

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 3

Zadatak 1 *Intuicionistička pravila prirodne dedukcije u iskaznoj logici*

Diskutovati o pravilima uvođenja i pravilima eliminacije prirodne dedukcije iskazne logike. Pomoću ključne reči *thm* ispitati svako pravilo prirodne dedukcije. Primeniti odgovarajuće pravilo prirodne dedukcije na jednostavnim formulama i diskutovati o cilju koga treba dokazati pre i posle primene tog pravila.

Uvodjenje konjukcije: *conjI*

thm *conjI*

lemma $A \wedge B$

apply (*rule conjI*)

Uvodjenje disjunkcije: *disjI1/disjI2*

thm *disjI1*

thm *disjI2*

lemma $A \vee B$

apply (*rule disjI2*)

Uvodjenje implikacije: *impI*

thm *impI*

lemma $A \longrightarrow B$

apply (*rule impI*)

Uvodjenje ekvivalencije: *iffI*

thm *iffI*

lemma $A \longleftrightarrow B$

apply (*rule iffI*)

Uvodjenje negacije: *notI*

thm *notI*

lemma $\neg A$

apply (*rule notI*)

Eliminacija konjukcije. *conjE*

thm *conjE*

lemma $A \wedge B \implies C$
apply (*erule conjE*)

Eliminacija disjunkcije. *disjE*

thm *disjE*

lemma $A \vee B \implies C$
apply (*erule disjE*)

Eliminacija implikacije. *impE*

thm *impE*

lemma $A \longrightarrow B \implies C$
apply (*erule impE*)

Eliminacija ekvivalencije. *iffE*

thm *iffE*

lemma $A \longleftrightarrow B \implies C$
apply (*erule iffE*)

Eliminacija negacije. *notE*

thm *notE*

lemma $\neg A \implies B$
apply (*erule notE*)

Zadatak 2 *Dokazi u prirodnoj dedukciji*

Pokazati da su sledeće formule tautologija u iskaznoj logici. Dozvoljeno je korišćenje samo intuicionističkih pravila prirodne dedukcije.

lemma $A \wedge B \longrightarrow B \wedge A$
apply (*rule impI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*rule conjI*)
apply *assumption* +
done

lemma $A \vee B \longrightarrow B \vee A$
apply (*rule impI*)
apply (*erule disjE*)
apply (*rule disjI2*)
apply *assumption*
apply (*rule disjI1*)

apply *assumption*
done

lemma $A \wedge B \longrightarrow A \vee B$

apply (*rule impI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*rule disjI1*)
apply *assumption*
done

lemma $(A \wedge B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$

apply (*rule impI*) +
apply (*erule impE*)
apply (*rule conjI*)
apply *assumption* +
done

lemma $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$

apply (*rule impI*) +
apply (*erule impE*)
apply (*erule conjE*)
apply *assumption*
apply (*erule conjE*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption* +
done

lemma $\neg (A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B$

apply (*rule impI*)
apply (*rule conjI*)
apply (*rule notI*)
apply (*erule notE*)
apply (*rule disjI1*)
apply *assumption*
apply (*rule notI*)
apply (*erule notE*)
apply (*rule disjI2*)
apply *assumption*
done

lemma $\neg A \wedge \neg B \longrightarrow \neg (A \vee B)$

apply (*rule impI*)
apply (*rule notI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule disjE*)
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*) +
apply *assumption*
done

```

lemma  $\neg (A \longleftrightarrow \neg A)$ 
  apply (rule notI)
  apply (erule iffE)
  apply (erule impE) back
  apply (rule notI)
  apply (erule impE)
  apply assumption
  apply (erule notE)
  apply assumption
  apply (erule impE)
  apply assumption
  apply (erule notE)
  apply assumption
done

```

Dodatni primeri

```

lemma  $(Q \longrightarrow R) \wedge (R \longrightarrow P \wedge Q) \wedge (P \longrightarrow Q \vee R) \longrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$ 
  apply (rule impI)
  apply (rule iffI)
  apply (erule conjE) +
  apply (erule impE) back back
  apply assumption
  apply (erule disjE)
  apply assumption
  apply (erule impE) back
  apply assumption
  apply (erule conjE)
  apply assumption
  apply (erule conjE) +
  apply (erule impE)
  apply assumption
  apply (erule impE)
  apply assumption
  apply (erule conjE)
  apply assumption
done

```

```

lemma  $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow Q \wedge R)$ 
  apply (rule impI) +
  apply (erule conjE)
  apply (erule impE)
  apply assumption
  apply (rule conjI)
  apply assumption
  apply (erule impE)
  apply assumption +
done

```

```

lemma  $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q \longrightarrow \neg P$ 
  apply (rule impI)
  apply (rule notI)

```

apply (*erule conjE*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow (Q \longrightarrow (P \longrightarrow R))$
apply (*rule impI*) +
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule impE*)
apply *assumption* +
done

lemma $\neg (P \wedge \neg P)$
apply (*rule notI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $A \wedge (B \vee C) \longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
apply (*rule impI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule disjE*)
apply (*rule disjI1*)
apply (*rule conjI*)
apply *assumption* +
apply (*rule disjI2*)
apply (*rule conjI*)
apply *assumption* +
done

lemma $\neg (A \wedge B) \longrightarrow (A \longrightarrow \neg B)$
apply (*rule impI*) +
apply (*rule notI*)
apply (*erule notE*)
apply (*rule conjI*)
apply *assumption* +
done

lemma $(A \longrightarrow C) \wedge (B \longrightarrow \neg C) \longrightarrow \neg (A \wedge B)$
apply (*rule impI*)
apply (*rule notI*)
apply (*erule conjE*) +
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule impE*)
apply *assumption*

apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $(A \wedge B) \longrightarrow ((A \longrightarrow C) \longrightarrow \neg (B \longrightarrow \neg C))$
apply (*rule impI*) +
apply (*rule notI*)
apply (*erule conjE*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow (\neg A \longleftrightarrow \neg B)$
apply (*rule impI*)
apply (*erule iffE*)
apply (*rule iffI*)
apply (*rule notI*)
apply (*erule impE*) **back**
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
apply (*rule notI*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $A \longrightarrow \neg \neg A$
apply (*rule impI*)
apply (*rule notI*)
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $\neg (A \longleftrightarrow \neg A)$
apply (*rule notI*)
apply (*erule iffE*)
apply (*erule impE*) **back**
apply (*rule notI*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)

apply *assumption*
done

lemma $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$
apply (*rule impI*) +
apply (*rule notI*)
apply (*erule impE*)
apply *assumption*
apply (*erule notE*)
apply *assumption*
done

lemma $\neg A \vee B \longrightarrow (A \longrightarrow B)$
apply (*rule impI*) +
apply (*erule disjE*)
apply (*erule notE*)
apply *assumption* +
done