

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 7

Zadatak 1 *Isar dokazi u logici prvog reda.*

lemma

assumes $(\exists x. P x)$
and $(\forall x. P x \longrightarrow Q x)$
shows $(\exists x. Q x)$

lemma

assumes $\forall c. Man\ c \longrightarrow Mortal\ c$
and $\forall g. Greek\ g \longrightarrow Man\ g$
shows $\forall a. Greek\ a \longrightarrow Mortal\ a$

Dodatni primer:

Ako svaki konj ima potkovice;
i ako ne postoji čovek koji ima potkovice;
i ako znamo da postoji makar jedan čovek;
dokazati da postoji čovek koji nije konj.

Zadatak 2 *Pravilo ccontr i classical.*

Dokazati u Isar jeziku naredna tvrđenja pomoću pravila *ccontr*.

lemma $\neg (A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

Dodatni primer:

lemma $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow P) \longrightarrow P$

Dokazati u Isar jeziku naredna tvrđenja pomoću pravila *classical*.

lemma $P \vee \neg P$

Zadatak 3 *Logčki lavirinti.*

Svaka osoba daje potvrđan odgovor na pitanje: *Da li si ti vitez?*

lemma *no-one-admits-knave:*

assumes $k \longleftrightarrow (k \longleftrightarrow ans)$
shows *ans*

Abercrombie je sreo tri stanovnika, koje ćemo zvati A, B i C. Pitao je A: Jesi li ti vitez ili podanik? On je odgovorio, ali tako nejasno da Abercrombie nije mogao shvati što je rekao. Zatim je upitao B: Šta je rekao? B odgovori: Rekao je da je podanik. U tom trenutku, C se ubacio i rekao: Ne verujte u to; to je laž! Je li C bio vitez ili podanik?

lemma *Smullyan-1-1:*

assumes $kA \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow ansA)$
and $kB \longleftrightarrow \neg ansA$
and $kC \longleftrightarrow \neg kB$

shows kC

Abercrombie nije pitao A da li je on vitez ili podanik (jer bi unapred znao koji će odgovor dobiti), već je pitao A koliko od njih trojice su bili vitezovi. Opet je A odgovorio nejasno, pa je Abercrombie upitao B što je A rekao. B je tada rekao da je A rekao da su tačno njih dvojica podanici. Tada je, kao i prije, C tvrdio da B laže. Je li je sada moguće utvrditi da li je C vitez ili podanik?

definition *exactly-two* :: $bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool$ **where**

$$\textit{exactly-two } A B C \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \wedge \neg (A \wedge B \wedge C)$$

lemma *Smullyan-1-2*:

assumes $kB \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow \textit{exactly-two } (\neg kA) (\neg kB) (\neg kC))$

and $kC \longleftrightarrow \neg kB$

shows kC

Abercrombie je sreo samo dva stanovnika A i B. A je izjavio: Obojica smo podanici. Da li možemo da zaključimo šta je A a šta je B?

Dodatni primer:

lemma *Smullyan-1-3*:

x