-2\varepsilon-2\Re\alpha_j}}{\log\mathtt{d}(R)}$, при чему константа $C(s)$ зависи од $s=\dfrac{1}{2}+\varepsilon+\alpha_j$. Можемо сматрати да је константа C апсолутна јер $C(s)$ достиже максимум на компактном интервалу $\left[\frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{1+3\varepsilon}{2}\right]$. За довољно велико $\mathtt{d}(R)$ важи $C\frac{\mathtt{d}(R)^{-2\varepsilon-2\Re\alpha_j}}{\log \mathtt{d}(R)} < \varepsilon$, те је

$$\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1, \psi\right) \ll |R|^{\varepsilon} \ll q^{\mathbf{d}\varepsilon}. \tag{8.5}$$

Сваки коначан Ојлеров производ $\mathcal{L}_{DR}$ је тривијално ограничен са

$$\ll 2^{\omega(DR)} \leqslant \tau(DR) \ll |DR|^{\varepsilon} \ll q^{\mathbf{d}\varepsilon}. \tag{8.6}$$

Следи, цео двоструки интеграл (8.4) је ограничен са $q^{\mathbf{d}\varepsilon}$, а комплетирана сума $\mathcal{S}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ је

$$\ll q^{\mathbf{d}\varepsilon} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M} \\ \mathbf{z}<\mathtt{d}(D)\leqslant\mathbf{d}}} \sum_{R\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \sum_{\substack{\psi \,(\mathrm{mod}\, R) \\ \psi \text{ непаран}}} 1 \ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}.$$

Последња оцена и (8.1) нас доводе до следећег тврђења.

Тврђење 8.7. *За* $k \in \left\{\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right], \left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right]\right\}$ *и све* $\mathbf{z} < \mathbf{d}$ *важи*

$$\mathcal{S}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}.$$

Глава 9

Прелазак на комплементарни делилац у вандијагоналном доприносу $\mathcal{G}$

9.1 Прелазак на комплементарни делилац

Присетимо се да је

$$\mathcal{G}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = q^{(\mathtt{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ M\neq N \\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N))$$
$$\times \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} w(c) \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{z}} \\ (D,MN)=1}} \mu(D) \sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathtt{d}-\mathtt{d}(D)} \\ R\mid cM-N \\ (R,MN)=1}} \varphi(R). \tag{9.1}$$

За фиксиране полиноме M и N ћемо писати

$$G=(M,N), \qquad M_1=\frac{M}{G}, \qquad \text{и} \qquad N_1=\frac{N}{G}.$$

Тада су M_1 и N_1 узајамно прости и последња сума у (9.1) се може записати као

$$\sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathtt{d}-\mathtt{d}(D)} \\ R\mid cM-N \\ (R,MN)=1}} \varphi(R) = \sum_{\substack{R\in\mathcal{M}_{\mathtt{d}-\mathtt{d}(D)} \\ R\mid cM_1-N_1 \\ (R,GM_1N_1)=1}} \varphi(R), \tag{9.2}$$

при чему се услов $(R,GM_1N_1)=1$ у последњој суми може заменити условом $(R,G)=1$, јер $R \mid cM_1-N_1$ и $(M_1,N_1)=1$. Кључна идеја (која изворно долази из [25]) је замена делиоца R комплементарним делиоцем $\dfrac{cM_1 - N_1}{R}$ јер очекујемо да он има мањи степен када је $\mathtt{d}(R)$ велико. То нећемо урадити одмах јер би било незгодно изразити $\varphi(R)$ и услове у којима учествује R преко тог новог комплементарног делиоца, већ ћемо прво урадити пар трансформација.

Применићемо конволуциону једнакост

$$\varphi(R) = \sum_{\substack{A,L \in \mathcal{M} \\ AL = R}} \mu(A)|L|$$

(која се може добити Мебијусовом инверзијом као у [3, Пример 1.12]). Тада (9.2) постаје

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d} - \mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \mu(A) \sum_{\substack{L \in \mathcal{M}_{\mathtt{d} - \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(A)} \\ (L,G)=1 \\ cM_1 \equiv N_1 \ (\mathrm{mod}\, AL)}} |L|.$$

Детектор услова $(L,G) = 1$ је сума $\displaystyle\sum_{\substack{B \in \mathcal{M} \\ B | (L,G)}} \mu(B) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (L,G) = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$

(аналогно [3, Тврђење 1.10]), па је претходно једнако

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d} - \mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \mu(A) \sum_{\substack{L \in \mathcal{M}_{\mathtt{d} - \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(A)} \\ cM_1 \equiv N_1 \ (\mathrm{mod}\, AL)}} |L| \sum_{\substack{B \in \mathcal{M} \\ B | (L,G)}} \mu(B) \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d} - \mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \mu(A) \sum_{\substack{B \in \mathcal{M} \\ B | G}} \mu(B) \sum_{\substack{L \in \mathcal{M}_{\mathtt{d} - \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(A)} \\ B | L \\ cM_1 \equiv N_1 \ (\mathrm{mod}\, AL)}} |L|. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Полином $cM_1 - N_1$ није нула (јер је $M \neq N$), али можда није ни моничан. Зато ћемо га раставити на

$$cM_1 - N_1 = bALH$$

где је $b \in \mathbb{F}_q^\times$ водећи коефицијент од $cM_1 - N_1$ и H преостали монични делилац. Уколико у (9.3) заменимо суму по L сумом по H, уз напомену да је $|L| = \dfrac{q^{\mathtt{d}}}{|D||A|}$, добијамо

$$\frac{q^{\mathtt{d}}}{|D|} \sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d} - \mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d} - \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(A)} \\ B | G}} \mu(B) \sum_{\substack{H \in \mathcal{M}_{\mathtt{d}(cM_1 - N_1) + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}} \\ cM_1 \equiv N_1 \ (\mathrm{mod}\, ABH)}} 1.$$

Напомињемо да из $ABH \mid cM_1 - N_1$ и $(M_1, N_1) = 1$ следи $(ABH, M_1N_1) = 1$.

Када претходно вратимо у (9.1) добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) =& q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{G \in \mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}} \\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \\ &\times \sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)} \\ B \mid G}} \mu(B)\, \mathfrak{G}(G, D, A, B; k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}(G, D, A, B; k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\ &= \sum_{c \in \mathbb{F}_q^{\times}} w(c) \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M} \\ 1 \leqslant \mathtt{d}(M_1) = \mathtt{d}(N_1) \leqslant k - \mathtt{d}(G) \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1N_1, DAB) = 1}} \frac{\sigma(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\, \sigma(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(N_1)) \\ &\quad\times \sum_{\substack{H \in \mathcal{M}_{\mathtt{d}(cM_1 - N_1) + \mathtt{d}(D) - \mathbf{d}} \\ (H, M_1N_1) = 1 \\ cM_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}}} 1 \\ &= \sum_{c \in \mathbb{F}_q^{\times}} w(c) \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G)}} \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M_1) = \mathtt{d}(N_1) \leqslant k - \mathtt{d}(G) \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1N_1, DABH) = 1 \\ \mathtt{d}(cM_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) \\ cM_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}}} \frac{\sigma(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\, \sigma(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(N_1)),\end{aligned}$$

при чему смо изоставили услов $\mathtt{d}(M_1) = \mathtt{d}(N_1) \geqslant 1$, јер је он већ садржан у $\mathtt{d}(cM_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) \geqslant \mathbf{d} - \mathbf{z} > 0$.

На овом месту ћемо суму $\mathfrak{G}$ раздвојити на $\mathfrak{G}_{c\neq 1} + \mathfrak{G}_{c=1}$ у зависности од константе c која се појављује у спољашњој суми. Ова два случаја захтевају употребу различитих алата јер су полиноми M_1 и N_1 истог степена, па од тога да ли је $c = 1$ зависи да ли ће доћи до скраћивања водећих чланова. Како ће аргументи у сумама $\mathfrak{G}$ и $\mathcal{G}$ и свим њиховим подсумама бити фиксирани најчешће ћемо их изостављати из нотације.

9.2 Сума $\mathfrak{G}_{c\neq 1}$

Случај $c \neq 1$ је једноставнији. Како су полиноми M_1 и N_1 монични и истог степена јасно је да у $cM_1 - N_1$ неће доћи до скраћивања водећег члана, па је

$\mathtt{d}\,(cM_1 - N_1) = \mathtt{d}\,(M_1) = \mathtt{d}\,(N_1)$. Услов $cM_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}$ ћемо детектовати Дирихлеовим карактерима ψ по модулу ABH. Из (4.3) следи да је

$$\frac{1}{\varphi(ABH)} \sum_{\psi \,(\mathrm{mod}\, ABH)} \psi(cM_1)\overline{\psi}(N_1) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } cM_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Када ову релацију ортогоналности убацимо у $\mathfrak{G}_{c\neq 1}$ (тј. усредњимо по M_1 и N_1) највећи допринос ће долазити од тривијалног карактера ψ_0 по модулу ABH. Зато ћемо поделити сумацију на

$$\mathfrak{G}_{c\neq 1} = \mathfrak{MG}_{c\neq 1} + \mathfrak{EG}_{c\neq 1},$$

где главни члан $\mathfrak{MG}_{c\neq 1}$ одговара доприносу тривијалног карактера ψ_0, а допринос свих осталих карактера иде у грешку $\mathfrak{EG}_{c\neq 1}$. Другим речима,

$$\mathfrak{MG}_{c\neq 1} = -\frac{q-2}{q-1} \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G)}} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H))}{\varphi(ABH)}$$
$$\times \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1}} \frac{\sigma\,(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\,\sigma\,(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}}$$

и

$$\mathfrak{EG}_{c\neq 1} = -\frac{1}{q-1} \sum_{\substack{c \in \mathbb{F}_q^\times \\ c \neq 1}} \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G)}} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H))}{\varphi(ABH)}$$
$$\times \sum_{\substack{\psi \,(\mathrm{mod}\, ABH) \\ \psi \neq \psi_0}} \psi(c) \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1}} \frac{\psi\,(M_1)\,\overline{\psi}\,(N_1)\,\sigma\,(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\,\sigma\,(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}}.$$

9.3 Сума $\mathfrak{G}_{c=1}$

У овом случају је $\mathtt{d}\,(cM_1 - N_1) = \mathtt{d}\,(M_1 - N_1) < \mathtt{d}\,(M_1) = \mathtt{d}\,(N_1)$ јер су M_1 и N_1 монични полиноми истог степена. Следи,

$$\mathfrak{G}_{c=1} = \frac{q-2}{q-1} \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - 1}} \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M_1) = \mathtt{d}(N_1) \leqslant k - \mathtt{d}(G) \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1 \\ \mathtt{d}(M_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) \\ M_1 \equiv N_1 \,(\mathrm{mod}\, ABH)}} \frac{\sigma\,(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\,\sigma\,(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\,(k - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}\,(N_1))$$

Нека је

$$l = \mathtt{d}(N_1) - \mathtt{d}(M_1 - N_1) - 1 = \mathtt{d}(N_1) + \mathtt{d}(D) - \mathbf{d} - \mathtt{d}(H) - 1.$$

Полиноми M_1 и N_1 имају тачно l истих коефицијената иза водећег. Унутрашњу суму по M_1 и N_1 ћемо разложити на дисјунктне подсуме, тако да је у свакој подсуми број l фиксиран:

$$\mathfrak{G}_{c=1} = \frac{q-2}{q-1} \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - 1}} \sum_{l=0}^{k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - 1} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - l - 1)$$
$$\times \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1 \\ \mathtt{d}(M_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) \\ M_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}}} \frac{\sigma(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\, \sigma(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}}.$$

За фиксирано $M_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1}$ услови $N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1}$ и $\mathtt{d}(M_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)$ заправо кажу да се други полином N_1 налази на рубу кратког интервала око полинома M_1. Са друге стране, N_1 се налази и у аритметичком низу $\equiv M_1 \pmod{ABH}$. Сетимо се да се пресек кратког интервала и аритметичког низа може прецизно детектовати Хајесовим карактерима (видети Поглавље 4.2). Једино је проблем што овде немамо цео кратак интервал, већ само његов руб.

Из тог разлога ћемо руб кратког интервала $\mathtt{d}(M_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)$ видети као скуповну разлику кратких интервала $\mathtt{d}(M_1 - N_1) \leqslant \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)$ и $\mathtt{d}(M_1 - N_1) \leqslant \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) - 1$, тј. поделићемо сумацију на

$$\mathfrak{G}_{c=1} = \mathfrak{G}^0_{c=1} - \mathfrak{G}^1_{c=1},$$

где је $\mathfrak{G}^\nu_{c=1}$ иста сума као $\mathfrak{G}_{c=1}$ али је услов $\mathtt{d}(M_1 - N_1) = \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D)$ замењен условом $\mathtt{d}(M_1 - N_1) \leqslant \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) - \nu$, за $\nu \in \{0, 1\}$. Другим речима,

$$\mathfrak{G}^\nu_{c=1} = \frac{q-2}{q-1} \sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - 1}} \sum_{l=0}^{k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - 1} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - l - 1)$$
$$\times \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1 \\ M_1 \equiv N_1 \left(\operatorname{mod} R_{l+\nu, ABH}\right)}} \frac{\sigma(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\, \sigma(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}}, \tag{9.4}$$

при чему смо спојили услов конгруентности $M_1 \equiv N_1 \pmod{ABH}$ и услов $\mathtt{d}\,(M_1 - N_1) \leqslant \mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) - \nu$ који описује кратак интервал у један услов $M_1 \equiv N_1 \pmod{R_{l+\nu,ABH}}$. Последње ћемо детектовати Хајесовим карактерима ψ по модулу $R_{l+\nu,ABH}$, релација ортогоналности (4.11) даје

$$\frac{1}{q^{l+\nu}\varphi(ABH)} \sum_{\psi \left(\operatorname{mod} R_{l+\nu,ABH}\right)} \psi\,(M_1)\,\overline{\psi}\,(N_1) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } M_1 \equiv N_1 \pmod{R_{l+\nu,ABH}}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Применићемо ову ортогоналност у (9.4) и поделити сумацију по ψ на два дела у зависности од тога да ли је $\psi = \psi_0$ или $\psi \neq \psi_0$, где је ψ_0 тривијалан Хајесов карактер по модулу $R_{l+\nu,ABH}$ (што је заправо тривијалан Дирихлеов карактер по модулу ABH). Зато за свако $\nu = 0, 1$ имамо

$$\mathfrak{G}^{\nu}_{c=1} = \mathfrak{M}\mathfrak{G}^{\nu}_{c=1} + \mathfrak{E}\mathfrak{G}^{\nu}_{c=1},$$

где је

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\mathfrak{G}^{\nu}_{c=1} = \frac{q-2}{q-1} &\sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - 1}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \\ &\times \sum_{l=0}^{k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - 1} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - l - 1)}{q^{l+\nu}} \\ &\times \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1}} \frac{\sigma\,(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\,\sigma\,(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\mathfrak{G}^{\nu}_{c=1} = \frac{q-2}{q-1} &\sum_{H \in \mathcal{M}_{\leqslant k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - 1}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \\ &\times \sum_{l=0}^{k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - 1} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k - \mathbf{d} + \mathtt{d}(D) - \mathtt{d}(G) - \mathtt{d}(H) - l - 1)}{q^{l+\nu}} \\ &\times \sum_{\substack{\psi \left(\operatorname{mod} R_{l+\nu,ABH}\right) \\ \psi \neq \psi_0}} \sum_{\substack{M_1, N_1 \in \mathcal{M}_{\mathbf{d} + \mathtt{d}(H) - \mathtt{d}(D) + l + 1} \\ (M_1, N_1) = 1 \\ (M_1 N_1, DABH) = 1}} \frac{\psi\,(M_1)\,\overline{\psi}\,(N_1)\,\sigma\,(GM_1; \boldsymbol{\alpha})\,\sigma\,(GN_1; -\boldsymbol{\beta})}{|M_1 N_1|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

9.4 Разлагање вандијагоналног доприноса $\mathcal{G}$

Са $\mathcal{MG}_{c\neq1}$, $\mathcal{MG}^0_{c=1}$, $\mathcal{MG}^1_{c=1}$, $\mathcal{EG}_{c\neq1}$, $\mathcal{EG}^0_{c=1}$ и $\mathcal{EG}^1_{c=1}$ ћемо означити допринос суми $\mathcal{G}$ који долази из подсума $\mathfrak{MG}_{c\neq1}$, $\mathfrak{MG}^0_{c=1}$, $\mathfrak{MG}^1_{c=1}$, $\mathfrak{EG}_{c\neq1}$, $\mathfrak{EG}^0_{c=1}$ и $\mathfrak{EG}^1_{c=1}$, редом. Затим, писаћемо

$$\mathcal{MG}_{c=1} = \mathcal{MG}^0_{c=1} - \mathcal{MG}^1_{c=1}, \qquad \mathcal{EG}_{c=1} = \mathcal{EG}^0_{c=1} - \mathcal{EG}^1_{c=1}$$

$$\mathcal{MG} = \mathcal{MG}_{c\neq1} + \mathcal{MG}_{c=1} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{EG} = \mathcal{EG}_{c\neq1} + \mathcal{EG}_{c=1},$$

тако да суму (9.1) можемо записати као $\mathcal{G} = \mathcal{MG} + \mathcal{EG}$.

Како се тривијални Хајесов карактер по модулу $R_{l+1,ABH}$ поклапа са тривијалним Хајесовим карактером по модулу $R_{l,ABH}$ (и оба се поклапају са тривијалним Дирихлеовим карактером по модулу ABH), није тешко видети да је $\mathcal{MG}^1_{c=1} = \dfrac{1}{q}\mathcal{MG}^0_{c=1}$, а тиме и $\mathcal{MG}_{c=1} = \left(1 - \dfrac{1}{q}\right)\mathcal{MG}^0_{c=1}$.

Глава 10

Ограничавање грешке $\mathcal{EG}$

10.1 Ограничавање грешке $\mathcal{EG}_{c\neq 1}$

Треба оценити грешку

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{EG}_{c\neq 1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&= -\frac{q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}}{q-1} \sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_q^\times\\ c\neq 1}} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}\\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \sum_{\substack{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}\\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)}\\ B\mid G}} \mu(B)\\
&\quad\times \sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)}} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)\right)}{\varphi(ABH)} \sum_{\substack{\psi \,(\mathrm{mod}\, ABH)\\ \psi\neq\psi_0}} \psi(c)\\
&\quad\times \sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}+\mathtt{d}(H)-\mathtt{d}(D)}\\ (M_1,N_1)=1\\ (M_1N_1,DABH)=1}} \frac{\psi\left(M_1\right)\overline{\psi}\left(N_1\right)\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}\\
&= -\frac{q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}}{q-1} \sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_q^\times\\ c\neq 1}} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}\\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \sum_{\substack{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}\\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)}\\ B\mid G}} \mu(B)\\
&\quad\times \sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \sum_{\substack{\psi \,(\mathrm{mod}\, ABH)\\ \psi\neq\psi_0}} \psi(c)\\
&\quad\times \oint\oint_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{H(u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \displaystyle\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\ (M_1,N_1)=1\\ (M_1N_1,DABH)=1}} \frac{\psi\left(M_1\right)\overline{\psi}\left(N_1\right)\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}} v_1^{\mathtt{d}(M_1)} v_2^{\mathtt{d}(N_1)}}{(1-u)u^{k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathbf{d}(H)+1}\left(v_1v_2\right)^{\mathbf{d}+\mathtt{d}(H)-\mathtt{d}(D)+1}}\, du\, dv_1 dv_2,
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

где смо опет користили Перонове формуле (4.17) и (4.18).

Сада ћемо се фокусирати на двоструки Дирихлеов ред по M_1 по N_1. Нека је $G = \prod_{P\in\mathcal{P}} P^{g_P}$ факторизација полинома G на просте чиниоце. Тада је

$$\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,DABH)=1}} \frac{\psi(M_1)\overline{\psi}(N_1)\sigma(GM_1;\boldsymbol{\alpha})\sigma(GN_1;-\boldsymbol{\beta})}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}} v_1^{\mathtt{d}(M_1)} v_2^{\mathtt{d}(N_1)}$$

$$= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid D}} F_P(g_P) = \mathcal{F}(v_1,v_2;G,D,\psi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \prod_{j=1}^{3} \mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right)\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}+\beta_j}v_2,\overline{\psi}\right), \tag{10.2}$$

где смо за $P\in\mathcal{P}$ и $g\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ увели ознаке

$$\begin{aligned} F_P(g) =& \sigma(P^g;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^g;-\boldsymbol{\beta}) + \sigma(P^g;-\boldsymbol{\beta})\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\psi(P^a)\sigma(P^{a+g};\boldsymbol{\alpha})}{|P|^{\frac{a}{2}}}v_1^{a\mathtt{d}(P)}\\ &+\sigma(P^g;\boldsymbol{\alpha})\sum_{b=1}^{\infty}\frac{\overline{\psi}(P^b)\sigma\left(P^{b+g};-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^{\frac{b}{2}}}v_2^{b\mathtt{d}(P)}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(v_1,v_2;G,D,\psi;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\ &= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\mid D}}\frac{1}{F_P(0)}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\mid G\\P\nmid D}}\frac{F_P(g_P)}{F_P(0)}\prod_{P\in\mathcal{P}}\left(F_P(0)\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{\psi(P)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}v_1^{\mathtt{d}(P)}\right)\left(1-\frac{\overline{\psi}(P)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}v_2^{\mathtt{d}(P)}\right)\right).\end{aligned} \tag{10.3}$$

Бесконачан Ојлеров производ у (10.3) апсолутно конвергира за $|v_1|,|v_2|<q^{-\varepsilon}$ будући да коефицијенти испред $v_1^{\mathtt{d}(P)}$ и $v_2^{\mathtt{d}(P)}$ постају нуле након множења и скраћивања. У поменутој области конвергенције оба коначна производа из (10.3) су ограничена са $q^{\mathtt{d}\varepsilon}$ (слично као у (8.6)), па исто важи и за саму функцију $\mathcal{F}$.

Како су карактери ψ нетривијални (10.2) представља аналитичко продужење суме по M_1 и N_1 и дозвољава нам да повећамо контуре интеграције $|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ до $|v_1|=|v_2|=q^{-\varepsilon}$. Помоћу Тврђења 2.5 можемо оценити Дирихлеове L-функције са

$$\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j}v_1,\psi\right),\mathcal{L}\left(q^{-\frac{1}{2}+\beta_j}v_2,\overline{\psi}\right)\ll q^{\mathtt{d}\varepsilon} \tag{10.4}$$

(на исти начин као што смо то урадили у (8.5)). Све заједно, троструки интеграл у (10.1) је ограничен са $q^{\mathbf{d}\varepsilon}$, те је

$$\begin{aligned}
\mathcal{EG}_{c\neq 1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \ll q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)} &\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}} \frac{1}{|D|} \sum_{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \frac{1}{|A|} \\
&\times \sum_{\substack{B\in\mathcal{M}\\ B|G}} \sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \sum_{\substack{\psi\,(\mathrm{mod}\,ABH)\\ \psi\neq\psi_0}} 1 \\
&\ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{\tau(G)}{|G|^2} \sum_{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}} \sum_{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}} \frac{1}{|A|} \\
&\ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)} \sum_{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}} 1 \ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

10.2 Ограничавање грешке $\mathcal{EG}_{c=1}$

Како је
$$\mathcal{EG}_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{EG}^0_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) - \mathcal{EG}^1_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$
довољно је појединачно оценити грешке

$$\begin{aligned}
&\mathcal{EG}^\nu_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\
&= \frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}\\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \sum_{\substack{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}\\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)}\\ B|G}} \mu(B) \\
&\times \sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-1}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \sum_{l=0}^{k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)-1} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)-l-1)}{q^{l+\nu}} \\
&\times \sum_{\substack{\psi\left(\mathrm{mod}\,R_{l+\nu,ABH}\right)\\ \psi\neq\psi_0}} \sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}+\mathtt{d}(H)-\mathtt{d}(D)+l+1}\\ (M_1,N_1)=1\\ (M_1N_1,DABH)=1}} \frac{\psi(M_1)\overline{\psi}(N_1)\sigma(GM_1;\boldsymbol{\alpha})\sigma(GN_1;-\boldsymbol{\beta})}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

за $\nu = 0,1$. Унутрашња двострука сума по M_1 и N_1 се може трансформисати и проценити са $O\left(q^{\mathbf{d}\varepsilon}\right)$ на исти начин као што је то урађено са аналогном сумом из $\mathcal{EG}_{c\neq 1}$ у Поглављу 10.1. Наиме, главни састојак у том процесу је процена (10.4) за Дирихлеове L-функције која је следила из Тврђења 2.5. За L-функције придружене Хајесовим карактерима имамо Тврђење 4.12 као замену за Тврђење 2.5. Тада, уз напомену да је $\displaystyle\sum_{l=0}^{k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)-1} \frac{1}{q^{l+\nu}} \ll 1$, слично као у (10.5) можемо ограничити $\mathcal{EG}^\nu_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ са $q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}$, што нас доводи до следећег тврђења.

Тврђење 10.6. *За* $k \in \left\{ \left[\dfrac{3\mathbf{d}+15}{2} \right], \left[\dfrac{3\mathbf{d}+14}{2} \right] \right\}$ *и све* $\mathbf{z} < \mathbf{d}$ *важи*

$$\mathcal{EG}(k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}.$$

Глава 11

Вандијагонални главни члан $\mathcal{MG}$

11.1 Помоћна лема

Увешћемо помоћну функцију F која је за $H, G, N \in \mathcal{M}$ и $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ задата са

$$F(H,G;N;r) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{M}_{\leqslant r} \\ (A,GN)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B \in \mathcal{M}_{\leqslant r-\mathtt{d}(A)} \\ B|G \\ (B,N)=1}} \frac{\mu(B)}{\varphi(ABH)} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{M}_{\leqslant r} \\ (L,N)=1}} \frac{\mu(L)|(L,G)|}{|L|\varphi(LH)},$$

при чему је последња једнакост добијена сменом $AB = L$. У Поглављу 11.4 ћемо користити следећу лему.

Лема 11.1. *Нека је* $|u| < 1$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $G, N \in \mathcal{M}$. *Тада за све* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{M} \\ (H,N)=1}} F(H,G;N;r)u^{\mathtt{d}(H)} = \frac{\mathcal{K}(u;G,N)}{1-u} + O\left(|GN|^{\varepsilon} q^{r(-1+\varepsilon)}\right), \tag{11.2}$$

где функција

$$\mathcal{K}(u;G,N) = \varphi\left(N, \frac{u}{q}\right) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid GN}} \left(1 + \frac{u^{\mathtt{d}(P)} - 1}{|P|(|P|-1)}\right) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|G \\ P \nmid N}} \left(1 - \frac{|P| - u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}\right),$$

апсолутно конвергира за $|u| < q$, *при чему смо користили ознаку*

$$\varphi(N,u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|N}} \left(1 - u^{\mathtt{d}(P)}\right).$$

Доказ. Нека је

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N) &= \sum_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,N)=1}}\sum_{\substack{L\in\mathcal{M}\\(L,N)=1}}\frac{\mu(L)|(L,G)|}{|L|\varphi(LH)}v^{\mathtt{d}(L)}u^{\mathtt{d}(H)}\\&=\sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\(K,N)=1}}\frac{u^{\mathtt{d}(K)}}{\varphi(K)}\sum_{\substack{L\in\mathcal{M}\\L|K}}\frac{\mu(L)|(L,G)|}{|L|}\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(L)},\end{aligned}$$

након смене $LH = K$. Приметимо да је суманд у унутрашњој суми мултипликативна функција од L, што нас даље доводи до

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N) &= \sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\(K,N)=1}}\frac{u^{\mathtt{d}(K)}}{\varphi(K)}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|K}}\left(1-\frac{|(P,G)|}{|P|}\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(P)}\right)\\&=\sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\(K,N)=1}}\frac{u^{\mathtt{d}(K)}}{\varphi(K)}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|K\\P\nmid G}}\left(1-\frac{1}{|P|}\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(P)}\right)\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|K\\P|G}}\left(1-\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(P)}\right).\end{aligned}$$

Слично, уколико суманд видимо као мултипликативну функцију од K добијамо

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N)\\&=\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid GN}}\left(1+\left(1-\frac{1}{|P|}\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(P)}\right)\sum_{a=1}^{\infty}\frac{u^{a\mathtt{d}(P)}}{\varphi\left(P^a\right)}\right)\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|G\\P\nmid N}}\left(1+\left(1-\left(\frac{v}{u}\right)^{\mathtt{d}(P)}\right)\sum_{a=1}^{\infty}\frac{u^{a\mathtt{d}(P)}}{\varphi\left(P^a\right)}\right)\\&=\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid GN}}\left(1+\frac{|P|u^{\mathtt{d}(P)}-v^{\mathtt{d}(P)}}{(|P|-1)\left(|P|-u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right)\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|G\\P\nmid N}}\left(1+\frac{|P|\left(u^{\mathtt{d}(P)}-v^{\mathtt{d}(P)}\right)}{(|P|-1)\left(|P|-u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right).\end{aligned}$$

Одавде је јасно да функција $\widetilde{\mathcal{K}}$ апсолутно конвергира за $|u|<1$ и $|v|<q$. Зато ћемо леву страну (11.2) трансформисати Пероновом формулом (4.18) у

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,N)=1}}F(H,G;N;r)u^{\mathtt{d}(H)} &= \sum_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,N)=1}}\sum_{\substack{L\in\mathcal{M}_{\leqslant r}\\(L,N)=1}}\frac{\mu(L)|(L,G)|}{|L|\varphi(LH)}u^{\mathtt{d}(H)}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|v|=q^{-\varepsilon}}\frac{\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N)}{(1-v)v^{r+1}}dv, \qquad (11.3)\end{aligned}$$

Затим ћемо увећати контуру $|v| = q^{-\varepsilon}$ до $|v| = q^{1-\varepsilon}$. Тиме прелазимо преко простог пола у тачки $v = 1$, па је (11.3) једнако

$$-\operatorname*{Res}_{v=1} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N)}{(1-v)v^{r+1}} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|v|=q^{1-\varepsilon}} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N)}{(1-v)v^{r+1}} dv. \tag{11.4}$$

Из записа

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{K}}(u,v;G,N) \\
&= \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{|P|u^{\mathtt{d}(P)} - v^{\mathtt{d}(P)}}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|N}} \left(1 + \frac{|P|u^{\mathtt{d}(P)} - v^{\mathtt{d}(P)}}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right)^{-1} \\
&\quad\times \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|G\\P\nmid N}} \left(1 + \frac{|P|u^{\mathtt{d}(P)} - v^{\mathtt{d}(P)}}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right)^{-1} \left(1 + \frac{|P|\left(u^{\mathtt{d}(P)} - v^{\mathtt{d}(P)}\right)}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right)
\end{aligned}$$

видимо да бесконачан Ојлеров производ апсолутно конвергира у некој околини кружнице $|v| = q^{1-\varepsilon}$, док су преостали коначни Ојлерови производи тривијално ограничени са $2^{\omega(N)} \ll |N|^{\varepsilon}$ и $2^{\omega}(G) \ll |G|^{\varepsilon}$, редом. Зато је (11.4) једнако

$$\widetilde{\mathcal{K}}(u,1;G,N) + O\left(|GN|^{\varepsilon} q^{r(-1+\varepsilon)}\right),$$

где функција

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{K}}(u,1;G,N) \\
&= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid GN}} \left(1 + \frac{|P|u^{\mathtt{d}(P)} - 1}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|G\\P\nmid N}} \left(1 + \frac{|P|\left(u^{\mathtt{d}(P)} - 1\right)}{(|P|-1)\left(|P| - u^{\mathtt{d}(P)}\right)}\right)
\end{aligned}$$

апсолутно конвергира за $|u| < 1$. Коначно, запис

$$\widetilde{\mathcal{K}}(u,1;G,N) = \mathcal{Z}\left(\frac{u}{q}\right) \mathcal{K}(u;G,N) = \frac{\mathcal{K}(u;G,N)}{1-u}$$

даје мероморфно продужење функције $\widetilde{\mathcal{K}}$ јер

$$\mathcal{K}(u;G,N) = \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid GN}} \left(1 + \frac{u^{\mathtt{d}(P)} - 1}{|P|(|P|-1)}\right) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|G\\P\nmid N}} \left(1 - \frac{|P| - u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}\right) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|N}} \left(1 - \frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}\right)$$

апсолутно конвергира за $|u| < q$. $\square$

11.2 Трансформисање главног члана $\mathcal{MG}_{c\neq 1}$

Прво ћемо $\mathcal{MG}_{c\neq 1}$ изразити у терминима функције $F(H,G;N;r)$ из претходног поглавља:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}_{c\neq 1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&=-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{z}}\\(D,G)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|}\sum_{\substack{A\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)}\\(A,G)=1}}\frac{\mu(A)}{|A|}\\
&\quad\times\sum_{\substack{B\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)}\\B|G}}\mu(B)\sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)}}\frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H))}{\varphi(ABH)}\\
&\quad\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}+\mathtt{d}(H)-\mathtt{d}(D)}\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,DABH)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}\\
&=-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{z}}\\(D,G)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|}\\
&\quad\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\\mathtt{d}(M_1)=\mathtt{d}(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G)\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,D)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right)\\
&\quad\times\sum_{\substack{H\in\mathcal{M}_{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}}\\(H,M_1N_1)=1}}F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right).
\end{aligned}$$

Унутрашња сума је непразна само у случају да је $\mathtt{d}\left(N_1\right)\geqslant\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)$. Ред $\sum_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,M_1N_1)=1}}F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)u^{\mathtt{d}(H)}$ апсолутно конвергира на диску $|u|<1$ (видети доказ Леме 11.1), па Перонова формула (4.17) даје

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}_{c\neq 1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&=-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{z}}\\(D,G)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|}\\
&\quad\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\leqslant\mathtt{d}(M_1)=\mathtt{d}(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G)\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,D)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{\sum\limits_{\substack{H\in\mathcal{M} \\ (H,M_1N_1)=1}} F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right) u^{\mathtt{d}(H)}}{u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}+1}} du.$$

Штавише, услов $\mathtt{d}\left(M_1\right) = \mathtt{d}\left(N_1\right) \geqslant \mathbf{d} - \mathtt{d}(D)$ у двострукој суми по M_1 и N_1 можемо изоставити јер је за $\mathtt{d}\left(M_1\right) = \mathtt{d}\left(N_1\right) \leqslant \mathbf{d} - \mathtt{d}(D) - 1$ контурни интеграл једнак нули.

11.3 Трансформисање главног члана $\mathcal{MG}_{c=1}$

Опет ћемо најпре главни члан

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\
&= \left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}} \\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \sum_{\substack{A\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)} \\ (A,G)=1}} \frac{\mu(A)}{|A|} \sum_{\substack{B\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(A)} \\ B|G}} \mu(B) \\
&\quad \times \sum_{H\in\mathcal{M}_{\leqslant k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-1}} \frac{1}{\varphi(ABH)} \sum_{l=0}^{k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)-1} \frac{V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathbf{d}+\mathtt{d}(D)-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}(H)-l-1)}{q^l} \\
&\quad \times \sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}+\mathtt{d}(H)-\mathtt{d}(D)+l+1} \\ (M_1,N_1)=1 \\ (M_1N_1,DABH)=1}} \frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

изразити у терминима функције $F(H,G;N;r)$ из Поглавља 11.1. Да бисмо то могли да урадимо променићемо редослед последње три сумације. Прво ћемо сумирати по M_1 и N_1, чији ће домен бити $\mathtt{d}(M_1) = \mathtt{d}(N_1) \leqslant k - \mathtt{d}(G)$, а затим по $H \in \mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}-1}$. Преостала сума по l се своди на само један члан $l = \mathtt{d}\left(N_1\right) + \mathtt{d}(D) - \mathbf{d} - \mathtt{d}(H) - 1$. Тада је

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}_{c=1}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\
&= \left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}} \\ (D,G)=1}} \frac{\mu(D)}{|D|} \\
&\quad \times \sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M} \\ \mathbf{d}-\mathtt{d}(D)+1\leqslant \mathtt{d}(M_1)=\mathtt{d}(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G) \\ (M_1,N_1)=1 \\ (M_1N_1,D)=1}} \frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right) \\
&\quad \times \sum_{\substack{H\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}-1} \\ (H,M_1N_1)=1}} \frac{F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)}{q^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}-\mathtt{d}(H)-1}}. \qquad (11.5)
\end{aligned}$$

Помоћу Пероновe формуле (4.18) сума по H из (11.5) се може записати у облику

$$\frac{1}{q^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}-1}}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-1-\varepsilon}}\frac{\sum\limits_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,M_1N_1)=1}}F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)|H|u^{d(H)}}{(1-u)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}}}du$$

или, након смене промењивих $u\mapsto\dfrac{u}{q}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-\varepsilon}}\frac{\sum\limits_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,M_1N_1)=1}}F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)u^{d(H)}}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}}}du.$$

На крају, опет ћемо изоставити услов $\mathtt{d}\left(M_1\right)=\mathtt{d}\left(N_1\right)\geqslant\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)+1$ из суме по M_1 и N_1 у (11.5) уз исто образложење као у претходном поглављу.

11.4 Спајање главних чланова: $\mathcal{MG}=\mathcal{MG}_{c=1}+\mathcal{MG}_{c\neq1}$

Сабирањем израза за $\mathcal{MG}_{c=1}$ и $\mathcal{MG}_{c\neq1}$ добијених у претходна два поглавља долазимо до

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&=\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{\leqslant\mathbf{z}}\\(D,G)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|}\\
&\quad\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\\mathtt{d}(M_1)=(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G)\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,D)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right)\\
&\quad\times\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-\varepsilon}}\frac{\sum\limits_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,M_1N_1)=1}}F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)u^{d(H)}}{u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}}}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1-\frac{1}{q}}{1-\frac{u}{q}}\right)du.
\end{aligned}$$

Према Леми 11.1 последњи ред претходне формуле износи

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{(1-u)\displaystyle\sum_{\substack{H\in\mathcal{M}\\(H,M_1N_1)=1}} F\left(H,G;M_1N_1;\mathbf{d}-\mathtt{d}(D)\right)u^{d(H)}}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}+1}}du\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-\varepsilon}} \frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}+1}}du+O\left(q^{\mathbf{d}(-1+\varepsilon)}|D|\right). \qquad (11.6)
\end{aligned}
$$

Укупан допринос грешке $O\left(q^{\mathbf{d}(-1+\varepsilon)}|D|\right)$ у $\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ је

$$
\begin{aligned}
&\ll q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}}\frac{1}{|D|}\sum_{n=0}^{k-\mathtt{d}(G)}\frac{(\#\mathcal{M}_n)^2}{q^n}q^{\mathbf{d}(-1+\varepsilon)}|D|\\
&\ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|^2}\sum_{D\in\mathcal{M}_{\leqslant \mathbf{z}}}1\ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}.
\end{aligned}
$$

Наравно, могли смо Лему 11.1 применити и на $\mathcal{MG}_{c=1}$ и $\mathcal{MG}_{c\neq 1}$ појединачно, али ће се испоставити да је примена на њихов збир $\mathcal{MG}$ ефективнија. Наиме, као и више пута до сада, главни члан у $\mathcal{MG}$ ће доћи из резидуума, тј. полова интеграда. У (11.6) имамо пол само у тачки $u=q$, док бисмо у аналогној формули за $\mathcal{MG}_{c=1}$ ($\mathcal{MG}_{c\neq 1}$) имали полове у тачкама $u=1$ и $u=q$ (пол у тачки $u=1$). Спајање $\mathcal{MG}=\mathcal{MG}_{c=1}+\mathcal{MG}_{c\neq 1}$ је довело до тога да се полови у $u=1$ пократе и да избегнемо непотребан рачун. Асимптотски гледано, полови у $u=1$ би требало да буду већи од пола у $u=q$, тако да овде имамо покраћење највећих доприноса, те до изразажаја долази други допринос по величини.

Следећи циљ је да проширимо домен сумације по D на све моничне полиноме који су узајамно прости са G, јер ту комплетирану суму знамо да израчунамо, а испоставиће се да је грешка која ће се појавити допустива. Да бисмо то видели, померимо контуру (само за потребе ове оцене) $|u|=q^{-\varepsilon}$ до $|u|=q^{1-\varepsilon}$ у интегралу у (11.6) и приметимо да је

$$
-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{1-\varepsilon}} \frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}+1}}du \ll 2^{\omega(GM_1N_1)}\left(\frac{q^{\mathbf{d}}}{|N_1D|}\right)^{1-\varepsilon}\ll\frac{q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}}{|N_1D|}.
$$

Зато ће укупан допринос свих додатих чланова $\mathtt{d}(D)\geqslant\mathbf{z}$ у $\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ бити

$$
\ll q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(D)>\mathbf{z}}}\frac{1}{|D|}\sum_{n=0}^{k-\mathtt{d}(G)}\frac{(\#\mathcal{M}_n)^2}{q^n}\frac{q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}}{q^n|D|}\ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(D)>\mathbf{z}}}\frac{1}{|D|^2}
$$

$$\ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)}\sum_{n=\mathbf{z}}^{\infty}\frac{1}{q^n}\ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q^n}\ll q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}.$$

Након овог комплетирања померићемо контуру до $|u|=q^{\varepsilon}$, и добити

$$\begin{aligned}
\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = &-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\(D,G)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|}\\
&\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M_1)=(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G)\\(M_1,N_1)=1\\(M_1N_1,D)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right)\\
&\times\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)+\mathtt{d}(D)-\mathbf{d}+1}}du\\
&+O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}+q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}\right)\\
=&-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{G\in\mathcal{M}_{\leqslant k}}\frac{1}{|G|}\\
&\times\sum_{\substack{M_1,N_1\in\mathcal{M}\\ \mathtt{d}(M_1)=(N_1)\leqslant k-\mathtt{d}(G)\\(M_1,N_1)=1}}\frac{\sigma\left(GM_1;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(GN_1;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|M_1N_1|^{\frac{1}{2}}}V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(k-\mathtt{d}(G)-\mathtt{d}\left(N_1\right)\right)\\
&\times\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)-\mathbf{d}+1}}\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\(D,GM_1N_1)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|u^{\mathtt{d}(D)}}du\\
&+O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}+q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}\right),
\end{aligned}\tag{11.7}$$

при чему је замена места сумације по D и интеграције оправдана јер ред $\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\(D,GM_1N_1)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|u^{\mathtt{d}(D)}}$ апсолутно конвергира (што објашњава потребу за последњим померањем контуре). За $|u|>1$ важи

$$\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}\\(D,GM_1N_1)=1}}\frac{\mu(D)}{|D|u^{\mathtt{d}(D)}}=\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid GM_1N_1}}\left(1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}\right)=\frac{1}{\mathcal{Z}\left(\frac{1}{qu}\right)\varphi\left(GM_1N_1,\frac{1}{qu}\right)}.$$

Следи, претпоследњи ред у (11.7) је једнак

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\frac{(1-u)\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\varphi\left(GM_1N_1,\frac{1}{qu}\right)u^{\mathtt{d}(N_1)-\mathbf{d}+2}}du.$$

Сада ћемо вратити старе промењиве $M = GM_1$ и $N = GN_1$, и уз напомену да је $\varphi\left(GM_1N_1, \frac{1}{qu}\right) = \varphi\left(MN, \frac{1}{qu}\right)$ писати

$$
\begin{aligned}
\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} & \sum_{\substack{M,N\in\mathcal{M} \\ \mathtt{d}(M)=\mathtt{d}(N)\leqslant k}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-\mathtt{d}(N)) \\
& \times \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \frac{(1-u)\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)u^{\mathtt{d}(N)-\mathbf{d}-\mathtt{d}(G)+2}} du \\
& + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}} + q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}\right).
\end{aligned} \tag{11.8}
$$

Глава 12

Оцена четвороструког интеграла у $\mathcal{MG}$

12.1 Примена Перонових формула

Суму по M и N из (11.8) можемо Пероновим формулама (4.17) и (4.18) трансформисати у

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k} \sum_{M,N\in\mathcal{M}_n} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} V_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(k-n) \\
&\times \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \frac{(1-u)\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)u^{n-\mathbf{d}-\mathrm{d}(G)+2}} du \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2\pi i)^4} \oint\oint\limits_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}} \frac{\sum\limits_{M,N\in\mathcal{M}} \frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}} v_1^{d(M)} v_2^{d(N)}}{\left(v_1v_2\right)^{n+1}} dv_1 dv_2 \\
&\quad\times \oint\limits_{|w|=q^{-\varepsilon}} \frac{H(w;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(1-w)w^{k-n+1}} dw \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \frac{(1-u)\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)u^{n-\mathbf{d}-\mathrm{d}(G)+2}} du. \qquad (12.1)
\end{aligned}
$$

Приметимо да је

$$
\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{u^{n+2}\left(v_1v_2\right)^{n+1} w^{k-n+1}} = \frac{\frac{1}{u^{k+2}(v_1v_2)^{k+1}} - \frac{1}{uw^{k+1}}}{w-uv_1v_2},
$$

као и да је допринос у интегралу по v_1 у (12.1) који одговара другом сабирку $-\dfrac{1}{(w-uv_1v_2)\,uw^{k+1}}$ једнак нули, јер интегранд нема сингуларитете на диску

$|v_1| < q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Тиме (12.1) постаје

$$\frac{1}{(2\pi i)^4}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\oint\oint\limits_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}}\sum_{M,N\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}v_1^{d(M)}v_2^{d(N)}\frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)}u^{\mathtt{d}(G)}$$
$$\times\frac{(1-u)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)u^{k-\mathbf{d}+2}\left(v_1v_2\right)^{k+1}}\oint\limits_{|w|=q^{-\varepsilon}}\frac{H(w;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(1-w)\left(w-uv_1v_2\right)}dw\,dv_1dv_2\,du.$$

Сада интеграл по w можемо израчунати помоћу Кошијеве теореме о резидуумима. Унутар диска $|w| < q^{-\varepsilon}$ интегранд има само један прост пол у тачки $w = uv_1v_2$, па се претходно своди на

$$\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\oint\oint\limits_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}}\sum_{M,N\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}v_1^{d(M)}v_2^{d(N)}\frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)}u^{\mathtt{d}(G)}$$
$$\times\frac{(1-u)H\left(uv_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\left(1-uv_1v_2\right)u^{k-\mathbf{d}+2}\left(v_1v_2\right)^{k+1}}dv_1dv_2\,du.$$

12.2 Мероморфно продужење двоструког Дирихлеовог реда

Наш следећи циљ је да испитамо мултипликативну структуру двоструког Дирихлеовог реда

$$\mathcal{F}\left(v_1,v_2;u\right)=\sum_{M,N\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(M;\boldsymbol{\alpha})\sigma(N;-\boldsymbol{\beta})}{|MN|^{\frac{1}{2}}}v_1^{\mathtt{d}(M)}v_2^{\mathtt{d}(N)}\frac{\mathcal{K}\left(u;G,M_1N_1\right)}{\varphi\left(MN,\frac{1}{qu}\right)}u^{\mathtt{d}(G)}$$
$$=\prod_{P\in\mathcal{P}}\mathcal{F}_P\left(v_1,v_2;u\right).$$

Разматраћемо само случај $|u| > \dfrac{1}{q}$ како не бисмо имали проблема приликом дељења са $\varphi\left(MN,\dfrac{1}{qu}\right)$. Следећа лема даје мероморфно продужење овог реда.

Лема 12.2. *(1) Важи*

$$\mathcal{F}_P\left(v_1,v_2;u\right)$$
$$=1+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{|P|(|P|-1)}+\frac{1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}}\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ \max\{a,b\}\geqslant 1}}\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^b;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^{\frac{a+b}{2}}}v_1^{a\mathtt{d}(P)}v_2^{b\mathtt{d}(P)}u^{\min\{a,b\}\mathtt{d}(P)}$$

$$+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{(|P|-1)\left(1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}\right)}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^a;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^a}\left(uv_1v_2\right)^{a\mathtt{d}(P)}, \tag{12.3}$$

и ред $\mathcal{F}\left(v_1,v_2;u\right)$ айсолуйно конверīира у за $\frac{1}{q}<|u|<q$ и $|v_1|,|v_2|<q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

(2) Функција $\mathcal{F}$ задовољава једнакосӣ

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\left(v_1,v_2;u\right)\\&=\mathcal{Z}\left(\frac{u}{q^2}\right)\prod_{j=1}^{3}\frac{\mathcal{Z}\left(\frac{v_1}{q^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)}{\mathcal{Z}\left(\frac{uv_1}{q^{\frac{3}{2}+\alpha_j}}\right)}\prod_{l=1}^{3}\frac{\mathcal{Z}\left(\frac{v_2}{q^{\frac{1}{2}-\beta_l}}\right)}{\mathcal{Z}\left(\frac{uv_2}{q^{\frac{3}{2}-\beta_l}}\right)}\prod_{j,l=1}^{3}\mathcal{Z}\left(\frac{uv_1v_2}{q^{1+\alpha_j-\beta_l}}\right)\mathcal{G}\left(v_1,v_2;u\right),\end{aligned} \tag{12.4}$$

ӣри чему функција $\mathcal{G}\left(v_1,v_2;u\right)=\prod_{P\in\mathcal{P}}\mathcal{G}_P\left(v_1,v_2;u\right)$ айсолуйно конверīира у широј области: $\frac{1}{q}<|u|<q^2$, $|v_1|,|v_2|<q^{-\varepsilon}$, $\left|uv_1^2\right|,\left|uv_2^2\right|<q^{1-\varepsilon}$, $|uv_1v_2|<q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\left|u^2v_1v_2\right|<q^{2-\varepsilon}$, $\left|u^2v_1^2v_2\right|,\left|u^2v_1v_2^2\right|<q^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ и $\left|\frac{v_1}{u}\right|,\left|\frac{v_2}{u}\right|<q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, и ӣиме обезбеђује мероморфно ӣродужење од $\mathcal{F}\left(v_1,v_2;u\right)$ на ӣоменуйу област.

Доказ. (1) Помоћу израза за Ојлерове P-чиниоце функција $\mathcal{K}$ и φ из Леме 11.1 добијамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_P\left(v_1,v_2;u\right)\\&=1+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{|P|(|P|-1)}+\frac{1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}}\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\a\neq b}}\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^b;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^{\frac{a+b}{2}}}v_1^{a\mathtt{d}(P)}v_2^{b\mathtt{d}(P)}u^{\min\{a,b\}\mathtt{d}(P)}\\&\quad+\frac{1-\frac{|P|-u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^a;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^a}\left(uv_1v_2\right)^{a\mathtt{d}(P)}.\end{aligned} \tag{12.5}$$

Да бисмо добили (12.3), преписаћемо бројилац у трећем реду (12.5) као $1-\frac{|P|-u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}=1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{|P|-1}$ и допринос који одговара $1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}$ укључити у суму из другог реда (12.5) као допринос сабирка $a=b\geqslant 1$.

Остаје да показажемо апсолутно конвергенцију функције $\mathcal{F}$ у наведеној области. За свако фиксирано u из кружног прстена $\frac{1}{q}<|u|<q$ важи

$\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{|P|(|P|-1)} = \frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2} + O\left(\frac{1}{|P|^2}\right)$, $\frac{1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}} \ll 1$ и $\frac{1-\frac{|P|-u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}} \ll 1$. Затим, помоћу процена $\sigma(N;\boldsymbol{\alpha}), \sigma(N;\boldsymbol{\beta}) \ll |N|^{\frac{\varepsilon}{2}}$, за u, v_1 и v_2 из поменуте области важи

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^b;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^{\frac{a+b}{2}}} v_1^{a\mathtt{d}(P)} v_2^{b\mathtt{d}(P)} u^{\min\{a,b\}\mathtt{d}(P)} \\
&\ll \frac{|P|^{\frac{a\varepsilon}{2}}|P|^{\frac{b\varepsilon}{2}}}{|P|^{\frac{a+b}{2}}} |P|^{a\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} |P|^{b\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} |P|^{\min\{a,b\}} \ll \frac{1}{|P|^{\max\{a,b\}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

и слично

$$\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^a;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^a}\left(uv_1v_2\right)^{a\mathtt{d}(P)} \ll \frac{|P|^{\frac{2a\varepsilon}{2}}}{|P|^a}\left(q^{1+2\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right)^{a\mathtt{d}(P)} = \frac{1}{|P|^{a(1+\varepsilon)}}.$$

Када све спојимо долазимо до закључка да Ојлеров P-чинилац (12.5) износи

$$\begin{aligned}
&1+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2} + O\left(\frac{1}{|P|^2} + \sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ a\neq b}} \frac{1}{|P|^{\max\{a,b\}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} + \sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{|P|^{a(1+\varepsilon)}}\right) \\
&= 1+\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2} + O\left(\frac{1}{|P|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

што потврђује да функција $\mathcal{F}$ апсолутно конвергира у области наведеној у делу (1) ове леме.

(2) Овде је идеја да највећи допринос у (12.5) буде поништен помоћу Ојлерових P-чинилаца зета функција који се појављују на десној страни (12.4). Да будемо прецизнији, у области наведеној у (2) имамо развоје

$$\frac{u^{\mathtt{d}(P)}-1}{|P|(|P|-1)} = \frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2} + O\left(\frac{1}{|P|^2} + \frac{|u|^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^3}\right), \tag{12.6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}} \sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ a\neq b}} \frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^b;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^{\frac{a+b}{2}}} v_1^{a\mathtt{d}(P)} v_2^{b\mathtt{d}(P)} u^{\min\{a,b\}\mathtt{d}(P)} \\
&= \left(1-\frac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|} + O\left(\frac{1}{|P|^2}+\frac{1}{|P||u|^{\mathtt{d}(P)}}\right)\right) \\
&\quad\times\left(\frac{\sigma(P;\boldsymbol{\alpha})}{|P|^{\frac{1}{2}}}v_1^{\mathtt{d}(P)} + \frac{\sigma(P;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{\frac{1}{2}}}v_2^{\mathtt{d}(P)} + O\left(\frac{|v_1|^{2\mathtt{d}(P)}+|v_2|^{2\mathtt{d}(P)}}{|P|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} + \frac{|uv_1^2v_2|^{\mathtt{d}(P)}+|uv_1v_2^2|^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{12.7}$$

и

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\frac{|P|-u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|(|P|-1)}}{1-\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\sigma\left(P^a;\boldsymbol{\alpha}\right)\sigma\left(P^a;-\boldsymbol{\beta}\right)}{|P|^a}\left(uv_1v_2\right)^{a\mathtt{d}(P)}\\
&=\left(1+O\left(\frac{1}{|P|}+\frac{|u|^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2}+\frac{1}{|P|u^{\mathtt{d}(P)}}\right)\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\sigma(P;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P;-\boldsymbol{\beta})}{|P|}\left(uv_1v_2\right)^{\mathtt{d}(P)}+O\left(\frac{1}{|P|^{1+\varepsilon}}\right)\right).
\end{aligned}\tag{12.8}$$

Сабирци $\dfrac{u^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^2}$ из (12.6), $\dfrac{\sigma(P;\boldsymbol{\alpha})}{|P|^{\frac12}}v_1^{\mathtt{d}(P)}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{v_1^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^{\frac12+\alpha_j}}$, $\dfrac{\sigma(P;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{\frac12}}v_2^{\mathtt{d}(P)}$, $-\dfrac{\sigma(P;\boldsymbol{\alpha})}{|P|^{\frac32}}\left(uv_1\right)^{\mathtt{d}(P)}=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\left(uv_1\right)^{\mathtt{d}(P)}}{|P|^{\frac32+\alpha_j}}$ и $-\dfrac{\sigma(P;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{\frac32}}\left(uv_2\right)^{\mathtt{d}(P)}$ из (12.7) и $\dfrac{\sigma(P;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P;-\boldsymbol{\beta})}{|P|}\left(uv_1v_2\right)^{\mathtt{d}(P)}$ из (12.8) ће се пократити са одговарајућим сабирцима који долазе из Ојлерових P-чинилаца зета фунција приликом множења Ојлерових P-чинилаца у (12.4). Тако добијена функција $\mathcal{G}$ апсолутно конвергира у области која је наведена у (2).

$\square$

12.3 Померање контура

Према Поглављу 12.1 и Леми 12.2 главни члан у $\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ из (11.8) износи

$$\begin{aligned}
&\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\quad\oint\oint\limits_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac12-\varepsilon}}\frac{(1-u)H\left(uv_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{F}\left(v_1,v_2;u\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)\left(1-uv_1v_2\right)u^{k-\mathbf{d}+2}\left(v_1v_2\right)^{k+1}}dv_1dv_2\,du\\
&=\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\quad\oint\oint\limits_{|v_1|=|v_2|=q^{-\frac12-\varepsilon}}\frac{(1-u)H\left(uv_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{G}\left(v_1,v_2;u\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)^2\left(1-uv_1v_2\right)u^{k-\mathbf{d}+2}\left(v_1v_2\right)^{k+1}}\\
&\times\prod_{j=1}^{3}\frac{1-q^{-\frac12-\alpha_j}uv_1}{1-q^{\frac12-\alpha_j}v_1}\prod_{l=1}^{3}\frac{1-q^{-\frac12+\beta_l}uv_2}{1-q^{\frac12+\beta_l}v_2}\prod_{j,l=1}^{3}\frac{1}{1-q^{-\alpha_j+\beta_l}uv_1v_2}dv_1dv_2\,du.
\end{aligned}$$

Повећаћемо контуру $|v_1|=q^{-\frac12-\varepsilon}$ до $|v_1|=q^{-\varepsilon}$, и тиме обухватити три проста пола у тачкама $v_1=q^{-\frac12+\alpha_J}$, за $J=1,2,3$. Након овог померања контуре добијамо интеграл

$$\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}}\quad\oint\limits_{|v_2|=q^{-\frac12-\varepsilon}}\quad\oint\limits_{|v_1|=q^{-\varepsilon}}\ldots$$

$$\ll q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \oint\limits_{|v_2|=q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}} \oint\limits_{|v_1|=q^{-\varepsilon}} \frac{dv_1\, dv_2\, du}{|u|^{\frac{\mathbf{d}}{2}} \, |v_1 v_2|^{\frac{3\mathbf{d}}{2}}} \ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}.$$

Затим ћемо у сваком од три преостала двострука итеграла (добијених из резидуума у $v_1 = q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}$, за $J = 1,2,3$) контуру $|v_2| = q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ померити до $|v_2| = q^{-\varepsilon}$. Обухватићемо по три проста пола у тачкама $v_2 = q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}$, за $L = 1,2,3$, а интеграли по новим контурама за v_2 су

$$\begin{aligned} &-\frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \oint\limits_{|v_2|=q^{-\varepsilon}} \operatorname*{Res}_{v_1=q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}} \dots \\ &\ll q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \oint\limits_{|v_2|=q^{-\varepsilon}} \frac{dv_2\, du}{|u|^{\frac{\mathbf{d}}{2}} \left(q^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \, |v_2|\right)^{\frac{3\mathbf{d}}{2}}} \ll q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}. \end{aligned}$$

Све заједно даје

$$\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{J,L=1}^{3} \mathcal{MG}^{J,L}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}} + q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}} + q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right), \quad (12.9)$$

где је

$$\begin{aligned} &\mathcal{MG}^{J,L}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\ &= \frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \operatorname*{Res}_{\substack{v_1=q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J} \\ v_2=q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}}} \frac{(1-u) H\left(uv_1v_2;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) \mathcal{G}\left(v_1,v_2;u\right)}{\left(1-\frac{u}{q}\right)^2 \left(1-uv_1v_2\right) u^{k-\mathbf{d}+2} \left(v_1v_2\right)^{k+1}} \\ &\times \prod_{j=1}^{3} \frac{1-q^{-\frac{1}{2}-\alpha_j} uv_1}{1-q^{\frac{1}{2}-\alpha_j} v_1} \prod_{l=1}^{3} \frac{1-q^{-\frac{1}{2}+\beta_l} uv_2}{1-q^{\frac{1}{2}+\beta_l} v_2} \prod_{j,l=1}^{3} \frac{1}{1-q^{-\alpha_j+\beta_l} uv_1v_2} du \\ &= \frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+k+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+k(-\alpha_J+\beta_L)} \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=q^{\varepsilon}} \frac{(1-u) H\left(q^{-1+\alpha_J-\beta_L} u;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) \mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; u\right)}{\left(1-q^{-1+\alpha_J-\beta_L} u\right) u^{k-\mathbf{d}+2}} \\ &\times \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3 \\ j\neq J}} \frac{1-q^{-1+\alpha_J-\alpha_j} u}{1-q^{\alpha_J-\alpha_j}} \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 3 \\ l\neq L}} \frac{1-q^{-1-\beta_L+\beta_l} u}{1-q^{-\beta_L+\beta_l}} \prod_{j,l=1}^{3} \frac{1}{1-q^{-1+\alpha_J-\beta_L-\alpha_j+\beta_l} u} du. \end{aligned}$$

Фиксирајмо сада индексе J и L. Функција $u \mapsto \mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; u\right)$ апсолутно конвергира у кружном прстену $\frac{1}{q} < |u| < q^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ на основу Леме 12.2. То нам дозвољава да у интегралу у $\mathcal{MG}^{J,L}$ померимо контуру са

$|u| = q^{\varepsilon}$ на $|u| = q^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$. Тиме ћемо прећи преко једног простог пола у тачки $u = q^{1-\alpha_J+\beta_L}$, будући да су преостали потенцијални полови $u = q^{1-\alpha_J+\beta_L+\alpha_j-\beta_l}$ (за $1 \leqslant j, l \leqslant 3$) поништени нулама функције H. Интеграл по померeној контури $|u| = q^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ је ограничен са $q^{\mathbf{d}\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)}$, што нас доводи до тога да за свако $1 \leqslant J, L \leqslant 3$ важи

$$\begin{aligned}
&\mathcal{MG}^{J,L}(k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\
&= -\frac{q-2}{q-1} q^{\mathbf{d}+k+(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+k(-\alpha_J+\beta_L)} \\
&\quad \times \operatorname*{Res}_{u=q^{1-\alpha_J+\beta_L}} \frac{(1-u)H\left(q^{-1+\alpha_J-\beta_L}u; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\right)\mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; u\right)}{\left(1-q^{-1+\alpha_J-\beta_L}u\right)u^{k-\mathbf{d}+2}} \\
&\quad \times \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3\\ j\neq J}} \frac{1-q^{-1+\alpha_J-\alpha_j}u}{1-q^{\alpha_J-\alpha_j}} \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 3\\ l\neq L}} \frac{1-q^{-1-\beta_L+\beta_l}u}{1-q^{-\beta_L+\beta_l}} \prod_{j,l=1}^{3} \frac{1}{1-q^{-1+\alpha_J-\beta_L-\alpha_j+\beta_l}u} \\
&\quad + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right) \\
&= \frac{q-2}{q-1} q^{2\mathbf{d}-1+(\mathbf{d}-1)(\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-\alpha_J+\beta_L)}\left(1-q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)H(1; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\quad \times \mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right) \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3\\ j\neq J}} \frac{1-q^{\beta_L-\alpha_j}}{1-q^{\alpha_J-\alpha_j}} \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 3\\ l\neq L}} \frac{1-q^{-\alpha_J+\beta_l}}{1-q^{-\beta_L+\beta_l}} \prod_{j,l=1}^{3} \frac{1}{1-q^{-\alpha_j+\beta_l}} \\
&\quad + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right) \\
&= \frac{q-2}{q-1} q^{2\mathbf{d}+(\mathbf{d}-1)\delta\left(\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} H(1; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\quad \times \frac{\mathcal{Z}\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}{\mathcal{Z}\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)} \mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right) \\
&\quad + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right),
\end{aligned} \tag{12.10}$$

где $\pi^{J,L} \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3)$ представља класу еквиваленције транспозиције $(J, 3+L)$. Другим речима, $\pi^{J,L}$ замењује места α_J из $\boldsymbol{\alpha}$ и β_L из $\boldsymbol{\beta}$, при чему нам је редослед координата у $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ небитан.

Испоставиће се да је $\mathcal{MG}^{J,L}(k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ управо главни члан који тражимо и о ком смо причали на крају Главе 7. У Глави 14 ћемо показати следеће тврђење, помоћу кога можемо лако завршити доказ Теореме 3.5. Ово тврђење каже да $\mathcal{MG}^{J,L}(k; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ „личи" на дијагонални допринос $\mathcal{D}$, тј. да се добија тако што се у суми (по $Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}$) из Тврђења 7.7 примени пермутација $\pi^{J,L}$ на помераје $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Тврђење 12.11. *За* $k \in \left\{ \left[\dfrac{3\mathbf{d}+15}{2}\right], \left[\dfrac{3\mathbf{d}+14}{2}\right] \right\}$ *и* $1 \leqslant J, L \leqslant 3$ *важи*

$$\mathcal{MG}^{J,L}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q)\mathcal{Q}\left(Q;\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right). \tag{12.12}$$

Када ово заменимо у (12.9) долазимо до асимптотске формуле за вандијагонални допринос $\mathcal{MG}$.

Тврђење 12.13. *За* $k \in \left\{ \left[\dfrac{3\mathbf{d}+15}{2}\right], \left[\dfrac{3\mathbf{d}+14}{2}\right] \right\}$ *и* $\mathbf{z} < \mathbf{d}$ *важи*

$$\begin{aligned}\mathcal{MG}(k;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) =& H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q) \sum_{J,L=1}^{3} \mathcal{Q}\left(Q;\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) \\ &+ O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}} + q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}} + q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right).\end{aligned}$$

Глава 13

Завршетак доказа Теореме 3.5

Наш циљ је био да оценимо израз

$$\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \Delta\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right];\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) + \Delta\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right];\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right),$$

дефинисан у Глави 6. Затим смо сваки од израза Δ даље раздвојили на

$$\Delta = \mathcal{D} + \mathcal{S} + \mathcal{MG} + \mathcal{EG}.$$

У Тврђењима 7.7 и 12.13 смо издвојили главне чланове из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{MG}$. Нека је $\mathrm{Id} \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3\times\mathbb{S}_3)$ класа еквиваленције идентичке пермутације и нека је $\rho \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3\times\mathbb{S}_3)$ класа пермутације $(1\,4)(2\,5)(3\,6)$ (тј. таква да је $\rho(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$ и $\rho(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}$). Тада се укупан главни члан у $\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ може униформно записати у облику

$$H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^{\flat}(Q) \sum_{\pi\in\mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3\times\mathbb{S}_3)} \mathcal{Q}(Q;\pi(\boldsymbol{\alpha}),\pi(\boldsymbol{\beta})),$$

где

- сабирак који одговара $\pi = \mathrm{Id}$ долази из $\mathcal{D}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right];\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$,
- сабирак који одговара $\pi = \rho$ долази из $\mathcal{D}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right];\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right)$,
- девет сабирака који одговарају $\pi \in \left\{\pi^{J,L} \,\middle|\, 1 \leqslant J, L \leqslant 3\right\}$ долази из $\mathcal{MG}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+15}{2}\right];\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$,
- девет сабирака који одговарају $\pi \in \left\{\pi^{J,L}\circ\rho \,\middle|\, 1 \leqslant J, L \leqslant 3\right\}$ долази из $\mathcal{MG}\left(\left[\frac{3\mathbf{d}+14}{2}\right];\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right)$.

Комбинујући ограничења за $\mathcal{S}$ и $\mathcal{EG}$ из Тврђења 8.7 и 10.6, редом, са грешкама из Тврђења 7.7 и 12.13 за $\mathcal{D}$ и $\mathcal{MG}$, редом, можемо закључити да укупна грешка у $\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ износи $O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)+\mathbf{z}}+q^{\mathbf{d}(2+\varepsilon)-\mathbf{z}}+q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right)$. Оптималним избором параметра $\mathbf{z}=\left[\dfrac{\mathbf{d}}{4}\right]$ ова грешка постаје $O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right)$.

Претпоставимо најпре да су α_j-ови и β_l-ови међусобно раздвојени, тј. такви да је

$$|\alpha_j-\beta_l|\gg q^{-\mathbf{d}\varepsilon}. \tag{13.1}$$

Тада је $H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\gg q^{-\mathbf{d}\varepsilon}$, па дељењем $\mathcal{I}(\mathbf{d};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ са $H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ добијамо Теорему 3.5.

У општем случају, закључак следи из чињенице да је

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}}\ \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}\int_0^{\frac{2\pi}{\log q}}\Lambda(\chi;\boldsymbol{\alpha}+it,\boldsymbol{\beta}+it)\frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}-\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}}\varphi^\flat(Q)\widetilde{\mathcal{Q}}(Q;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{13.2}$$

цела функција по α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 и β_3 (видети дефиницију $\widetilde{\mathcal{Q}}$ у (3.6)). Да будемо прецизнији, фиксирајмо α_1, α_2 и α_3 и претпоставимо да β_2 и β_3 задовољавају услов (13.1). Тада је према претходном случају (13.2) ограничено са $O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right)$ за β_1 из домена Теореме 3.5, који је један већи диск, без три мања диска око α_1, α_2 и α_3. Али онда исто ограничење за (13.2) важи и за све β_1 из домена Теореме 3.5 по Принципу максимума модула [74, Теорема 10.24]. Понављањем истог аргумента можемо уклонити услов (13.1) и са преосталих промењљивих β_2 и β_3, чиме комплетирамо доказ Теореме 3.5.

Глава 14

Доказ Тврђења 12.11: Препознавање вандијагоналног главног члана $\mathcal{MG}$

У овој глави ћемо показати да је разлика између главног члана у (12.10) и главног члана на десној страни (12.12) допустиве величине $O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right)$, те улази у грешку.

Поменути главни члан на десној страни (12.12) се може записати и као

$$\frac{q-2}{q-1} q^{(\mathbf{d}-1)\delta\left(\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} H(1;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \mathcal{A}\mathcal{Z}\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) \\ \times \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \frac{\varphi^*(Q)}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}$$

(видети дефиницију функције $\mathcal{Q}$ у (7.6), као и дефиницију φ^* у (4.8) и напомену о истој функцији након Леме 4.9). Овим се наш проблем своди на проверу једнакости

$$q^{2\mathbf{d}} \frac{\mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J}, q^{-\frac{1}{2}-\beta_L}; q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)}{\mathcal{Z}\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)} \\ = \mathcal{A}\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \frac{\varphi^*(Q)}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right).$$

Доказ последње једнакости ћемо разложити на наредне две леме, уз напомену да је $\mathcal{A}\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) \ll 1$.

Лема 14.1. *За* $1 \leqslant J, L \leqslant 3$ *важи*

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \frac{\varphi^*(Q)}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}$$
$$= q^{2\mathbf{d}}\prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1+\frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{|P|^2-|P|-1}{|P|^3}\right)+O\left(q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}\right).$$

Лема 14.2. *За* $1 \leqslant J, L \leqslant 3$ *важи*

$$\frac{\mathcal{G}\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)}{\mathcal{Z}\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}$$
$$= \mathcal{A}\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)\prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1+\frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{|P|^2-|P|-1}{|P|^3}\right). \tag{14.3}$$

Доказ Леме 14.1. Из Перонове формуле (4.17) следи

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \frac{\varphi^*(Q)}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}$$
$$= q^{\mathbf{d}}\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \frac{1}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{\varphi^*(Q)}{|Q|}$$
$$= q^{\mathbf{d}}\oint_{|u|=q^{-1-\varepsilon}}\frac{\sum_{Q\in\mathcal{M}} \frac{1}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{\varphi^*(Q)}{|Q|}u^{\mathrm{d}(Q)}}{u^{\mathbf{d}+1}}du. \tag{14.4}$$

Помоћу (4.8) именилац можемо записати у облику Ојлеровог производа:

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}} \frac{1}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{\varphi^*(Q)}{|Q|}u^{\mathrm{d}(Q)}$$
$$= \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\left(\left(1-\frac{2}{|P|}\right)u^{\mathrm{d}(P)}+\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^2\frac{u^{2\mathrm{d}(P)}}{1-u^{\mathrm{d}(P)}}\right)\right)$$
$$= \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\frac{u^{\mathrm{d}(P)}\left(|P|^2-2|P|+u^{\mathrm{d}(P)}\right)}{|P|^2\left(1-u^{\mathrm{d}(P)}\right)}\right). \tag{14.5}$$

Последњи Ојлеров производ апсолутно конвергира за $|u| < \dfrac{1}{q}$ (што оправдава примену Перонове формуле) будући да је

$$\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sigma\left(P^a; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha})\right)\sigma\left(P^a; -\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}{|P|^a} = 1 + O\left(|P|^{-1+\varepsilon}\right).$$

Додатно, (14.5) има мероморфно продужење

$$\mathcal{Z}(u) \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} \frac{u^{\mathrm{d}(P)}\left(|P|^2 - 2|P| + u^{\mathrm{d}(P)}\right)}{|P|^2\left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)}\right),$$

при чему последњи Ојлеров производ апсолутно конвергира за $|u| < q^{-\varepsilon}$.

То даље значи да је (14.4) једнако

$$q^{\mathbf{d}} \oint\limits_{|u|=q^{-1-\varepsilon}} \frac{\prod\limits_{P\in\mathcal{P}} \left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} \frac{u^{\mathrm{d}(P)}\left(|P|^2 - 2|P| + u^{\mathrm{d}(P)}\right)}{|P|^2\left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)}\right)}{(1-qu)u^{\mathbf{d}+1}} du.$$

Сада ћемо увећати контуру интеграције до $|u| = q^{-\varepsilon}$ и тиме обухватити један прост пол у тачки $u = \dfrac{1}{q}$. Уз тривијалну оцену за интеграл по новој контури, претходно постаје

$$\begin{aligned}
&-q^{\mathbf{d}} \operatorname*{Res}_{u=\frac{1}{q}} \frac{\prod\limits_{P\in\mathcal{P}} \left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} \frac{u^{\mathrm{d}(P)}\left(|P|^2 - 2|P| + u^{\mathrm{d}(P)}\right)}{|P|^2\left(1 - u^{\mathrm{d}(P)}\right)}\right)}{(1-qu)u^{\mathbf{d}+1}} \\
&+ O\left(q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}\right) \\
&= q^{2\mathbf{d}} \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} \frac{|P|^2 - |P| - 1}{|P|^3}\right) + O\left(q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}\right),
\end{aligned}$$

као што је и наведено у леми. □

Доказ Леме 14.2. Обе стране једнакости (14.3) се могу представити преко Ојлерових производа, па је довољно показати да се њихови Ојлерови P-чиниоци поклапају. Прво, на основу (7.3) Ојлеров P-чинилац десне стране (14.3) је

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q}\right)\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)} \left(\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right) + \frac{|P|^2 - |P| - 1}{|P|^3}\right).$$

Са друге стране, помоћу израза (12.4) за функцију $\mathcal{G}$ можемо расписати Ојлеров P-чинилац леве стране (14.3) у облику

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_J+\beta_L}\right)}\prod_{j=1}^{3}\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\beta_L-\alpha_j}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\alpha_J-\alpha_j}\right)}\prod_{l=1}^{3}\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_J+\beta_l}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\beta_L+\beta_l}\right)}\\
&\times\prod_{j,l=1}^{3}\frac{1}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_j+\beta_l}\right)}\mathcal{F}_P\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)\\
&=\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_J+\beta_L}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q}\right)^2\mathcal{Z}_P\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3\\ j\neq J}}\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\beta_L-\alpha_j}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\alpha_J-\alpha_j}\right)}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 3\\ l\neq L}}\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_J+\beta_l}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\beta_L+\beta_l}\right)}\\
&\quad\times\prod_{j,l=1}^{3}\frac{1}{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1-\alpha_j+\beta_l}\right)}\mathcal{F}_P\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)\\
&=\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\alpha_J-\beta_L}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q}\right)^2\mathcal{Z}_P\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)}\mathcal{F}_P\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right).
\end{aligned}$$

Према томе, довољно је показати једнакост

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right)+\frac{|P|^2-|P|-1}{|P|^3}\\
&=\frac{\mathcal{Z}_P\left(q^{-1+\alpha_J-\beta_L}\right)}{\mathcal{Z}_P\left(\frac{1}{q}\right)\mathcal{Z}_P\left(q^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}\mathcal{F}_P\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right).
\end{aligned}\tag{14.6}$$

Слично, ако помоћу (12.3) распишемо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_P\left(q^{-\frac{1}{2}+\alpha_J},q^{-\frac{1}{2}-\beta_L};q^{1-\alpha_J+\beta_L}\right)\\
&=1+\frac{|P|^{1-\alpha_J+\beta_L}-1}{|P|(|P|-1)}+\frac{1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}}{1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}}\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ \max\{a,b\}\geqslant 1}}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{a(1-\alpha_J)+b(1+\beta_L)-\min\{a,b\}(1-\alpha_J+\beta_L)}}\\
&\quad+\frac{|P|^{1-\alpha_J+\beta_L}-1}{(|P|-1)\left(1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^a},
\end{aligned}$$

можемо разложити десну страну (14.6) на $\mathbf{I}+\mathbf{II}$, где је

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}=&\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}{1-|P|^{-1+\alpha_J-\beta_L}}\\
&\times\left(\frac{1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}}{1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}}\sum_{a,b=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{a(1-\alpha_J)+b(1+\beta_L)-\min\{a,b\}(1-\alpha_J+\beta_L)}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{|P|^{1-\alpha_J+\beta_L}-1}{(|P|-1)\left(1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^a}\Bigg)$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\right)}{1-|P|^{-1+\alpha_J-\beta_L}}\sum_{a,b=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{a(1-\alpha_J)+b(1+\beta_L)-\min\{a,b\}(1-\alpha_J+\beta_L)}}$$

$$+|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^a}$$

(овде смо укључили и члан који одговара $a=b=0$ у прву суму и члан који одговара $a=0$ у другу суму) и

$$\mathbf{II}=\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}{1-|P|^{-1+\alpha_J-\beta_L}}$$
$$\times\left(1+\frac{|P|^{1-\alpha_J+\beta_L}-1}{|P|(|P|-1)}-\frac{1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}}{1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}}-\frac{|P|^{1-\alpha_J+\beta_L}-1}{(|P|-1)\left(1-|P|^{-2+\alpha_J-\beta_L}\right)}\right)$$
$$=\frac{|P|^2-|P|-1}{|P|^3}.$$

Када ово вратимо у (14.6), преостаје да покажемо да је

$$\mathbf{I}=\mathcal{B}_P\left(\frac{1}{q};\pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}),\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta})\right).$$

Комплетиране суме из $\mathbf{I}$ можемо израчунати помоћу Парсевалове теореме [74, Формула 4.26(6)]. Применом ове теореме на функције $\theta\mapsto\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})e(a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}}$ и $\theta\mapsto\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\overline{\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})}e(a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}}$ добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^a}&=\int_0^1\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})e(a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}}\right)\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;-\boldsymbol{\beta})e(-a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}}\right)d\theta\\&=\int_0^1\prod_{j=1}^{3}\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{e(a\theta)}{|P|^{a\left(\frac{1}{2}+\alpha_j\right)}}\right)\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{e(-a\theta)}{|P|^{a\left(\frac{1}{2}-\beta_j\right)}}\right)d\theta\\&=\int_0^1\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}\right)^{-1}d\theta.\end{aligned}\tag{14.7}$$

Двоструку суму $\sum_{a,b=0}^{\infty}$ из $\mathbf{I}$ ћемо разложити на $-\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ a=b}}+\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ a\geqslant b}}+\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ b\geqslant a}}$. Прва од ове три суме је иста као (14.7), док су друга и трећа су симетричне, па је довољно разматрати само последњу суму. Поново, помоћу Парсевалове теореме добијамо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b\geqslant 0\\ b\geqslant a}} \frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{a(1-\alpha_J)+b(1+\beta_L)-\min\{a,b\}(1-\alpha_J+\beta_L)}}\\
&= \sum_{\substack{a,b,c\geqslant 0\\ b=a+c}} \frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})}{|P|^{\frac{a}{2}}}\frac{\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})}{|P|^{\frac{b}{2}}}\frac{1}{|P|^{c\left(\frac{1}{2}+\beta_L\right)}}\\
&= \int_0^1 \sum_{a=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^a;\boldsymbol{\alpha})e(a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\sigma(P^b;-\boldsymbol{\beta})e(-b\theta)}{|P|^{\frac{b}{2}}}\sum_{c=0}^{\infty}\frac{e(c\theta)}{|P|^{c\left(\frac{1}{2}+\beta_L\right)}}d\theta\\
&= \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}\right)^{-1}\right)\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)^{-1}d\theta.
\end{aligned}
$$

Коначно, када све спојимо биће

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} = &\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}\right)^{-1}\right)\\
&\times\left[\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\right)}{1-|P|^{-1+\alpha_J-\beta_L}}\left(-1+\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\alpha_J}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)^{-1}\right)+|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\right]d\theta\\
= &\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}\right)^{-1}\right)\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\alpha_J}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)^{-1}\\
&\times\left[\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1-|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\right)+|P|^{-\alpha_J+\beta_L}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\alpha_J}}\right)\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)\right]d\theta\\
= &\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{3}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_j}}\right)^{-1}\right)\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\alpha_J}}\right)^{-1}\\
&\times\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)^{-1}\left(1+|P|^{-1-\alpha_J+\beta_L}-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_J}}-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_L}}\right)d\theta\\
= &\int_0^1 \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3\\ j\neq J}}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\alpha_j}}\right)^{-1}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 3\\ l\neq L}}\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\beta_l}}\right)^{-1}\\
&\times\left(1-\frac{e(-\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}-\alpha_J}}\right)^{-1}\left(1-\frac{e(\theta)}{|P|^{\frac{1}{2}+\beta_L}}\right)^{-1}d\theta
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{a=0}^{\infty} \frac{\sigma(P^a; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}))e(a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}} \right) \left(\sum_{a=0}^{\infty} \frac{\sigma(P^a; -\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta}))e(-a\theta)}{|P|^{\frac{a}{2}}} \right) d\theta$$

$$= \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\sigma(P^a; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}))\sigma(P^a; -\pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta}))}{|P|^a} = \mathcal{B}_P \left(\frac{1}{q}; \pi^{J,L}(\boldsymbol{\alpha}), \pi^{J,L}(\boldsymbol{\beta}) \right),$$

опет по Парсеваловој теореми. □

Глава 15

Доказ Теореме 3.1: Асимптотика шестог момента без помераја

Као што смо већ напоменули, основна идеја је пустити лимес кад $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \to \mathbf{0} = (0,0,0)$ у

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha} + it, \boldsymbol{\beta} + it) \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \varphi^\flat(Q) \widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{15.1}$$

(Теорема 3.5), јер знамо да је

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi; \mathbf{0} + it, \mathbf{0} + it) &= \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)^3 \Lambda\left(\frac{1}{2} - it, \overline{\chi}\right)^3 \\ &= L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)^3 L\left(\frac{1}{2} - it, \overline{\chi}\right)^3 = \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^6.\end{aligned}$$

Међутим, ово нећемо моћи да урадимо директно зато што сваки члан суме $\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3)} \mathcal{Q}(Q; \pi(\boldsymbol{\alpha}), \pi(\boldsymbol{\beta}))$ има пол реда 9 у тачки $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Наравно, очекујемо да се ти полови пократе и да добијемо коначну вредност јер је лева страна (15.1) непрекидна по $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Зато ћемо суму $\widetilde{\mathcal{Q}}$ најпре трансформисати помоћу следеће леме.

Лема 15.2 ([22, Лема 2.5.1]). *Претпоставимо да је $F(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_k)$ функција $2k$ променљивих, која је симетрична у односу на првих k променљивих и такође симетрична у односу на последњих k променљивих. Претпоставимо додатно да је F регуларна у околини $(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$.*

Затим, претпоставимо да функција $f(s)$ има прост пол са резидуумом 1 у тачки $s = 0$, а да је иначе аналитичка у околини те тачке. Нека је

$$K(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_k) = F(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_k) \prod_{j,l=1}^{k} f(a_j - b_l).$$

Ако је $\alpha_j - \alpha_{k+l}$ садржано у области у којој је функција f аналитичка, за све $1 \leqslant j, l \leqslant k$, тада је

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{2k}/(\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_k)} K\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(k)}; \alpha_{\sigma(k+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(2k)}\right)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!^2} \frac{1}{(2\pi i)^{2k}} \oint \cdots \oint \frac{K(z_1, \ldots, z_k; z_{k+1}, \ldots, z_{2k}) W(z_1, \ldots, z_{2k})^2}{\prod\limits_{j,l=1}^{2k} (z_j - \alpha_l)} z_1 \ldots z_{2k},$$

при чему се интеграли по малим кружницама око α_j-ова, а W означава Вандермондову детерминанту.

Примена ове леме на функцију $K(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{Q}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, односно на њене чиниоце $F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\frac{q^{(\mathbf{d}-1)\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}}{(\log q)^9} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\right)$ и $f(s) = (-\log q)\mathcal{Z}\left(q^{-1-s}\right)$ даје

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{36} \frac{1}{(2\pi i)^6} \oint \cdots \oint \frac{\mathcal{Q}(Q; z_1, \ldots, z_6) W(z_1, \ldots, z_6)^2}{\prod\limits_{j=1}^{6} \prod\limits_{l=1}^{3} (z_j - \alpha_l)(z_j - \beta_l)} dz_1 \ldots dz_6, \tag{15.3}$$

при чему интегралимо по кружницама око α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 и β_3 полупречника $O\left(\frac{1}{\mathbf{d}}\right)$. Овде и надаље користимо краћу нотацију $\mathcal{Q}(Q; z_1, \ldots, z_6)$ за $\mathcal{Q}(Q; (z_1, z_2, z_3), (z_4, z_5, z_6))$ (и слично за остале функције где се појављују поменуте променљиве). Заменом $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ у последњој једнакости добијамо

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \mathbf{0}, \mathbf{0})$$
$$= -\frac{1}{36} \frac{1}{(2\pi i)^6} \oint \cdots \oint \frac{q^{\frac{\mathbf{d}-1}{2} \sum\limits_{j=1}^{3} (z_j - z_{3+j})} \frac{\mathcal{AZ}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; z_1, \ldots, z_6\right) W(z_1, \ldots, z_6)^2}{\prod\limits_{j=1}^{6} z_j^6} dz_1 \ldots dz_6$$
$$= -\frac{1}{36} \frac{1}{(2\pi i)^6} \oint \cdots \oint \frac{q^{\sum\limits_{j=1}^{3} (z_j - z_{3+j})} \frac{\mathcal{AZ}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \frac{2z_1}{\mathbf{d}-1}, \ldots, \frac{2z_6}{\mathbf{d}-1}\right) W(z_1, \ldots, z_6)^2}{\prod\limits_{j=1}^{6} z_j^6} dz_1 \ldots dz_6,$$

након смене променљивих $z_j \mapsto \dfrac{2}{\mathbf{d}-1} z_j$, при чему сада интегралимо по кружницама око нуле полупречника $O(1)$.

У околини тачака $z_1, \dots, z_6$ са поменутих контура функција $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}$ је аналитичка, па имамо следеће (Лоранове) развоје

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \frac{2z_1}{\mathbf{d}-1}, \dots, \frac{2z_6}{\mathbf{d}-1}\right) = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\mathbf{d}}\right)\right)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left(\frac{1}{q}; \frac{2z_1}{\mathbf{d}-1}, \dots, \frac{2z_6}{\mathbf{d}-1}\right) &= \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=4}^{6} \frac{1}{1 - q^{\frac{2\left(-z_j+z_l\right)}{\mathbf{d}-1}}} \\
&= \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=4}^{6} \frac{\mathbf{d}-1}{2\left(z_j - z_l\right)\log q}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mathbf{d}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\mathbf{d}}{2\log q}\right)^9 \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=4}^{6} \frac{1}{z_j - z_l}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mathbf{d}}\right)\right). \qquad (15.4)
\end{aligned}$$

Следи,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&\sim -\frac{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)}{36(2\log q)^9}\mathbf{d}^9 \frac{1}{(2\pi i)^6}\oint \cdots \oint \frac{q^{\sum_{j=1}^{3}(z_j - z_{3+j})} W\left(z_1, \dots, z_6\right)^2}{\prod_{j=1}^{6} z_j^6 \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=4}^{6}\left(z_j - z_l\right)} dz_1 \dots dz_6 \\
&= \frac{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q}; \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)}{36(2\log q)^9}\mathbf{d}^9 \frac{1}{(2\pi i)^6}\oint \cdots \oint \frac{q^{\sum_{j=1}^{3}(z_j - z_{3+j})} W\left(z_1, \dots, z_6\right) W\left(z_1, z_2, z_3\right) W\left(z_4, z_5, z_6\right)}{\prod_{j=1}^{6} z_j^6} dz_1 \dots dz_6,
\end{aligned}$$

где је константа

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{36(2\log q)^9}\frac{1}{(2\pi i)^6}\oint \cdots \oint \frac{q^{\sum_{j=1}^{3}(z_j - z_{3+j})} W\left(z_1, \dots, z_6\right) W\left(z_1, z_2, z_3\right) W\left(z_4, z_5, z_6\right)}{\prod_{j=1}^{6} z_j^6} dz_1 \dots dz_6 \\
&= \frac{1}{36 \cdot 2^9}\frac{1}{(2\pi i)^6}\oint \cdots \oint \frac{e^{\sum_{j=1}^{3}(z_j - z_{3+j})} W\left(z_1, \dots, z_6\right) W\left(z_1, z_2, z_3\right) W\left(z_4, z_5, z_6\right)}{\prod_{j=1}^{6} z_j^6} dz_1 \dots dz_6
\end{aligned}$$

експлицитно израчуната у [22, Формуле (2.7.4) и (2.7.11) – (2.7.17)] и износи

$$\prod_{l=0}^{2} \frac{l!}{(3+l)!} = \frac{2}{3!4!5!} = \frac{42}{9!}.$$

Коначно, заменом

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Q;\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{42}{9!}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_Q}\left(\frac{1}{q};\mathbf{0},\mathbf{0}\right)\mathbf{d}^9.$$

у (15.1) добијамо

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}^{\flat} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \frac{42\,a_{3,q}}{9!}\mathbf{d}^9 \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \frac{\varphi^\flat(Q)}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\mathbf{0},\mathbf{0}\right)}, \tag{15.5}$$

где је

$$\begin{aligned} a_{3,q} &= \mathcal{A}\left(\frac{1}{q};\mathbf{0},\mathbf{0}\right) = \prod_{P\in\mathcal{P}} \frac{\mathcal{B}_P}{\mathcal{Z}_P}\left(\frac{1}{q};\mathbf{0},\mathbf{0}\right) = \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^9 \sum_{a=0}^{\infty}\frac{\tau_3\left(P^a\right)^2}{|P|^a} \\ &= \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^9 \frac{1}{4}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{(a+1)^2(a+2)^2}{|P|^a} = \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^6\left(1+6\sum_{a=1}^{\infty}\frac{a}{|P|^a}\right) \\ &= \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^4\left(1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}\right), \end{aligned}$$

и слично,

$$\frac{1}{\mathcal{B}_Q\left(\frac{1}{q};\mathbf{0},\mathbf{0}\right)} = \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\mid Q}} \frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}},$$

чиме закључујемо доказ Теореме 3.1.

Напомињемо да смо овде показали и јаче тврђење. Према претходном, у (15.5) можемо заменити $\sim \mathbf{d}^9$ са $= \mathbf{d}^9 + O\left(\mathbf{d}^8\right)$. Теоретски, могли смо добити и цео полином по $\mathbf{d}$ у главном члану тако што довољно смањимо полупречнике кружница у (15.3) и у развоју (15.4) користимо више чланова. Међутим, преостали коефицијенти би имали знатно компликованије изразе.

Глава 16

Доказ Последице 3.3: Асимптотика суме по $Q \in \mathcal{M}_{\mathrm{d}}$ из (3.2)

У овој глави се бавимо изразом

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \varphi^{\flat}(Q) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|Q}} \frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}} = \frac{q-2}{q-1} q^{\mathrm{d}} \sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}}} \frac{\varphi^*(Q)}{|Q|} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|Q}} \frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}}, \tag{16.1}$$

који се појављује на десној страни (3.2). Ред и одговарајући Ојлеров производ

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{M}} \frac{\varphi^*(Q)}{|Q|} u^{\mathrm{d}(Q)} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|Q}} \frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}}\\
&= \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1+\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}} \left(\left(1-\frac{2}{|P|}\right) u^{\mathrm{d}(P)} + \left(1-\frac{1}{|P|}\right)^2 \sum_{a=2}^{\infty} u^{a\mathrm{d}(P)}\right)\right)\\
&= \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1+\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5 \left(1-\frac{2}{|P|}+\frac{u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^2}\right) u^{\mathrm{d}(P)}}{\left(1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}\right)\left(1-u^{\mathrm{d}(P)}\right)}\right)
\end{aligned}$$

апсолутно конвергирају на диску $|u| < \dfrac{1}{q}$, и имају мероморфно продужење $\mathcal{Z}(u)\mathcal{H}(u)$, при чему

$$\mathcal{H}(u) = \prod_{P\in\mathcal{P}} \left(1-u^{\mathrm{d}(P)} + \frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)^5 \left(1-\frac{2}{|P|}+\frac{u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^2}\right) u^{\mathrm{d}(P)}}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}}\right)$$

$$= \prod_{P\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{\left(11-\frac{19+u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|}+\frac{30+5u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^2}-\frac{25+10u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^3}+\frac{11+10u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^4}-\frac{2+5u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^5}+\frac{u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|^6}\right)\frac{u^{\mathrm{d}(P)}}{|P|}}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}}\right)$$

апсолутно конвергира на већем диску $|u| < 1$. Након примене Перонове формуле (4.17) израз (16.1) постаје

$$\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|=q^{-1-\varepsilon}}\frac{\mathcal{H}(u)}{(1-qu)u^{\mathbf{d}+1}}du. \tag{16.2}$$

Затим ћемо повећати контуру до $|u| = q^{-\varepsilon}$ и тиме обухватити један прост пол у тачки $u = \dfrac{1}{q}$. Интеграл по помереној контури је ограничен са $q^{\mathbf{d}\varepsilon}$, а тиме је и његов допринос у (16.2) ограничен са $q^{\mathbf{d}(1+\varepsilon)}$. Главни члан у (16.2) је једнак

$$-\frac{q-2}{q-1}q^{\mathbf{d}}\operatorname*{Res}_{u=\frac{1}{q}}\frac{\mathcal{H}(u)}{(1-qu)u^{\mathbf{d}+1}} = \frac{q-2}{q-1}q^{2\mathbf{d}}\mathcal{H}\left(\frac{1}{q}\right)$$

$$= \frac{q-2}{q-1}q^{2\mathbf{d}}\prod_{P\in\mathcal{P}}\frac{\left(1-\frac{1}{|P|}\right)\left(1+\frac{5}{|P|}-\frac{5}{|P|^2}+\frac{14}{|P|^3}-\frac{15}{|P|^4}+\frac{5}{|P|^5}+\frac{4}{|P|^6}-\frac{4}{|P|^7}+\frac{1}{|P|^8}\right)}{1+\frac{4}{|P|}+\frac{1}{|P|^2}},$$

чиме је доказ Последице 3.3 завршен.

Литература

[1] Иван Матвеевич Виноградов: *Новая оценка функции* $\zeta(1+it)$, Известия Академии наук СССР, Серия математическая, 22(2): 161–164, 1958.

[2] Сергей Михайлович Воронин: *Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана*, Известия Академии наук СССР, Серия математическая, 39(3): 475–486, 1975.

[3] Горан Ђанковић: *Теорија бројева*, Математички факултет, Београд, 2013.

[4] Вадим Валентинович Зудилин: *Одно из чисел* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *иррационально*, Успехи математических наук, 56(4): 149–150, 2001.

[5] Вадим Валентинович Зудилин: *Об иррациональности значений дзета-функции Римана*, Известия Российской академии наук, Серия математическая, 66(3): 49–102, 2002.

[6] Николай Михайлович Коробов: *О нулях функции* $\zeta(s)$, Доклады Академии наук СССР, 118(3): 431–432, 1958.

[7] Пафнутий Львович Чебышёв: *Изабранные труды*, Издавательство Академии наук СССР, Москва, 1955.

[8] Lars Ahlfors: *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, 3rd edition*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1979.

[9] Julio Cesar Andrade, Jonathan Peter Keating: *The mean value of* $L\left(\frac{1}{2},\chi\right)$ *in the hyperelliptic ensemble*, Journal of Number Theory, 132(12): 2793–2816, 2012.

[10] Julio Cesar Andrade, Michael Yiasemides: *The fourth power mean of Dirichlet L-functions in* $\mathbb{F}_q[T]$, Revista matemática Complutense, 34: 239–29, 2021.

[11] Julio Cesar Andrade, Michael Yiasemides: *The fourth moment of derivatives of Dirichlet L-functions in function fields*, Mathematische Zeitschrift, 299: 671–697, 2021.

[12] Roger Apéry: *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérique, 61: 11–13, 1979.

[13] Tom Mike Apostol: *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[14] Valentin Blomer, Étienne Fouvry, Emmanuel Kowalski, Philippe Michel, Djordje Milićević: *On moments of twisted L-functions*, American Journal of Mathematics, 139(3): 707–768, 2017.

[15] Oriol Bohigas, Hans Weidenmüller: *History – an overview*, in Gernot Akemann, Jinho Baik, Philippe Di Francesco, editors: *The Oxford handbook of Random matrix theory*, Oxford University Press, Oxford, 2011.

[16] Jean Bourgain: *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function*, Journal of the American Mathematical Society, 30(1): 205–224, 2017.

[17] Alina Bucur, Adrian Diaconu: *Moments of quadratic Dirichlet L-functions over rational function fields*, Moscow Mathematical Journal, 10(3): 485–517, 2010.

[18] Hung Bui, John Brian Conrey, Matthew Young: *More than* 41% *of the zeros of the zeta function are on the critical line*, Acta arithmetica, 150(1): 35–64, 2011.

[19] Hung Bui, David Roger Heath-Brown: *A note on the fourth moment of Dirichlet L-functions*, Acta arithmetica, 141: 335–344, 2010.

[20] Vorrapan Chandee, Xiannan Li: *The eighth moment of Dirichlet L-functions*, Advances in Mathematics, 259: 339–375, 2014.

[21] John Brian Conrey, David Farmer: *Mean values of L-functions and symmetry*, International Mathematics Research Notices, 17: 833–908, 2000.

[22] John Brian Conrey, David Farmer, Jonathan Peter Keating, Michael Rubinstein, Nina Claire Snaith: *Integral moments of L-functions*, Proceedings of the London Mathematical Society, s3-91: 33–104, 2005.

[23] John Brian Conrey, Amit Ghosh: *A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function*, International Mathematics Research Notices, 15: 775–780, 1998.

[24] John Brian Conrey, Steven Mark Gonek: *High moments of the Riemann zeta-function*, Duke Mathematical Journal, 107(3): 577–604, 2001.

[25] John Brian Conrey, Henryk Iwaniec, Kannan Soundararajan: *The sixth power moment of Dirichlet L-functions*, Geometric and Functional Analysis, 22: 1257–1288, 2012.

[26] Harold Davenport: *Multiplicative number theory, 2nd edition*, Graduate Texts in Mathematics, 74, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

[27] Charles Jean de la Vallée Poussin: *Recherches analytiques la théorie des nombres premiers*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 20(2): 183–256, 1896.

[28] Adrian Diaconu, Dorian Goldfeld, Jeffrey Hoffstein: *Multiple Dirichlet series and moments of zeta and L-functions*, Compositio mathematica, 139(3): 297–360, 2003.

[29] Goran Djanković, Dragan Đokić: *The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6): 2003–2017, 2021.

[30] Goran Djanković, Dragan Đokić: *The sixth power moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 514(1): 126296, 2022.

[31] Freeman Dyson: *Statistical theory of energy levels of complex systems. I, II, III*, Journal of Mathematical Physics, 3: 140–156, 157–165, 166–175, 1962.

[32] Dragan Đokić, Nikola Lelas, Ilija Vrećica: *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, 16(5): 1081–1109, 2020.

[33] Leonhard Euler: *Variae observationes circa series infinitas*, Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 9: 222–236, 1737.

[34] Alexandra Florea: *Improving the error term in the mean value of* $L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)$ *in the hyperelliptic ensemble*, International Mathematics Research Notices, 20: 6119–6148, 2017.

[35] Alexandra Florea: *The second and third moment of* $L(1/2, \chi)$ *in the hyperelliptic ensemble*, Forum mathematicum, 29(4): 873–892, 2017.

[36] Alexandra Florea: *The fourth moment of quadratic Dirichlet* L*-functions over function fields*, Geometric and Functional Analysis, 27(3): 541–595, 2017.

[37] Petet Forrester, Ole Warnaar: *The importance of the Selberg integral*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 45(4): 489–534, 2008.

[38] Johann Carl Friedrich Gauß: *Letter to Encke*, Werke, 2: 444–447, 1849.

[39] Steven Mark Gonek, Christopher Hughes, Jonathan Peter Keating: *A hybrid Euler-Hadamard product for the Riemann zeta function*, Duke Mathematical Journal, 136(3): 507–549, 2007.

[40] Ofir Gorodetsky: *Mean values of arithmetic functions in short intervals and in arithmetic progressions in the large-degree limit*, Mathematika, 66(2): 373–394, 2020.

[41] Ofir Gorodetsky, Brad Rodgers: *Traces of powers of matrices over finite fields*, Transactions of the American Mathematical Society, 374(7): 4579–4638, 2021.

[42] Ofir Gorodetsky, Will Sawin: *Correlation of arithmetic functions over* $\mathbb{F}_q[T]$, Mathematische Annalen, 376(3–4): 1059–1106, 2020.

[43] Jacques Salomon Hadamard: *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses consequences arithmétiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, 24: 199–220, 1896.

[44] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood: *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta mathematica, 41: 119–196, 1918.

[45] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood: *The approximate functional equation in the theory of the Zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2-21: 39–74, 1921.

[46] David Ryan Hayes: *The distribution of irreducibles in $GF[q;x]$*, Transactions of the American Mathematical Society, 117: 101–127, 1965.

[47] David Roger Heath-Brown: *The fourth power moment of the Riemann zeta function*, Proceedings of the London Mathematical Society, s3-28(3): 385–422, 1979.

[48] David Roger Heath-Brown: *The fourth power mean of Dirichlet's L-function*, Analysis, 1(1): 25–32, 1981.

[49] Ghaith Hiary, Andrzej Odłyżko: *The zeta function on the critical line: Numerical evidence for moments and random matrix theory models*, Mathematics of Computation, 81(279): 1723–1752, 2012.

[50] Martin Neil Huxley: *The large sieve inequality for algebraic number fields. II: Means of moments of Hecke zeta-functions*, Proceedings of the London Mathematical Society, s3-21(1): 108–128, 1970.

[51] Albert Edward Ingham: *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2-27: 273–300, 1926.

[52] Aleksandar Ivić: *Lectures on mean values of the Riemann zeta function*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1991.

[53] Aleksandar Ivić: *The Riemann zeta-function: Theory and applications*, Dover Publications, Mineola, New York, 2003.

[54] Henryk Iwaniec, Emmanuel Kowalski: *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[55] Henryk Iwaniec, Peter Sarnak: *Dirichlet L-functions at the central point*, Number Theory in Progress, 2, de Gruyter, Berlin, 1999.

[56] Matti Jutila: *On the mean value of $L\left(\frac{1}{2},\chi\right)$ for real characters*, Analysis, 1(2): 149–161, 1981.

[57] Nicholas Michael Katz, Peter Sarnak: *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bulletin of the American Mathematical Society, 36: 1–26, 1999.

[58] Nicholas Michael Katz, Peter Sarnak: *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 45, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.

[59] Jonathan Peter Keating, Nina Claire Snaith: *Random matrix theory and* $\zeta(1/2+it)$, Communications in Mathematical Physics, 214(1): 57–89, 2000.

[60] Jonathan Peter Keating, Nina Claire Snaith: *Random matrix theory and* L*-functions at* $s = 1/2$, Communications in Mathematical Physics, 214(1): 91–100, 2000.

[61] Ernst Lindelöf: *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 32: 341–356, 1908.

[62] Allysa Lumley: *Moments and distribution of values of* L*-functions over function fields inside the critical strip*, Acta arithmetica, 201: 329–369, 2021.

[63] Madan Lal Mehta: *Random matrices, 3rd edition*, Pure and Applied Mathematics, 142, Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2004.

[64] Hugh Lowell Montgomery: *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 24: 181–193, 1973.

[65] Hugh Lowell Montgomery: *Extreme values of the Riemann zeta function*, Commentarii mathematici Helvetici, 52: 511–518, 1977.

[66] Yoichi Motohashi: *A note on the mean value of the zeta and* L*-functions. II*, Proceedings of the Japan Academy, Series A – Mathematical Sciences, 61: 313–316, 1985.

[67] Andrzej Odłyżko: *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Mathematics of Computation, 48: 273–308, 1987.

[68] Andrzej Odłyżko: *The* 10^{22}*-nd zero of the Riemann zeta function*, in Michel Lapidus, Machiel van Frankenhuysen, editors: *Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions*, Contemporary Mathematics, 290: 139–144, 2001.

[69] Raymond Paley: *On the* k*-analogues of some theorems in the theory of the Riemann Zeta-function*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2-32(1): 273–311, 1931.

[70] Georges Rhin: *Répartition modulo* 1 *dans un corps de séries formelles sur un corps fini*, Dissertationes mathematicae: Rozprawy matematyczne, 95, 1972.

[71] Bernhard Riemann: *Über die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen größe*, Monatsberichte der Königlichen Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 671–680, 1859.

[72] Tanguy Rivoal: *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Série I – Sciences mathématiques, 331(4): 267–270, 2000.

[73] Michael Rosen: *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, 210, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002.

[74] Walter Rudin: *Real and complex analysis*, International Student Edition, McGraw-Hill, London, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1970.

[75] Zeev Rudnick, Peter Sarnak: *The n-level correlations of zeros of the zeta function*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Série I – Sciences mathématiques, 319(10): 1027–1032, 1994.

[76] Atle Selberg: *Bemerkninger om et multiplet integral*, Norsk matematisk tidsskrift, 26: 71–78, 1944.

[77] Kannan Soundararajan: *Nonvanishing of quadratic Dirichlet L-functions at $s = \frac{1}{2}$*, Annals of Mathematics, s2-152(2): 447–488, 2000.

[78] Kannan Soundararajan: *The fourth moment of Dirichlet's L-function*, Clay Mathematics Proceedings, 7: 239–242, 2007.

[79] Nattalie Tamam: *The fourth moment of Dirichlet L-Functions for the rational function field*, International Journal of Number theory, 10(1): 183–218, 2014.

[80] Edward Charles Titchmarsh: *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[81] Hans von Mangoldt: *Verteilung der nullstellen der Riemannschen funktionen* $\zeta(s)$, Mathematische Annalen, 60: 1–19, 1905.

[82] André Weil: *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités scientifiques et industrielles, 1041, Publications de l'Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg, 7, 1948.

[83] Michael Yiasemides: *Dirichlet L-functions and their derivatives in function fields*, PhD thesis, University of Exeter, 2020.

[84] Matthew Young: *The fourth moment of Dirichlet's L-function*, Annals of Mathematics, s2-173: 1–50, 2011.

Биографија аутора

Драган Ђокић је рођен 24. фебруара 1992. године у Лесковцу. Основну школу „Десанка Максимовић“ у Ораовици и Грделици и Гимназију у Лесковцу завршио је као ђак генерације, освојивши две прве и једну другу награду на Државном такмичењу из математике. Уписао је Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду 2011. године и дипломирао 2015. године са просечном оценом 10 на смеру Теоријска математика и примене. Мастер академске студије завршио је на истом факултету 2016. године са просечном оценом 10, одбранивши мастер рад *„Аритметика целобројних Аполонијевих конфигурација кругова“* под менторством проф. др Горана Ђанковића. Добио је Награду Математичког института Српске академије наука и уметности за најбољи мастер рад у области математике и механике. Након тога је уписао докторске академске студије на Катедри за алгебру и математичку логику Математичког факултета и положио све испите са оценом 10.

Од 2015. године је запослен на Катедри за алгебру и математичку логику Математичког факултета, најпре као сарадник у настави, а затим и као асистент од 2017. године. Држао је вежбе из предмета: Теорија бројева 1, Линеарна алгебра, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Алгебра 1, Алгебра 2, Дискретна математика, Методика наставе математике и рачунарства и Методика наставе математике А. Члан је пројекта 174012 Министарства науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије, под називом „Геометрија, образовање и визуелизација са применама“, од 2016. године.

Учествовао је на бројним научним скуповима у земљи и иностранству. До сада је објавио шест радова у часописима са SCI листе:

- Goran Djanković, Dragan Đokić: *The sixth power moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 514(1): 126296, 2022.

- Goran Djanković, Dragan Đokić, Nikola Lelas: *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, 149(7): 2851–2860, 2021.

- Goran Djanković, Dragan Đokić: *The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6): 2003–2017, 2021.
- Dragan Đokić, Nikola Lelas, Ilija Vrećica: *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, 16(5): 1081–1109, 2020.
- Dragan Đokić: *A Note on the distribution of angles associated to indefinite integral binary quadratic forms*, Czechoslovak Mathematical Journal, 69(2): 443–452, 2019.
- Goran Djanković, Dragan Đokić, Nikola Lelas, Ilija Vrećica: *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, 58(1): 1–14, 2018.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Драган Ђокић

број индекса 2025/2016

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17. oktobra 2022.

Драган Ђокић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Драган Ђокић

Број индекса 2025/2016

Студијски програм Математика

Наслов рада Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима

Ментор проф. др Горан Ђанковић

Потписани/а Драган Ђокић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17. oktobra 2022.

Драган Ђокић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство – некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17. октобра 2022.

Драган Ђокић

1. Ауторство – Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.