Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Katedra za računarstvo i informatiku

Šifra predmeta: R265
25.04.2023.

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Kolokvijum — Rešenja

Zadatak 1 *Prirodna dedukcija u logici*

______/

Pokazati tautalogičnost sledeće formule u iskaznoj logici koristeći pravila prirodne dedukcije u okviru apply dokaza. 6 p.

lemma $[\![P = P'; (P' \longrightarrow Q = Q')]\!] \Longrightarrow (P \wedge Q) = (P' \wedge Q')$

Rešenje 1

6 p.

lemma $[\![P = P'; (P' \longrightarrow Q = Q')]\!] \Longrightarrow (P \wedge Q) = (P' \wedge Q')$
apply (*erule iffE*)
apply (*rule iffI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule impE*) **back**
apply *assumption*
apply (*rule conjI*)
apply *assumption*
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule iffE*)
apply (*erule impE*) **back**
apply *assumption* +
apply (*erule conjE*)
apply (*rule conjI*)
apply (*erule impE*) **back back**
apply *assumption* +
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule iffE*)
apply (*erule impE*) **back back**
apply (*erule impE*) **back back**
apply *assumption* +
apply (*erule impE*) **back back**
apply *assumption* +
done

Zadatak 2 *Prirodna dedukcija u logici*

______/

Pokazati valjanost sledeće rečenice u logici prvog reda koristeći prirodnu dedukciju u okviru apply dokaza. 6 p.

lemma $(\forall\ x.\ P\ x \wedge Q\ x) \longleftrightarrow (\forall\ x.\ P\ x) \wedge (\forall\ x.\ Q\ x)$

Rešenje 2

6 p.

lemma $(\forall\ x.\ P\ x \wedge Q\ x) \longleftrightarrow (\forall\ x.\ P\ x) \wedge (\forall\ x.\ Q\ x)$

apply (*rule iffI*)
 apply (*rule conjI*)
  apply (*rule allI*)
  apply (*erule-tac* $x = x$ **in** *allE*)
  apply (*erule conjE*)
  apply *assumption*
 apply (*rule allI*)
 apply (*erule-tac* $x = x$ **in** *allE*)
 apply (*erule conjE*)
 apply *assumption*
apply (*rule allI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule-tac* $x = x$ **in** *allE*) +
apply (*rule conjI*)
 apply *assumption* +
done

Zadatak 3 *Svojstva funkcija*

——/
6 p.

Napisati detaljan Isar dokaz sledeće leme o slici i inverznoj slici funkcije.

lemma f ‘ f −‘ f ‘ $A \subseteq f$ ‘ A

Rešenje 3

6 p.

lemma f ‘ f −‘ f ‘ $A \subseteq f$ ‘ A
proof
 fix y
 assume $y \in f$ ‘ f −‘ f ‘ A
 then have $\exists\ x \in f$ −‘ f‘ $A.\ y = f\ x$ **by** *auto*
 then obtain x **where** $x \in f$ −‘ f ‘ A $y = f\ x$ **by** *auto*
 then have $f\ x \in f$ ‘ A **by** *auto*
 with ‹$y = f\ x$› **show** $y \in f$ ‘ A **by** *auto*
qed

Zadatak 4 *Logika*

——/
6 p.

Edgar Abercrombie bio je antropolog koga je posebno zanimala logika, sociologija i laž i istina. Jednog dana odlučio je posetiti ostrva gde se odvijalo puno aktivnosti laganja i govorenja istine! Prvo ostrvo koje je posetio bio je Otok vitezova i podanika na kojem su oni zvani vitezovi uvek govorili istinu i oni zvani podanici uvek lažu. Dodatno znao je da je svaki stanovnik ili vitez ili podanik.

Abercrombie je sreo samo dva stanovnika A i B. A je rekao: Bar jedan od nas je podanik. Šta možemo da zaključimo o stanovnicima A i B?

Napisati detaljan dokaz u Isar-u.

Napomena: Dozvoljeno je korišćenje samo *simp* metode za dokazivanje među koraka.

Rešenje 4

6 p.

lemma *Smullyan*:
 assumes $kA \longleftrightarrow \neg\ kA \lor \neg\ kB$

shows $kA \wedge \neg\ kB$
proof (*cases kA*)
  case *True*
  with *assms* **have** $\neg\ kA \vee \neg\ kB$ **by** *simp*
  with ‹kA› **have** $\neg\ kB$ **by** *simp*
  with ‹kA› **show** *?thesis* **by** *simp*
next
  case *False*
  with *assms* **have** $\neg\ (\neg\ kA \vee \neg\ kB)$ **by** *simp*
  then have $kA \wedge kB$ **by** *simp*
  then have kA **by** *simp*
  with ‹$\neg\ kA$› **have** *False* **by** *simp*
  then show *?thesis* **by** *simp*
qed

Zadatak 5 *Matematička indukcija*

———/

Matematičkom indukcijom pokazati da važi: 6 p.

$$-3 + 3 + 9 + \ldots + (6n - 9) = 3n^2 - 6n.$$

Primitivnom rekurzijom definisati funkciju *suma* :: *nat* ⇒ *int* koja računa zadatu sumu, te indukcijom u Isar-u detaljno pokazati da je ona ekvivalentna desnoj strani jednakosti.

Napomena: Dozvoljeno je korišćenje samo *simp* metode za dokazivanje među koraka.

Savet: Formulisati, dokazati u Isar-u i iskoristiti pomocnu lemu koja opisuje narednu jednakost:

$$3 * Suc(n)^2 - 6 * Suc(n) = 3 * n^2 - 3.$$

Savet: Od dodatnih lema možete koristiti *power2-sum*, *power2-eq-square*, i leme iz grupe *algebra-simps*. Voditi računa o tipovima u pomoćnoj i glavnoj lemi.

Rešenje 5

6 p.

primrec *suma* :: *nat* ⇒ *int* **where**
  suma 0 = 0
| *suma (Suc n) = suma n + (6 ∗ int (Suc n) − 9)*

lemma *aux*: $3 * (int\ (Suc\ n))^2 - 6 * int\ (Suc\ n) = 3 * (int\ n)^2 - 3$
proof −
  have $3 * (int\ (Suc\ n))^2 - 6 * int\ (Suc\ n) = 3 * (1 + int\ n)^2 - 6 * (1 + int\ n)$ **by** *simp*
  also have ... $= 3 * (1 + 2 * int\ n + (int\ n)^2) - 6 - 6 * int\ n$ **by** (*simp add*: *power2-sum*)
  also have ... $= 3 + 6 * int\ n + 3 * (int\ n)^2 - 6 - 6 * int\ n$ **by** *simp*
  also have ... $= 3 * (int\ n)^2 - 3$ **by** *simp*
  finally show *?thesis* **.**
qed

lemma $suma\ n = 3 * (int\ n)^2 - 6 * int\ n$
proof (*induct n*)
  case *0*
  then show *?case* **by** *simp*

next
  case $(Suc\ n)$
  have $suma\ (Suc\ n) = suma\ n + (6 * int\ (Suc\ n) - 9)$ **by** $(simp\ only\colon suma.simps(2))$
  also have $... = 3 * (int\ n)^2 - 6 * int\ n + (6 * int\ (Suc\ n) - 9)$ **using** Suc **by** $simp$
  also have $... = 3 * (int\ n)^2 - 3$ **by** $simp$
  finally show $?case$ **using** $aux[of\ n]$ **by** $simp$
qed