

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 8

Zadatak 1 *Alternirajuća suma neparnih prirodnih brojeva*

Pokazati da važi:

$$-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n n.$$

Primitivnom rekurzijom definisati funkciju *alternirajuca-suma* :: *nat* ⇒ *int* koja računa alternirajuću sumu neparnih brojeva od 1 do $2n - 1$, tj. definisati funkciju koja računa levu stranu jednakosti.

primrec *alternirajuca-suma* :: *nat* ⇒ *int* **where**

alternirajuca-suma 0 = *undefined*

| *alternirajuca-suma* (Suc n) = *undefined*

Proveriti vrednost funkcije *alternirajuca-suma* za proizvoljan prirodni broj.

Dokazati sledeću lemu indukcijom koristeći metode za automatsko dokazivanje.

lemma *alternirajuca-suma* n = $(-1)^n * \text{int } n$

Dokazati sledeću lemu indukcijom raspisivanjem detaljnog Isar dokaza.

lemma *alternirajuca-suma* n = $(-1)^n * \text{int } n$

Zadatak 2 *Množenje matrica*

Pokazati da važi sledeća jednakost:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Definisati tip *mat2* koji predstavlja jednu 2×2 matricu prirodnih brojeva. Tip *mat2* definisati kao skraćenicu uređene četvorke prirodnih brojeva. Uređena četvorka odgovara 2×2 matrici kao

$$(a, b, c, d) \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Definisati konstantu *eye* :: *mat2*, koja predstavlja jediničnu matricu.

Definisati funkciju *mat-mul* :: *mat2* ⇒ *mat2* ⇒ *mat2*, koja množi dve matrice.

fun *mat-mul* **where**

mat-mul (a1, b1, c1, d1) (a2, b2, c2, d2) = *undefined*

Definisati funkciju *mat-pow* :: *mat2* ⇒ *nat* ⇒ *mat2*, koja stepenuje matricu.

fun *mat-pow* **where**

mat-pow - - = *undefined*

Dokazati sledeću lemu koristeći metode za automatsko dokazivanje.

lemma *mat-pow* (1, 1, 0, 1) $n = (1, n, 0, 1)$

Dokazati sledeću lemu indukcijom raspisivanjem detaljnog Isar dokaza.

lemma *mat-pow* (1, 1, 0, 1) $n = (1, n, 0, 1)$

Zadatak 3 *Deljivost*

Pokazati sledeću lemu.

Savet: Obrisati *One-nat-def* i *algebra-simps* iz *simp*-a u finalnom koraku dokaza.

lemma

fixes $n::nat$

shows $(6::nat) \text{ dvd } n * (n + 1) * (2 * n + 1)$

Zadatak 4 *Nejednakost*

Pokazati da za svaki prirodan broj $n > 2$ važi $n^2 > 2 * n + 1$.

Savet: Iskoristiti *nat-induct-at-least* kao pravilo indukcije i lemu *power2-eq-square*.

thm *nat-induct-at-least*

thm *power2-eq-square*

lemma *n2-2n:*

fixes $n::nat$

assumes $n \geq 3$

shows $n^2 > 2 * n + 1$

using *assms*