Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet
Katedra za računarstvo i informatiku

Šifra predmeta: R265
26.02.2024.

Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Vežbe 02

Zadatak 1 *Zapisivanje logičkih formula (nastavak)*

(a) Zapisati sledeće rečenice u logici prvog reda i dokazati njihovu ispravnost.

(a.1) Ako "šta leti to ima krila i lagano je" i "šta pliva, to nema krila", onda "šta pliva, to ne leti"

lemma
$(\forall\ x.\ Leti\ x \longrightarrow Krila\ x \wedge Lagano\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ Pliva\ x \longrightarrow \neg\ Krila\ x) \longrightarrow$
$(\forall\ x.\ Pliva\ x \longrightarrow \neg\ Leti\ x)$
by *auto*

(a.2) Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

lemma
$(\exists\ cipela.\ \forall\ trenutak.\ \forall\ noga.\ Odgovara\ cipela\ trenutak\ noga) \longrightarrow$
$(\forall\ noga.\ \exists\ cipela.\ \exists\ trenutak.\ Odgovara\ cipela\ trenutak\ noga) \wedge$
$(\forall\ noga.\ \exists\ trenutak.\ \exists\ cipela.\ Odgovara\ cipela\ trenutak\ noga)$
by *auto*

(b) Pokazati da je rečenica P logička posledica rečenica P1, P2, P3.

(b.1)

P: Andrija voli da pleše.

P1: Svako ko je srećan voli da peva.

P2: Svako ko voli da peva, voli da pleše.

P3: Andrija je srećan.

lemma
$(\forall\ x.\ Srecan\ x \longrightarrow Peva\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ Peva\ x \longrightarrow Plese\ x) \wedge$
$Srecan\ Andrija \longrightarrow$
$Plese\ Andrija$
by *auto*

(b.2)

P: Svako dete voli da se igra.

P1: Svaki dečak voli da se igra.

P2: Svaka devojčica voli da se igra.

P3: Dete je dečak ili je devojčica.

lemma
$(\forall\ x.\ \mathit{Decak}\ x \longrightarrow \mathit{Igra}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Devojcica}\ x \longrightarrow \mathit{Igra}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Dete}\ x \longrightarrow \mathit{Decak}\ x \vee \mathit{Devojcica}\ x) \longrightarrow$
$(\forall\ x.\ \mathit{Dete}\ x \longrightarrow \mathit{Igra}\ x)$
by *auto*

(c) Na jeziku logike prvog reda zapisati sledeće rečenice i dokazati da su skupa nezadovoljive.

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.

- Roditelj je stariji od deteta.

- Postoje braća.

- Nijedna osoba nije starija od druge.

lemma
$(\forall\ x.\ \forall\ y.\ \exists\ z.\ \mathit{Brat}\ x\ y \longrightarrow \mathit{Roditelj}\ x\ z \wedge \mathit{Roditelj}\ y\ z) \wedge$
$(\forall\ x.\ \forall\ y.\ \mathit{Roditelj}\ x\ y \longrightarrow \mathit{Stariji}\ y\ x) \wedge$
$(\exists\ x.\ \exists\ y.\ \mathit{Brat}\ x\ y) \wedge$
$(\neg\ (\exists\ x.\ \exists\ y.\ \mathit{Stariji}\ x\ y)) \longrightarrow$
False
by *auto*

Zadatak 2 *Silogizmi*

Barbara (AAA-1)

All men are mortal. (MaP)

All Greeks are men. (SaM)

— All Greeks are mortal. (SaP)

lemma *Barbara*:
$(\forall\ x.\ \mathit{Man}\ x \longrightarrow \mathit{Mortal}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Greek}\ x \longrightarrow \mathit{Man}\ x) \longrightarrow$
$(\forall\ x.\ \mathit{Greek}\ x \longrightarrow \mathit{Mortal}\ x)$
by *auto*

Celarent (EAE-1)

Similar: Cesare (EAE-2)

No reptiles have fur. (MeP)

All snakes are reptiles. (SaM)

— No snakes have fur. (SeP)

lemma *Celarent*:
$(\nexists\ x.\ \mathit{Reptile}\ x \wedge \mathit{Fur}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Snake}\ x \longrightarrow \mathit{Reptile}\ x) \longrightarrow$
$(\nexists\ x.\ \mathit{Snake}\ x \wedge \mathit{Fur}\ x)$
by *auto*

Ferioque (EIO-1)

No homework is fun. (MeP)

Some reading is homework. (SiM)

— Some reading is not fun. (SoP)

lemma *Ferioque*:
$(\nexists\ x.\ \mathit{Homework}\ x \wedge \mathit{Fun}\ x) \wedge$
$(\exists\ x.\ \mathit{Reading}\ x \wedge \mathit{Homework}\ x) \longrightarrow$
$(\exists\ x.\ \mathit{Reading}\ x \wedge \neg\ \mathit{Fun}\ x)$
by *auto*

Bocardo (OAO-3)

Some cats are not pets. (MoP)

All cats are mammals. (MaS)

— Some mammals are not pets. (SoP)

lemma *Bocardo*:
$(\exists\ x.\ \mathit{Cat}\ x \wedge \neg \mathit{Pet}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Cat}\ x \longrightarrow \mathit{Mammal}\ x) \longrightarrow$
$(\exists\ x.\ \mathit{Mammal}\ x \wedge \neg \mathit{Pet}\ x)$
by *auto*

Barbari (AAI-1)

All men are mortal. (MaP)

All Greeks are men. (SaM)

— Some Greeks are mortal. (SiP)

lemma *Barbari*:
$(\forall\ x.\ \mathit{Man}\ x \longrightarrow \mathit{Mortal}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Greek}\ x \longrightarrow \mathit{Man}\ x) \wedge$
$(\exists\ x.\ \mathit{Greek}\ x) \longrightarrow$
$(\exists\ x.\ \mathit{Greek}\ x \wedge \mathit{Mortal}\ x)$
by *auto*

Celaront (EAO-1)

No reptiles have fur. (MeP)

All snakes are reptiles. (SaM)

— Some snakes have no fur. (SoP)

lemma *Celaront*:
$(\nexists\ x.\ \mathit{Reptile}\ x \wedge \mathit{Fur}\ x) \wedge$
$(\forall\ x.\ \mathit{Snake}\ x \longrightarrow \mathit{Reptile}\ x) \wedge$
$(\exists\ x.\ \mathit{Snake}\ x) \longrightarrow$
$(\exists\ x.\ \mathit{Snake}\ x \wedge \neg \mathit{Fur}\ x)$
by *auto*

Camestros (AEO-2)

All horses have hooves. (PaM)

No humans have hooves. (SeM)

— Some humans are not horses. (SoP)

lemma *Camestros*:
  $(\forall\ x.\ Horse\ x \longrightarrow Hooves\ x) \wedge$
  $(\nexists\ x.\ Human\ x \wedge Hooves\ x) \wedge$
  $(\exists\ x.\ Human\ x) \longrightarrow$
  $(\exists\ x.\ Human\ x \wedge \neg Horse\ x)$
 by *auto*

Felapton (EAO-3)

No flowers are animals. (MeP)

All flowers are plants. (MaS)

— Some plants are not animals. (SoP)

lemma *Felapton*:
  $(\nexists\ x.\ Flower\ x \wedge Animal\ x) \wedge$
  $(\forall\ x.\ Flower\ x \longrightarrow Plant\ x) \wedge$
  $(\exists\ x.\ Flower\ x) \longrightarrow$
  $(\exists\ x.\ Plant\ x \wedge \neg\ Animal\ x)$
 by *auto*

Zadatak 3 *Raymond M. Smullyan: Logical Labyrinths*

Edgar Aberkrombi je bio antropolog koji se interesovao za logiku i socijologiju laganja i govorenja istine. Jednog dana je odlučio da poseti ostrvo vitezova i podanika. Stanovnike ovog ostrva delimo na one koji uvek govore istinu *vitezove* i one koji uvek govore laži *podanike*. Dodatno, na ostrvu žive samo vitezovi i podanici. Aberkrombi susreće stanovnike i želi da prepozna ko je od njih vitez, a ko je podatnik.

1. Svaka osoba će odgovoriti potvrdno na pitanje: Da li si ti vitez?

lemma *no-one-admit-knaves*:
 assumes $k \longleftrightarrow (k \longleftrightarrow ansK)$
 shows $ansK$
 using *assms*
 by *auto*

1.1 Aberkombi je razgovarao sa tri stanovnika ostrva, označimo ih sa A, B i C. Pitao je stanovnika A: "Da li si ti vitez ili podanik?" A je odgovorio ali nerazgovetno pa je Aberkombi pitao stanovnika B: "Šta je A rekao?" B je odgovorio: "Rekao je da je on podanik." Tada se uključila i osoba C i rekla: "Ne veruj mu, on laže!" Da li je osoba C vitez ili podanik?

lemma *Smullyan-1-1*:
 assumes $kA \longleftrightarrow (kA \longleftrightarrow ansA)$
   and $kB \longleftrightarrow \neg\ ansA$
   and $kC \longleftrightarrow \neg\ kB$
  shows kC
 using *assms*
 by *auto*

1.2 Aberkombi je pitao stanovnika A koliko među njima trojicom ima podanika. A je opet odgovorio nerazgovetno, tako da je Aberkombi pitao stanovnika B šta je A rekao. B je rekao da je A rekao da su tačno dvojica podanici. Ponovo je stanovnik C tvrdio da B laže. Da li je u ovoj situaciji moguće odrediti da li je C vitez ili podanik?

definition *exactly-two* :: $bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool \Rightarrow bool$ **where**

$exactly\text{-}two\ x\ y\ z \longleftrightarrow ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)) \wedge \neg (x \wedge y \wedge z)$

lemma *Smullyan-1-2*:
assumes $kA \longleftrightarrow ansA$
and $kB \longleftrightarrow (exactly\text{-}two\ (\neg\ kA)\ (\neg\ kB)\ (\neg\ kC) \longleftrightarrow ansA)$
and $kC \longleftrightarrow \neg\ kB$
shows kC
using *assms*
unfolding *exactly-two-def*
by *auto*

1.3 Da li se zaključak prethodnog tvrđenja menja ako B promeni svoj odgovor i kaže da je A rekao da su tačno dva od njih vitezovi?

lemma *Smullyan-1-3*:
assumes $kA \longleftrightarrow ansA$
and $kB \longleftrightarrow (exactly\text{-}two\ kA\ kB\ kC \longleftrightarrow ansA)$
and $kC \longleftrightarrow \neg\ kB$
shows $\neg\ kC$
using *assms*
unfolding *exactly-two-def*
by *auto*