

## TEME ZA SEMINARSKE RADOVE IZ NUMERIČKIH METODA

### 1. POMOĆNI MODULI

#### 1.1. (30) CRTANJE GRAFIKA JEDNE ILI VIŠE FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE

*ulaz* – Broj funkcija koje se prikazuju grafički

– Interval na kome se prikazuju

– Zadavanje funkcija analitički (može i u implicitnom obliku) ili tabelom, kada u slučaju malog obima tabele treba linearno spojiti tačke.

– Izbor linearne (crta se  $y$ ) ili logaritamske skale (crta se  $\log(y)$ ).

– Omogućiti korisniku unos vrednosti podelaka na  $x$  i  $y$  osi; ako ih korisnik ne zada, generisati automatski.

*izlaz* – Jedan ili više grafika na istom crtežu, predstavljenih različitim bojama.

– Omogućiti zumiranje izabranog dela grafika.

*napomena* – Ako je funkcija zadata u implicitnom obliku, koristiti Newtonovu metodu (7.1).

#### 1.2. (30) IZRAČUNAVANJE NORMI VEKTORA (uniformna, p-norma, $p = 1, 2, \dots$ ) I MATRICA (uniformna, apsolutna, sferna, euklidska).

*ulaz* – Vektor ili matrica

– Izbor norme (jedne ili više)

*izlaz* – Veličina normi

*test* – Grafički prikaz u dve dimenzije jedinične sfere  $\|x\| = 1$  u uniformnoj i p-normi, za  $p=1, 2, \dots$

#### 1.3. (30) IZRAČUNAVANJE NORMI FUNKCIJA ( $C, L_1, L_2, H_1, H_2$ )

*ulaz* – Analitički izraz za funkciju (automatski računati potrebne izvode pomoću biblioteke izvoda elementarnih funkcija)

– Izbor norme (jedne ili više)

– Izbor intervala na kome se norma određuje

*izlaz* – Vrednosti normi

*test* – Grafička prezentacija norme – grafik funkcije, i grafici izvoda te funkcije ako se računaju norme u  $H_1$  i  $H_2$ , na intervalu na kome se norma računa sa naznakom površine koja predstavlja normu. Naznačiti maksimum funkcije ako se računa  $C$ -norma.

*napomena* – Za računanje integrala koristiti opcije 3.1 ili 3.2.

## 2. INTERPOLACIJA

### 2.1. (50) LAGRANGEOVA INTERPOLACIJA

- ulaz* – Funkcija koja se interpoliše, može biti zadata tabelarno ili analitički
- Step en polinoma
  - Izbor mreže: ekvidistantna mreža, neekvidistantna mreža koja se definiše zadavanjem čvorova, i Čebiševljeva mreža (čvorovi su nule Čebiševljevog polinoma odgovarajućeg stepena na z adatom intervalu)
- izlaz* – Interpolacioni polinom
- Vrednost polinoma u datoj tački, izračunata sa traženom tačnošću (Nevilleov algoritam)
  - Grafik interpolacionog polinoma i funkcije, ako je ova data analitički
- test* – Interpolisanu vrednost u tački izračunati pomoću polinoma i Nevilleovim algoritmom; uporediti jedan i drugi rezultat sa tačnom vrednošću funkcije
- Primerom  $f(x) = 1/(1+25x^2)$ ,  $x \in [-1, 1]$  pokazati da polinom ne konvergira ka funkciji sa povećanjem stepena polinoma
  - Za z adatu funkciju na z adatom intervalu nacrtati interpolacione polinome z adatog stepena konstruisane sa ravnomerno raspoređenim čvorovima, neravnomerno (z adato) raspoređenim čvorovima i sa čvorovima interpolacije koji su nule Čebiševljevog polinoma
  - Uporediti interpolant i funkciju za primere iz opcije 2.6

### 2.2. (50) RACIONALNA INTERPOLACIJA

- ulaz* – Funkcija koja se interpoliše, može biti zadata tabelarno ili analitički
- Step eni polinoma brojioca i imenioca
  - Izbor mreže: ekvidistantna ili neekvidistantna mreža koja se definiše zadavanjem čvorova,
- izlaz* – Polinomi brojioca i imenioca
- Vrednost racionalne funkcije u datoj tački (analogon Nevilleovog algoritma, [1]str.69)
  - Grafik interpolacione funkcije i date funkcije, ako je ova data analitički
- test* – Interpolisanu vrednost u tački izračunati pomoću racionalne funkcije i analognim Nevilleovim algoritmom; uporediti jedan i drugi rezultat sa tačnom vrednošću.
- napomena* – Komentarisati uslovljenost matrice sistema linearnih jednačina po koeficijentima racionalne funkcije, ako se koeficijenti određuju rešavanjem sistema jednačina
- Za rešavanje sistema linearnih jednačina koristiti opcije 5.i
  - Uporediti interpolant i funkciju za primere iz opcije 2.6

### 2.3. (50) HERMITEOVA INTERPOLACIJA

- ulaz* – Funkcija koja se interpoliše, može biti zadata tabelarno ili analitički. Ako je zadata analitički automatski računati potrebne izvode
- Izbor mreže: ekvidistantna ili neekvidistantna mreža koja se definiše zadavanjem čvorova,
  - Definisati broj zadatih uslova za svaki čvor (odakle sledi stepen polinoma)
- izlaz* – Koeficijenti interpolacionog polinoma
- Vrednost polinoma u datoj tački
  - Grafik interpolacionog polinoma i date funkcije, ako je ova data analitički
- test* – Interpolisanu vrednost u tački izračunati pomoću polinoma i uporediti je sa tačnom vrednošću.
- Uporediti interpolant i funkciju za primere iz opcije 2.6

### 2.4. (50) SPLAJN INTERPOLACIJA

- ulaz* – Funkcija koja se interpoliše, može biti zadata tabelarno ili analitički
- Definisati podelu intervala
  - Definisati granične uslove (prirodni, periodični, zadati izvodi)
- izlaz* – Koeficijenti kubnog polinoma za svaki podinterval
- Vrednost splajna u datoj tački
  - Grafik splajna i funkcije, ako je ova data analitički
- test* – Interpolisanu vrednost u tački izračunati pomoću splajna i uporediti je sa tačnom vrednošću
- Uporediti interpolant i funkciju za primere iz opcije 2.6
  - Grafički prikaz funkcije i splajnova određenih ravnomernom i neravnomernom podelom sa istim brojem podelaka.
- napomena* – Za rešavanje sistema linearnih jednačina koristiti opciju 5.7.

### 2.5. (60) INTERPOLACIJA FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

- ulaz* – Analitički ili tabelarno zadata funkcija
- Izbor metode interpolacije: dva puta jednodimenziona interpolacija ili Newtonov polinom sa podeljenim razlikama za dvodimenzionu interpolaciju.
- izlaz* – Vrednost polinoma u tački
- Analitički izraz za Newtonov polinom (ako je ta opcija izabrana).
- napomena* – Koristiti opcije 2.1, 2.2 ili 2.4 za jednodimenzionu interpolaciju.

## 2.6. (40) UPOREĐIVANJE RAZLIČITIH VIDOVA INTERPOLACIJE

*ulaz* – Funkcija koja se interpoliše zadata u analitičkom obliku

– Interval interpolacije

– Čvorovi interpolacije ili korak tabeliranja u slučaju ravnomernog rasporeda čvorova

– Lagrangeova, Hermiteova, splajn i racionalna interpolacija

*izlaz* – Uperedni grafički prikaz funkcije i interpolanata (označiti ih različitim bojama ili simbolima).

– Izračunavanje vrednosti funkcije i svih interpolanata u zadatoj tački

*test* (1)  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ , interval interpolacije  $[-1, 1]$ . Ovo je primer da se sa povećanjem stepena interpolacionog polinoma ne popravlja tacnost interpolacije (jer za  $0.726 \leq x \leq 1$   $n$ -ti izvod funkcije  $f(x)$  brze raste od  $n!$ )

(2)  $f(x) = \sqrt{x}$ , interval interpolacije  $[0.001, 2]$ . Ovde tačku 0 treba isključiti jer je izvod beskonačan; i za naznačeni interval velika vrednost izvoda u levom kraju kviri splajn interpolaciju.

(3)  $f(x) = x \exp(-x)/((x-1)^2 + 1)$ , interval interpolacije  $[0, 4]$

(4)  $f(x) = \cot x$ , interval interpolacije  $[0.01, 0.5]$

*napomena* – Koristiti opcije 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4.

## 2.7. (50) NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

*ulaz* – Funkcija zadata analitički ili tabelarno

– Čvorovi interpolacije ili korak tabele, ako su čvorovi ravnomerno raspoređeni

– Tačka u kojoj se računa izvod

– Red izvoda

*izlaz* – Vrednost izvoda u tački

– Analitički izraz za izvod interpolacionog polinoma

– Grafik izvoda interpolacionog polinoma i izvoda funkcije, ako je ova zadata analitički; na grafiku naznačiti čvorove interpolacije.

*test* – Za analitički zadatau funkciju izračunati tačnu i približnu vrednost do  $k$ -tog izvoda u čvorovima mreže koraka  $h$

– Grafički predstaviti zavisnost po  $h$  uniformne i euklidske norme vektora greške za svako  $k$  (uočiti optimalan korak  $h$  i opadanje tačnosti aproksimacije sa povećanjem  $k$ ).

*napomena* – Koristiti opciju 2.1.

## 2.8. (50) NACRTATI KONTURE ŠAKE KORIŠĆENJEM SPLAJN INTERPOLACIJE [21], pp.111

### 3. NUMERIČKA INTEGRACIJA

3.1. (40) IZRAČUNAVANJE INTEGRALA NEWTON-COTESOVIM FORMULAMA (pravougaonika, trapeza i Simpsona)

*ulaz* – Funkcija data u analitičkom ili tabelarnom obliku

– Interval integracije

– Izbor kvadrature formule

– Tačnost i minimalna vrednost koraka  $h$  (za analitički zadanu f-ju)

*izlaz* – Vrednost integrala

– Rungeova ocena greške

*test* – Upporedno izračunavanje različitim formulama istog integrala

– Izračunavanje jednog integrala istom formulom za različito  $h$ , i ekstrapolisanje vrednosti integrala za  $h = 0$  (interpolacijom 2.1.) ([1]str.133)

– Grafički prikaz greške u zavisnosti od  $h$  za svaku formulu

*primeri* (1)  $f(x) = x \exp(-x)$  , interval  $[0, 1]$

(2)  $f(x) = \cos x / \sqrt{1-x}$  , interval  $[0, 0.99]$

(3)  $f(x) = 1/(x + \cos x)$  , interval  $[0, \pi]$

(4)  $f(x) = 5 \exp(2x) \cos x / (\exp \pi - 2)$  interval  $[0, \pi/2]$  (Tačna vrednost integrala je 1)

3.2. (60) IZRAČUNAVANJE INTEGRALA GAUSSOVOM FORMULOM

*ulaz* – Podintegralna funkcija data u analitičkom obliku

– Interval integracije

– Težinska funkcija

– Broj čvorova

*izlaz* – Vrednost integrala

– Kvadratura formula kojom je vrednost izračunata

*test* – Računanje poznatog integrala za različiti broj čvorova

– Grafik zavisnosti greške od broja čvorova

*primer* – Koristiti primere zadate u opciji 3.1.

*napomena* – Za težinske funkcije koje definišu Čebiševljeve, Legendreove, Hermiteove i Jacobijske polinome može se koristiti opcija 3.3. U opštem slučaju konstruisati odgovarajući ortogonalni polinom. Za nalaženje njegovih nula koristiti metodu Bairstowa - (opcija 7.9)

– Koeficijente formule odrediti rešavanjem sistema linearnih jednačina korišćenjem neke od opcija 5.i.

### 3.3. (40) ORTOGONALNI POLINOMI (Jacobi, Čebišev, Legendre, Hermite)

*ulaz* – Izbor polinoma ( $i$  stepena)

– Izbor jedne od opcija

- vrednosti u izolovanoj tački pomoću rekurentne formule ([5],str.789,prim.2 i 3)

- koeficijenti polinoma pomoću rekurentne formule

- koeficijenti polinoma ako je interval  $[0, 1]$  umesto  $[-1, 1]$

- nule polinoma (ako je moguće tačno, a ako nije metodom Bairstowa, opcija 7.9)

*izlaz* – Editovanje izabranog rezultata

– Grafik polinoma

*test* – Prikazati na istoj slici grafike polinoma iste vrste, a različitog stepena

– Prikazati na istoj slici grafike polinoma različite vrste, a istog stepena

### 3.4. (40) GRAFIČKO PREDSTAVLJANE KVADRATURNIH FORMULA

*ulaz* – Podintegralna funkcija

– Interval integracije

– Izbor formule

– Zadavanje težinske funkcije za formulu Gaussovog tipa

– Definisavanje broja čvorova

*ulaz* – Vrednosti integrala izračunate svim izabranim formulama

– Grafički prikaz na intervalu integracije funkcije i interpolanata čijom integracijom je izračunat integral (Lagrangeov polinom (1) za Newton-Cotesove formule i Hermiteov polinom sa dvostrukim tačkama za Gaussove formule)

*napomena* – Potrebne su opcije 1.1, 2.1, 2.3, 3.1 i 3.2.

### 3.5. (40) IZRAČUNAVANJE DVOSTRUKOG INTEGRALA VIČESTRUKOM PRIMENOM FORMULA ZA JEDNODIMENZIONU INTEGRACIJU (Trapezne, Simpsonove, Gaussove)

*ulaz* – Podintegralna funkcija zadata analitički ili tabelarno

– Izbor kvadraturnih formula za svaki od koordinatnih pravaca (mogu se koristiti različite formule za integraciju po  $x$  i  $y$ ).

– Izbor broja čvorova po svakom koordinatnom pravcu (ako je funkcija data analitički)

*izlaz* – Vrednost integrala

*napomena* – Koristiti opcije 3.1 i 3.2.

### 3.6. (50) NESVOJSTVENI INTEGRAL

*ulaz* – Podintegralna funkcija

– Granice integracije

– Tip singulariteta ([3])

– Izbor kvadraturene formule

– Dopustiva greška rezultata

*izlaz* – Vrednost integrala

– Parametri formule (broj čvorova, korak  $h$ ) koja je korišćena

*napomena* – Potrebne su opcije 3.1 i 3.2.

## 4. APROKSIMACIJA

### 4.1. (50) SREDNJEKVADRATNA APROKSIMACIJA

*ulaz* – Funkcija koja se aproksimira

– Interval na kome se aproksimira

– Težinska funkcija kojom je definisan skalarni proizvod

– Stepen aproksimacionog polinoma

*izlaz* – Koeficijenti aproksimacionog polinoma

– Grafik funkcije i polinoma

– Greška aproksimacije

*test* – Poređenje aproksimacija jedne funkcije polinomom određenog stepena za različito definisane težinske funkcije (skalarni proizvodi) grafički

– Pokazati lošu uslovljenost sistema linearnih jednačina koji se dobija ako se ne izaberu ortogonalni polinomi (izračunati uslovljenost matrice sistema opcijom 5.1)

*napomena* – Za računanje skalarnog proizvoda koristiti opcije 3.1, 3.2

– Sistem linearnih jednačina računati nekom od opcija 5.i

### 4.2. (60) BRZA FOURIER-OVA TRANSFORMACIJA (FFT) ([3])

*ulaz* – Vektor čiju Fourierovu transformaciju određujemo

*izlaz* – Vektor koeficijenata Fourierove slike

*test* – Fourierova aproksimacija Dirakove  $\delta$ -je, Hevisajdove  $f$ -je i  $f(x) = x$  za različiti broj sabiraka (različito  $n$ )

– Primena na konvoluciju ([3])

– Množenje polinoma konvolucijom ([4])

– Primena na rešavanje Poissonove jednačine ([1], str. 451)

#### 4.3. (60) POLINOMI NAJBOLJE RAVNOMERNE APROKSIMACIJE ([2])

*ulaz* – Funkcija

– Interval

– Stepen polinoma

*izlaz* – Koeficijenti polinoma

– Greška aproksimacije

– Grafik funkcije i aproksimacionog polinoma

*test* – Grafički prikaz zavisnosti greške aproksimacije od stepena polinoma

#### 4.4. (40) POREĐENJE SREDNJEKVADRATNE I RAVNOMERNE APROKSIMACIJE

*ulaz* – Funkcija

– Interval

– Stepen polinoma

– Težinska funkcija

*izlaz* – Grafik funkcije i aproksimacionih polinoma

– Grafik zavisnosti greške aproksimacije od stepena polinoma za svaku aproksimaciju (na istom grafiku)

*napomena* – Koristiti opcije 4.1 i 4.3.

#### 4.5. (60) KASKADNI ALGORITAM ZA KONSTRUKCIJU TALASIĆA

*ulaz* – Izbor Box ili Hat funkcije kao početne iteracije

– Zadavanje koeficijenata dilatacione jednačine (suma mora biti jednaka  $\sqrt{2}$ )

– Zadavanje broja iteracija za određivanje funkcije skaliranja i talasića

*izlaz* – Grafici funkcije skaliranja i talasića u svakoj iteraciji ili krajnji rezultat (opciono)

#### 4.6. (60) CRTANJE FUNKCIJE SKALIRANJA I TALASIĆA PIRAMIDALNIM ALGORITMOM

*ulaz* – Izbor nivoa rezolucije

– Zadavanje koeficijenata dilatacione jednačine (suma mora biti jednaka  $\sqrt{2}$ ); ponuditi neke izbore

– Izbor šta se crta - funkcija skaliranja, talasić ili i jedno i drugo.

*izlaz* – Grafik funkcije skaliranja ili talasića, ili i jednog i drugog na istom crtežu

#### 4.7. (60) ZAVISNOST OSOBINA TALASIĆA OD KOEFICIJENATA

*ulaz* – Nacrtati koordinatni sistem  $EO$  i na njemu krug sa centrom u  $(0.5, 0.5)$  koji prolazi kroz koordinatni pocetak. Na grafiku nacrtati i prave  $O = E$  i  $O = 0.5 - E$ , kao i jedinični kvadrat upisan u krug, kome je jedno teme koordinatni pocetak (to su zanimljivi izbori koeficijenata)

– Izbor specijalnih sličajeva parametara, ili izbor proizvoljne tačke sa grafika.

– Izbor nekog od poznatih talasića (Haar-ov, splajn, Daubechies talasić).

– Izbor da li se prikazuje funkcija skaliranja ili talasić ili i jedno i drugo

– Izbor parametara  $E$  i  $O$  na slici, ako nije na skali izabran specijalni slučaj; kada se izabere tačka na grafiku, treba očitati vrednosti parametara  $E$  i  $O$  u njoj, i za odgovarajuće koeficijente nacrtati funkciju skaliranja ili talasić (zavisno od izbora)

– Zadavanje broja iteracija za određivanje funkcije skaliranja i talasića

*izlaz* – Grafik funkcije skaliranja ili talasića, ili oba istovremeno

*napomena* – Koristiti opciju 4.6.

#### 4.8. (60) LOCIRANJE POLOŽAJA AVIONA [23], pp.372

### 5. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

#### 5.1. (40) GAUSSOVA METODA SA I BEZ IZBORA GLAVNOG ELEMENTA I GAUSS-JORDANOVA METODA

*ulaz* – Matrica

– Indikator koji određuje šta se računa: rešenje sistema, determinanta ili inverzna matrica

– Vektori desne strane, ako se računaju rešenja sistema linearnih jednačina (jedan ili više sistema sa istom matricom).

*izlaz* – Determinanta, inverzna matrica ili rešenje sistema (zavisno od toga šta je izabrano)

– Greška  $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  ili  $R = I - A \cdot A^{-1}$

– Uslovljenost matrice  $A$

*test* – Hilbertova matrica različitih dimenzija

– Greška ocenjena u različitim normama; poređenje

*napomena* – Koristiti opciju 1.2

## 5.2. (40) LU-DEKOMPOZICIJA MATRICE

*ulaz* – Matrica

- Indikator koji određuje šta se računa: rešenje sistema, determinanta, samo dekompozicija ili inverzna matrica
- Vektori desne strane, ako se računaju rešenja sistema linearnih jednačina (jedan ili više sistema sa istom matricom).

*izlaz* – Gornje i donje trougaona matrica

- Determinanta, inverzna matrica ili rešenje sistema (ako je nešto od toga izabrano)
- Test  $A = L \cdot U$
- Greška  $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  ili  $R = I - A \cdot A^{-1}$ , ako je traženo rešenje ili inverzna matrica
- Uslovljenost matrice  $A$

*test* – Dekomponovati Hilbertovu matricu

## 5.3. (40) CHOLESKI DEKOMPOZICIJA (za Hermiteove matrice)

*ulaz* – Matrica

- Indikator koji određuje šta se računa: rešenje sistema, determinanta, samo dekompozicija ili inverzna matrica
- Vektori desne strane, ako se računaju rešenja sistema linearnih jednačina (jedan ili više sistema sa istom matricom).

*izlaz* – Trougaona matrica

- Determinanta, inverzna matrica ili rešenje sistema (ako je nešto od toga izabrano)
- Test  $A = L \cdot L^*$
- Greška  $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  ili  $R = I - A \cdot A^{-1}$ , ako je traženo rešenje ili inverzna matrica
- Uslovljenost matrice  $A$

*test* – Dekomponovati Hilbertovu matricu

## 5.4. (50) METODA ITERACIJE ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

*ulaz* – Matrica i vektor desne strane

- Tačnost i maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Rešenje sistema

- Korak iteracije u kome je određeno rešenje
- Greška  $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$
- Koeficijent kontrakcije ([6])
- Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije

*test* – Na različite načine transformisati sistem, tako da je norma matrice  $B$  i veća od jedan i manja od jedan. Uporediti rešenja dobijena u svakom od ovih slučajeva (odgovarajuće norme vektora greške).

*napomena* – Koristiti opciju 1.2.

5.5. (50) GAUSS-SEIDELOVA METODA ITERACIJE ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

*ulaz* – Matrica i vektor desne strane

– Tačnost i maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Rešenje sistema

– Korak iteracije u kome je određeno rešenje

– Greška  $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$

– Koeficijent kontrakcije ([6])

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije

*napomena* – Koristiti opciju 1.2.

5.6. (40) UPOREDNA ANALIZA DIREKTNIH I ITERATIVNIH METODA ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

*ulaz* – Matrica i vektor desne strane

– Tačnost i maksimalni broj iteracija za iterativne metode

*izlaz* – Rešenja određena direktnim metodama opcije 5.1 i 5.2 (ili 5.3) i iterativnim metodama opcijama 5.4 i 5.5

– Tačnost dobijenog rešenja u izabranoj normi (norma vektora  $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ )

– Indeks iteracije u kojoj je iterativnom metodom rešenje određeno

*test* – Sistem sa Hilbertovom matricom

*napomena* – Koriste se opcije 5.1, 5.2 (ili 5.3), 5.4, 5.5 i 1.2 (za ocenu greške).

5.7. (30) GAUSSOVA METODA ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA SA TRODIJAGONALNOM MATRICOM

*ulaz* – Vektori glavne dijagonale i dve do-dijagonale

– Vektor desne strane

*izlaz* – Rešenje sistema

– Ocena greške rešenja

*test* – Rešiti trodijagonalni sistem ovom metodom i nekom od opštih metoda (opcije 5.1, 5.2), i uporediti tačnost dobijenih rezultata.

5.8. (60) SINGULARNA DEKOMPOZICIJA MATRICE ([3], [6], [11]str.113)

*ulaz* – Matrica sistema

– Vektor desne strane

*izlaz* – Matrice određene dekompozicijom

– Rešenje sistema

– Ocena greške rešenja

*test* – Obraditi loše uslovljen sistem, predodređen sistem i neodređen sistem

## 6. SOPSTVENE VREDNOSTI I VEKTORI MATRICA

### 6.1. (40) HOUSEHOLDEROVA REDUKCIJA

*ulaz* – Matrica koja se redukuje na Hessenbergovu ili trodijagonalnu formu

*izlaz* – Redukovana matrica određena algoritmom sa predavanja

– Redukovana matrica određena algoritmom iz [3]

*test* – Objasniti razliku dobijenih rezultata (stabilnost algoritama)

*napomena* – Omogućiti editovanje međurezultata

### 6.2. (40) QR DEKOMPOZICIJA MATRICE (pomoću Householderove redukcije)

*ulaz* – Matrica

*izlaz* – Unitarna i gornje trougaona matrica

– Test  $A = Q \cdot R$  ?

*test* – Dekomponovati Hilbertovu matricu

### 6.3. (40) QR DEKOMPOZICIJA GORNJE HESSENBERGOVE ILI TRODIJAGONALNE MATRICE (pomoću matrica rotacije)

*ulaz* – Matrica

*izlaz* – Unitarna i gornje trougaona matrica

– Test  $A = Q \cdot R$  ?

*test* – Dekomponovati Hilbertovu matricu

### 6.4. (50) JACOBIJEVA METODA ZA NALAŽENJE SOPSTVENIH VREDNOSTI I VEKTORA MATRICA

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvene vrednosti i vektori

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije za svaku sopstvenu vrednost

*napomena* – Omogućiti editovanje međurezultata.

### 6.5. (50) LR METODA

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvene vrednosti i vektori

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije za svaku sopstvenu vrednost

*napomena* – Omogućiti editovanje međurezultata

– Koristiti LU dekompoziciju opcija 5.2

#### 6.6. (50) QR METODA

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvene vrednosti i vektori

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije za svaku sopstvenu vrednost

*napomena* – Omogućiti editovanje međurezultata

– Matricu prethodno svesti na gornju Hessenbergovu formu opcijom 6.1, a za QR dekompoziciju koristiti opciju 6.3

– Porediti rezultate sa rezultatima komercijalnog paketa (napr. EISPACK).

#### 6.7. (30) METODA PROIZVOLJNOG VEKTORA ZA DELIMIČNI PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvena vrednost i sopstveni vektor

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije

#### 6.8. (30) METODA SKALARNOG PROIZVODA ZA DELIMIČNI PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvena vrednost i sopstveni vektor

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije

## 6.9. (30) METODA TRAGOVA ZA DELIMIČNI PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Sopstvena vrednost i sopstveni vektor

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije

## 6.10. (40) METODA ISCRPLJIVANJA

*ulaz* – Matrica

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

– Izbor metode

*izlaz* – Sopstvena vrednost i sopstveni vektor

– Greška  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$

– Grafički prikaz zavisnosti greške od indeksa iteracije za svaku ovako izračunatu sopstvenu vrednost

*napomena* – Uzastopnom primemenom delimičnih metoda naći sve sopstvene vrednosti i vektore; prokomentarisati tačnost

– Koristiti opcije 6.7, 6.8 ili 6.9.

## 7. NELINEARNE JEDNAČINE I SISTEMI

### 7.1. (40) NEWTONOVA METODA ZA REŠAVANJE JEDNAČINA U $\mathcal{R}^1$

*ulaz* – Funkcija  $f(x)$

– Interval na kome je izolovano rešenje

– Početna aproksimacija

– Tačnost

– Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Grafik funkcije i položaji tangente u svakom momentu

– Rešenje jednačine

– Vrednost funkcije za nađeno rešenje

*test* (1)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ , ( $x^* = 0.86676$ ) interval  $[0, 1]$ ,  $[-1, 1]$

(2)  $f(x) = x \log x - 1.2$ , ( $x^* = 2.740646$ ) interval  $[2, 3]$ ,  $[0.001, 5]$

(3)  $f(x) = x \sin x - 0.25$ , ( $x^* = 1.171230$ ) interval  $[1, 2]$ ,  $[0, 8]$ ,  $[-3, 3]$

7.2. (40) METODA SEČICE ZA REŠAVANJE JEDNAČINA U  $\mathcal{R}^1$

*ulaz* – Funkcija  $f(x)$

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Početna aproksimacija
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Grafik funkcije i položaji sečice u svakom momentu

- Rešenje jednačine
- Vrednost funkcije za nađeno rešenje

*test* – Kao u opciji 7.1.

7.3. (40) METODA REGULA-FALSI ZA REŠAVANJE JEDNAČINA U  $\mathcal{R}^1$

*ulaz* – Funkcija  $f(x)$

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Početna aproksimacija
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Grafik funkcije i položaji sečice u svakom momentu

- Rešenje jednačine
- Vrednost funkcije za nađeno rešenje

*test* – Kao u opciji 7.1.

7.4. (30) METODA POLOVLJENJA INTERVALA ZA REŠAVANJE JEDNAČINA U  $\mathcal{R}^1$

*ulaz* – Funkcija  $f(x)$

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Tačnost

*izlaz* – Grafik funkcije i izabrani podinterval naznačen karakterističnom funkcijom intervala (1 na intervalu i 0 van njega) u svakom momentu

- Rešenje jednačine
- Vrednost funkcije za nađeno rešenje

*test* – Kao u opciji 7.1.

#### 7.5. (40) KOMBINOVANA METODA POLOVLJENJA I METODA NEWTONA

*ulaz* – Funkcija  $f(x)$

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Početna aproksimacija
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Grafik funkcije i položaji tangente u svakom momentu ili naznaka primene metode polovljenja karakterističnom funkcijom (1 na i 0 van) izabranog intervala

- Rešenje jednačine
- Vrednost funkcije za nađeno rešenje

*test* – Kao u opciji 7.1.

*napomena* – Jedan korak metode polovljenja se primenjuje onda kada nisu ispunjeni uslovi za primenu Newtonove metode (izvod u tekućoj iteraciji je blizak nuli)

#### 7.6. (40) METODA ITERACIJE ZA REŠAVANJE JEDNAČINA U $\mathcal{R}^1$

*ulaz* – Funkcija  $g(x)$  ( $x = g(x)$ )

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija
- Početna iteracija

*izlaz* – Grafik funkcije  $g(x)$  i prave  $y = x$  i izlomljenom linijom povezane iteracije određene do poslednje aproksimacije

- Rešenje jednačine
- Vrednost funkcije za nađeno rešenje
- Koeficijent kontrakcije (računat pomoću  $\max |g'(x)|$ )

*test* – Kao u opciji 7.1.

*napomena* – Za ocenu greške koristiti koeficijent kontrakcije

#### 7.7. (40) UPOREDNA ANALIZA METODA ZA REŠAVANJE NELINEARNIH JEDNAČINA U $\mathcal{R}^1$ (Njutnova, Regula-falsi, sečica, polovljenja, iteracija)

*ulaz* – Funkcija

- Interval na kome je izolovano rešenje
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

- izlaz* – Rešenje određeno svakom od metoda
- Indeks iteracije u kome je određeno
  - Ocena tačnosti rešenja, ukoliko nije dostignuta tačnost
  - Grafička prezentacija svake od metoda, po izboru
- test* – Kao u opciji 7.1.

*napomena* – Koristiti opcije 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 i 7.6.

#### 7.8. (60) ITERACIJA I HAOS\*

- ulaz* – Funkcija  $g(x)$  ( $x = g(x)$ )
- Posebno omogućiti izbor  $g(x) = r x(1 - x)$  zadavanjem parametra  $r$
  - Maksimalni broj iteracija
  - Tačnost
  - Početna iteracija
- izlaz* – Grafik funkcije  $g(x)$  i prave  $y = x$  i izlomljenom linijom povezane iteracije određene do postizanja zadate tačnosti ili maksimalnog broja iteracija
- Rešenje jednačine
- test* – Za različitu vrednost parametra računati rešenje jednačine  $x = r x(1 - x)$  ([4], str.506)
- Grafički predstaviti zavisnost broja tačaka nagomilavanja iterativnog niza za različite vrednosti parametra  $r$  (crtati iteracije posle  $n$ -tog koraka, napr.  $n = 1000$ )

#### 7.9. (50) METODA BAIRSTOWA ZA NALAŽENJE NULA POLINOMA

- ulaz* – Koeficijenti polinoma
- izlaz* – Koeficijenti kvadratnih i linearnog (ako postoji) faktora
- Realne i kompleksne nule polinoma
  - Grafik polinoma sa naznačenim izračunatim približnim vrednostima realnih nula
- test* – Odrediti sve korene polinoma vršeći faktorizaciju do kvadratnih i linearnih činilaca. Sa tako procenjenim vrednostima korena ponoviti postupak faktorizacije (uzimajući dobijene vrednosti za korene kao početne aproksimacije), počinjući ovaj ciklus od korena koji su najnetačnije određeni, tj. od korena koji su u prethodnom ciklusu poslednji određeni.

#### 7.10. (50) NEWTONOVA METODA ZA SISTEME NELINEARNIH JEDNAČINA

- ulaz* – Funkcije koje definišu nelinearni sistem
- Početna aproksimacija
  - Tačnost
  - Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Rešenje

- Grafička prezentacija za sistem dimenzije dva (presek funkcija  $f_1(x, y) = 0$  i  $f_2(x, y) = 0$ )
- Norma vektora greške
- Grafik zavisnosti norme vektora greške od indeksa iteracije

*napomena* – Za crtanje grafika funkcija koristiti opciju 1.1, a za računanje norme vektora 1.2.

#### 7.11. (50) METODA ITERACIJE ZA SISTEME NELINEARNIH JEDNAČINA

*ulaz* – Funkcije koje definišu nelinearni sistem u obliku  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$

- Početna aproksimacija
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Rešenje

- Grafička prezentacija za sistem dimenzije dva (presek funkcija  $x - g_1(x, y) = 0$  i  $y - g_2(x, y) = 0$ )
- Norma vektora greške
- Grafik zavisnosti norme vektora greške od indeksa iteracije

*napomena* – Za crtanje grafika koristiti opciju 1.1, a za računanje norme vektora 1.2.

#### 7.12. (50) GRADIJENTNE METODE ZA SISTEME NELINEARNIH JEDNAČINA

*ulaz* – Funkcional  $F$  koji se minimizira

- Gradijent funkcionala
- Početna aproksimacija
- Tačnost
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Rešenje

- Greška
- Grafik zavisnosti norme vektora greške od indeksa iteracije

*test* – Grafička prezentacija za slučaj dve dimenzije - izohipsama  $F(x, y) = F(x_k, y_k)$  predstaviti površ, a izlomljenom linijom spojiti iteracije za sve obrađene metode

*primer* –  $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy, \quad x_0 = 1, y_0 = 2$

*napomena* – Za crtanje funkcija koristiti opciju 1.1.

#### 7.13. (50) CRTANJE POVRŠI KORIŠĆENJEM NEWTONOVE METODE

*ulaz* – Jednačina površi koja se crta zadana u implicitnom obliku  $F(x, y, z) = 0$

- Oblast u kojoj crtamo površ
- Korak  $\Delta z$  sa kojim se crtaju izolije

*izlaz* – Grafik površi određen izolinijama  $F(x, y, z_k) = 0$ ,  $z_k = z_0 \pm k\Delta z$

*napomena* – Početna vrednost  $z_0$  je određena vrednošću funkcije  $F$  na granici zadate oblasti  
– Za crtanje funkcija koristiti opciju 1.1.

## 8. ODJ — CAUCHYEVİ PROBLEMI

8.1. (50) METODE TIPÄ RUNGE-KUTTA ZA SISTEM JEDNAČINA PRVOG REDA  
(p=1 Eulerova, p=2 modifikacije Eulera I i II, p=4 Runge-Kutta)

*ulaz* – Funkcije  $f_k(x, u_1, \dots, u_m)$ ,  $k = 1, \dots, m$

– Početni uslov  $u_k(a)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

– Interval integracije  $[a, b]$

– Tačnost (proverava se Rungeovim kriterijumom)

– Minimalna vrednost koraka

– Metoda

*izlaz* – Vrednosti funkcije u čvorovima

– Grafička prezentacija u jednodimenzionom slučaju: grafik rešenja (ako je poznato) i izlomljenom linijom predstavljen grafik aproksimacije.

*test* – nacrtati grafik zavisnosti greške (izračunate Rungeovim kriterijumom) od koraka za različite metode (uočiti različitu brzinu konvergencije)

– Pokazati grafički stabilnost metoda za jednačinu  $u' = a \cdot u$ ,  $u(0) = u_0$  za različiti odnos  $a$  i  $h$  ([6],str.180)

– Stabilnost za kruti sistem ([6],str.182)

*napomena* – Rungeovim kriterijumom se automatski proverava da li je tačnost postignuta, i korak se polovi sve dok uslov tačnosti ne bude ispunjen ili dok korak nije manji od neke unapred zadane male vrednosti

8.2. (50) VIŠESLOJNE METODE — MILNEOVA I ADAMSOVA

*ulaz* – Funkcije  $f_k(x, u_1, \dots, u_m)$ ,  $k = 1, \dots, m$

– Početni uslov  $u_k(a)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

– Interval integracije  $[a, b]$

– Tačnost

– Minimalna vrednost koraka

– Metoda

*izlaz* – Vrednosti funkcije u čvorovima

– Procena greške prema empirijskoj formuli

– Grafička prezentacija u jednodimenzionom slučaju - grafik rešenja (ako je poznato) i izlomljenom linijom predstavljen grafik aproksimacije

*test* – nacrtati grafik zavisnosti greške od koraka za različite metode (uočiti različitu brzinu konvergencije)

- Pokazati grafički stabilnost metoda za jednačinu  $u' = a \cdot u$ ,  $u(0) = u_0$  za različiti odnos  $a$  i  $h$  ([6],str.180) – Stabilnost za kruti sistem ([6],str.182)

*napomena* – Početni odsečak odrediti metodom Runge-Kutta; koristiti opciju 8.1.)

### 8.3. (40) POREĐENJE METODA TIPA RUNGE-KUTTA I VIŠESLOJNIH METODA ZA JEDNU JEDNAČINU

*ulaz* – Funkcija  $f(x, u)$

- Tačno rešenje jednačine  $u(x)$
- Početni uslov  $u(a)$
- Interval integracije  $[a, b]$
- Broj podintervala (definiše korak)
- Metode

*izlaz* – Grafička prezentacija: grafik funkcije i grafici aproksimacija

- Grafik zavisnosti greške od koraka za različite metode (različita brzina konvergencije)

*test* – Pokazati grafički stabilnost metoda za jednačinu  $u' = a \cdot u$ ,  $u(0) = u_0$  za različiti odnos  $a$  i  $h$  ([6],str.180)

*napomena* – Koristiti opcije 8.1 i 8.2.

### 8.4. (50) LOGISTIČKA JEDNAČINA $u' = au - bu^2$ ( $a$ kompleksni parametar)\*

*ulaz* – Parametri jednačine

- Početni uslov
- Metoda i korak

*izlaz* – Slike fraktala u ravni (kompleksnoj) ([4],str.477)

*napomena* – Koristiti opcije 8.1 i 8.2.

### 8.5. (60) POPULACIONI MODEL [38]

## 9. ODJ — GRANIČNI PROBLEMI

### 9.1. (50) METODA MREŽE

*ulaz* – Jednačina

- Granični uslovi
- Izbor aproksimacija izvoda (konačna razlika unapred, unazad ili centralna)
- Broj podintervala

*izlaz* – Vektor rešenja

– Grafičko predstavljanje tačnog rešenja (ako je poznato) i izlomljenom linijom približnog rešenja

*test* – Za jednačinu sa poznatim rešenjem izračunati grešku i nacrtati grafik zavisnosti greške od koraka mreže

– Na grafiku predstaviti tačno i numeričko rešenje

– Posebno analizirati jednačinu sa malim parametrom  $-\varepsilon u'' + u = 0, u(0) = u(1) = 1$  za različite odnose parametra  $\varepsilon$  i koraka  $h$  ([7],str.51)

## 9.2. (50) VARIJACIONE METODE

*ulaz* – Jednačina

– Granični uslovi

– Broj podintervala

– Izbor metode (Galerkinova, kolokacija, najmanjih kvadrata)

*izlaz* – Rešenje

– Grafičko predstavljanje rešenja

*test* – Za jednačinu sa poznatim rešenjem izračunati grešku i nacrtati grafik zavisnosti greške od koraka mreže

– Na grafiku predstaviti tačno i numeričko rešenje

– Posebno analizirati jednačinu sa malim parametrom  $-\varepsilon u'' + u = 0, u(0) = u(1) = 1$  za različite odnose parametra  $\varepsilon$  i koraka  $h$  ([7],str.51)

## 9.3. (40) POREĐENJE METODA ZA REŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA

*ulaz* – Jednačina

– Tačno rešenje jednačine

– Granični uslovi

– Broj podintervala (definiše korak)

– Metode

*izlaz* – Grafička prezentacija - grafik funkcije i izlomljenom linijom predstavljeni grafici aproksimacija

– Grafik zavisnosti greške od koraka za različite metode (uočiti različitu brzinu konvergencije)

*napomena* – Koristiti opcije 9.1 i 9.2.

#### 9.4. (60) METODA KONAČNOG ELEMENTA ZA JEDNODIMENZIONE GRANIČNE PROBLEME

*ulaz* – Jednačina

- Granični uslovi
- Tip elementa ([8])

*izlaz* – Rešenje

- Grafičko predstavljanje rešenja

*test* – Za jednačinu sa poznatim rešenjem izračunati grešku i nacrtati grafik zavisnosti greške od koraka mreže

- Na grafiku predstaviti tačno i numeričko rešenje
- Posebno analizirati jednačinu sa malim parametrom  $-\varepsilon u'' + u = 0, u(0) = u(1) = 1$  za različite odnose parametra  $\varepsilon$  i koraka  $h$  ([7],str.51)

*napomena* – Koristiti opciju 9.2 (sa izabranim tipom bazisnog elementa)

#### 8.5. (60) SKOK U DALJ [21], pp.226

#### 9.5. (60) PUTANJA PROJEKTILA [21], pp.225

### 10. PDJ

#### 10.1. (60) GRANIČNI PROBLEM ZA POISSONOVU PDJ

*ulaz* – Analitičko zadavanje desne strane jednačine i funkcije graničnog uslova

- Granice pravougaone oblasti
- Koraci mreže
- Tačnost rešenja sistema linearnih jednačina
- Maksimalni broj iteracija

*izlaz* – Matrica vrednosti rešenja

*test* – Menjati korake i pratiti promenu rešenja (napr. preko promene euklidske norme matrice rešenja)

- Grafički prikazati zavisnost euklidske norme matrice rešenja od koraka  $h$

*napomena* – Za računanje norme matrice koristiti opciju 1.2.

- Za rešavanje sistema linearnih jednačina koristiti opcije 5.i ili SOR-algoritmom ([3]).

#### 10.2. (60) SHEMA SA TEŽINAMA ZA REŠAVANJE JEDNODIMENZIONNE PARABOLIČKE PDJ

*ulaz* – Analitički zadat slobodni član jednačine i funkcije početnog i graničnih uslova

– Interval definisanosti

– Maksimalno vreme

– Koraci mreže

– Težinski parametar sheme

*izlaz* – Matrica vrednosti rešenja

*test* – Varirati korake (odnos ostaje konstantan) i pratiti promenu rešenja (napr. preko promene euklidske norme matrice rešenja)

– Grafički prikazati zavisnost euklidske norme matrice rešenja od  $h$

*napomena* – Za rešavanje trodijagonalnog sistema koristiti opciju 5.7.

#### 10.3. (60) SHEMA SA TEŽINAMA ZA REŠAVANJE JEDNODIMENZIONNE HIPERBOLIČKE PDJ

*ulaz* – Analitički zadat slobodni član jednačine i funkcije početnih i graničnih uslova

– Interval definisanosti

– Maksimalno vreme

– Koraci mreže

– Težinski parametri sheme

*izlaz* – Matrica vrednosti rešenja

*test* – Varirati korake (odnos ostaje konstantan) i pratiti promenu rešenja (napr. preko promene euklidske norme matrice rešenja)

– Grafički prikazati zavisnost euklidske norme matrice rešenja od  $h$

*napomena* – Za rešavanje trodijagonalnog sistema koristiti opciju 5.7.

#### 10.4. (60) MODELOVANJE PROTOKA SAOBRAĆAJA

#### 10.5. (60) AEROZAGAĐENJE [21], pp.227

### 11. OBRADA SIGNALA

#### 11.1. (60) DISKRETNA KOSINUSNA TRANSFORMACIJA (DCT)

#### 11.2. (60) JPEG ALGORITAM KOMPRESIJE SLIKA

#### 11.3. (60) KOMPRESIJA SLIKE TALASIĆIMA

- 11.4. (60) DVODIMENZIONALNA BRZA FOURIER-OVA TRANSFORMACIJA
- 11.5. (60) DVODIMENZIONALNA KONVOLUCIJA U PROSTORNOM I VREMENSKOM DOMENU
- 11.6. (50) LINEARNI FILTRI ZASNOVANI NA KONVOLUCIJI
- 11.7. (50) DETEKCIJA IVICA DIGITALNIH SLIKA
- 11.8. (60) OBRADA KONTURA SLIKE
- 11.9. (60) SAVITZKY-GOLAY FILTAR

## LITERATURA

1. Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New York, (1980)
2. Berezin I.S., Židkov N.P., *Numerička analiza*, Nučna knjiga, Beograd (1963)
3. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W., *Numerical recipes*, Cambridge University Press, Cambridge 1986)
4. Strang G., *Introduction to applied mathematics*, Wilesley-Cambridge Press, Wilesley (1986)
5. Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc., New York (1972)
6. Radunović D., *Numeričke metode*, Građevinska knjiga, Beograd, (1991), II izdanje - Univerzitet u Beogradu (1998)
7. Doolan E., Miller J., Schilders W., *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*, Boole Press, Dublin (1980) (ruski - Mir, Moskva, 1983)
8. Strang G., Fix G., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1973)
9. Goedecker S., *Wavelets and their application*, Press EPFL, Lausanne (1998)
10. Strang G., Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks* Wellesley-Cambridge Press (1996)
11. Wilkinson J.H., Reinsch C., *Linear Algebra Handbook of Automatic Computation*, Springer-Verlag, Berlin (1971) (ruski - Mašinstroenie, Moskva, 1976)
12. LeVeque R., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser, Basel (1990)
13. Klamkin M. (edit), *Mathematical Modelling: Classroom Notes in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, (1987)
14. Bungartz H.J., *Mathematical models - ODE and PDE, Lesson 01*, Second Short Course on Parallel Numerical Simulation,

15. Tayler A.B., *Mathematical models in applied mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
16. Andrews J.G., McLone R.R., *Mathematical modelling*, (ruski prevod) Mir, Moskva, 1979.
17. Leon S., *Linear algebra with applications*, Prentice Hall, 1998.
18. Akin J.E., *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, London, 1982.
19. Mulcahy C., *Plotting and scheming with wavelets*, preprint, 1996.
20. Stollnitz E., DeRose T., Salasin D., *Wavelets for computer graphics: A primer, part 2*, IEEE Comp. Graphics and Applications, V15, N4, 75-85, 1995.
21. Moler C., *Numerical Computing with Matlab*, SIAM, Philadelphia, 2004.
22. Bender E., *An Introduction to Mathematical Modeling*, Dover, New York, 1978.
23. Gander W., Hřebíček J., *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab, fourth edition*, Springer, Berlin, 2004.
24. Higham D., Higham N., *Matlab Guide*, SIAM, Philadelphia, 2000.
25. Nievergelt Y., *Wavelets Made Easy*, Birkhauser, Boston, 2001.
26. Hildebrand F., *Advanced Calculus for Applications*, Second edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
27. Zaliznjak V.E., *Osnovi vicisliteljnoi fizike (cast 1: Vedenie v konecno-raznostnie metodi)*, Inzevsk, Moskva, 2004.
28. Edelstein-Keshet L., *Mathematical Models in Biology*, SIAM, Philadelphia, 2005.
29. Fowkes N., Mahony J., *An introduction to Mathmatical Modelling*, Wiley, New York, 1994.
30. Mesterton-Gibbons M., *A Concrete Approach to Mathematical Modelling*, Wiley, New York, 1995.
31. Bossel H., *Modeling and Simulation*, A K Peters, Wellesley, 1994.
32. Gustaffson F., Bergman N., *MATLAB for Engineers Explained*, Springer, London, 2003.
33. Rosales R., *Simplest car following traffic flow model*, <http://ocw.mit.edu>
34. Radunovic D., *Talasići*, Akademska misao, Beograd, 2005.
35. Barker V., *Some Computational Aspects of Wavelets*, Technical University of Denmark, Lyngby, pp.110, 2001.
36. Jerome J.(edit.), *Modelling and Computation for Applications in Mathematics, Science, and Engineering*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
37. Meerschaert M., *Mathematical Modeling (Second Edition)*, Academic Press, 1999.
38. Radunović D., *Numeričke metode kroz modele i primere*, Beograd, 2007.