Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Katedra za računarstvo i informatiku

Šifra predmeta: R265
04.03.2024.

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 03

Zadatak 1 *Intuicionistička pravila prirodne dedukcije u iskaznoj logici*

Diskutovati o pravilima uvođenja i pravilima eliminacije prirodne dedukcije iskazne logike. Pomoću ključne reči *thm* ispitati svako pravilo prirodne dedukcije. Primeniti odgovarajuće pravilo prirodne dedukcije na jednostavnim formulama i diskutovati o cilju koga treba dokazati pre i posle primene tog pravila.

Uvodjenje konjukcije: *conjI*

lemma $A \wedge B$

Uvodjenje disjunkcije: *disjI1* / *disjI2*

lemma $A \vee B$

Uvodjenje implikacije: *impI*

lemma $A \longrightarrow B$

Uvodjenje ekvivalencije: *iffI*

lemma $A \longleftrightarrow B$

Uvodjenje negacije: *notI*

lemma $\neg A$

Eliminacija konjukcije. *conjE*

lemma $A \wedge B \Longrightarrow C$

Eliminacija disjunkcije. *disjE*

lemma $A \vee B \Longrightarrow C$

Eliminacija implikacije. *impE*

lemma $A \longrightarrow B \Longrightarrow C$

Eliminacija ekvivalencije. *iffE*

lemma $A \longleftrightarrow B \Longrightarrow C$

Eliminacija negacije. *notE*

lemma $\neg A \Longrightarrow B$

Zadatak 2 *Dokazi u prirodnoj dedukciji*

Pokazati da su sledeće formule tautologija u iskaznoj logici. Dozvoljeno je korišćenje samo intuicionističkih pravila prirodne dedukcije.

lemma $A \wedge B \longrightarrow B \wedge A$

lemma $A \vee B \longrightarrow B \vee A$

lemma $A \wedge B \longrightarrow A \vee B$

lemma $(A \wedge B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$

lemma $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$

lemma $\neg (A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B$

lemma $\neg A \wedge \neg B \longrightarrow \neg (A \vee B)$

lemma $\neg (A \longleftrightarrow \neg A)$

Dodatni primeri:

lemma $(Q \longrightarrow R) \wedge (R \longrightarrow P \wedge Q) \wedge (P \longrightarrow Q \vee R) \longrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$

lemma $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow Q \wedge R)$

lemma $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q \longrightarrow \neg P$

lemma $(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow (Q \longrightarrow (P \longrightarrow R))$

lemma $\neg (P \wedge \neg P)$

lemma $A \wedge (B \vee C) \longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

lemma $\neg (A \wedge B) \longrightarrow (A \longrightarrow \neg B)$

lemma $(A \longrightarrow C) \wedge (B \longrightarrow \neg C) \longrightarrow \neg (A \wedge B)$

lemma $(A \wedge B) \longrightarrow ((A \longrightarrow C) \longrightarrow \neg (B \longrightarrow \neg C))$

lemma $(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow (\neg A \longleftrightarrow \neg B)$

lemma $A \longrightarrow \neg \neg A$

lemma $\neg (A \longleftrightarrow \neg A)$

lemma $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$

lemma $\neg A \vee B \longrightarrow (A \longrightarrow B)$

Zadatak 3 *Intuicionistička pravila prirodne dedukcije u logici prvog reda*

Diskutovati o pravilima uvođenja i pravilima eliminacije prirodne dedukcije u logici prvog reda. Pomoću ključne reči *thm* ispitati svako pravilo prirodne dedukcije. Primeniti odgovarajuće pravilo prirodne dedukcije na jednostavnim formulama i diskutovati o cilju koga treba dokazati pre i posle primene tog pravila.

Za logiku prvog reda pored pravila prirodne dedukcije iskazne logike, važe i pravila uvođenja i elimenacije kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora: *allI*

lemma $\forall\ x.\ P\ x$

Eliminacija univerzalnog kvantifikatora: *allE*

lemma $\forall\ x.\ P\ x \Longrightarrow A$

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora: *exI*

lemma $\exists\ x.\ P\ x$

Eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora: *exE*

lemma $\exists\ x.\ P\ x \Longrightarrow A$

Zadatak 4 *Dokazi u prirodnoj dedukciji*

Pokazati da su sledeće formule valjane u logici prvog reda. Dozvoljeno je korišćenje samo intuicionističkih pravila prirodne dedukcije.

lemma $(\forall\ x.\ Man\ x \longrightarrow Mortal\ x) \wedge Man\ Socrates \longrightarrow Mortal\ Socrates$

lemma *de-Morgan-1*: $(\exists\ x.\ \neg\ P\ x) \longrightarrow \neg\ (\forall\ x.\ P\ x)$

lemma *de-Morgan-2*: $(\forall\ x.\ \neg\ P\ x) \longrightarrow (\nexists\ x.\ P\ x)$

lemma *de-Morgan-3*: $(\nexists\ x.\ P\ x) \longrightarrow (\forall\ x.\ \neg\ P\ x)$

lemma $(\exists\ x.\ P\ x) \wedge (\forall\ x.\ P\ x \longrightarrow Q\ x) \longrightarrow (\exists\ x.\ Q\ x)$

Dodatni primeri:

lemma $(\forall\ m.\ Man\ m \longrightarrow Mortal\ m) \wedge$
$(\forall\ g.\ Greek\ g \longrightarrow Man\ g) \longrightarrow$
$(\forall\ a.\ Greek\ a \longrightarrow Mortal\ a)$

lemma $(\forall\ a.\ P\ a \longrightarrow Q\ a) \wedge (\forall\ b.\ P\ b) \longrightarrow (\forall\ x.\ Q\ x)$

lemma $(\exists\ x.\ A\ x \vee B\ x) \longrightarrow (\exists\ x.\ A\ x) \vee (\exists\ x.\ B\ x)$

lemma $(\forall\ x.\ A\ x \longrightarrow \neg\ B\ x) \longrightarrow (\nexists\ x.\ A\ x \wedge B\ x)$

Formulisati i dokazati naredna tvrđenja.

Ako za svaki broj koji nije paran važi da je neparan;
i ako za svaki neparan broj važi da nije paran;
pokazati da onda za svaki broj važi da nije istovremeno i paran i neparan.

Ako je svaki kvadrat romb;
i ako je svaki kvadrat pravougaonik;
i ako znamo da postoji makar jedan kvadrat;
onda postoji makar jedan romb koji je istovremeno i pravougaonik.

Ako je relacija R simetrična, tranzitivna
i ako za svako x postoji y koje je sa njim u relaciji,
onda je relacija R i refleksivna.

Savet: Pomoću ključne reči *definition* definisati osobinu refleksivnosti, tranzitivnosti i simetricnosti. Ta formulisati tvđenje i dokazati ga. Podsetiti se ključne reči *unfolding* za raspisivanje definicije.

Zadatak 5 *Klasična pravilo prirodne dedukcije: ccontr.*

Diskutovati zašto sledeće tvrđenje može biti dokazano samo intuicionističkim pravilima prirodne dedukcije, dok to ne važi za tvrđenje nakon njega. Primetiti razliku između pravila *notI* i *ccontr*.

lemma $\langle A \longrightarrow \neg\, \neg\, A \rangle$

lemma $\neg\, \neg\, A \longrightarrow A$

Dokazati sledeća tvrđenja:

lemma $(\neg\, P \longrightarrow P) \longrightarrow P$

lemma $\neg\, (A \wedge B) \longrightarrow \neg\, A \vee \neg\, B$

lemma $(\neg\, (\forall\ x.\ P\ x)) \longrightarrow (\exists\ x.\ \neg\, P\ x)$

Dodatni primeri:

lemma $(\neg\, B \longrightarrow \neg\, A) \longrightarrow (A \longrightarrow B)$

lemma $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg\, A \vee B)$

lemma $(\neg\, P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg\, Q \longrightarrow P)$

lemma $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow P) \longrightarrow P$

Zadatak 6 *Klasična pravilo prirodne dedukcije: classical.*

Pokazati naredna tvrđenja pomoću pravila *classical.* Zgodna alternativa ovog pravila je razdvajanje na slučajeve neke podformule.

thm *classical*

lemma $P \vee \neg P$

lemma $(A \longleftrightarrow (A \longleftrightarrow B)) \longrightarrow B$

Paradoks pijanca:
Postoji osoba za koju važi, ako je on pijanac onda su i svi ostali pijanci.

lemma *drinker's-paradox*: $\exists\ x.\ drunk\ x \longrightarrow (\forall\ x.\ drunk\ x)$