Прилог теорији псеудо-Римановых Осермановых многострукости

магистарски рад

Владица Андрејић

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
2006.

Садржај

Апстракт

Прилог теорији псеудо-Римановиx Осермановиx многострукости

Основни објекат који посматрамо у овом раду је псеудо-Риманова Осерманова многострукост. Како такве многострукости испуњавају k-штајн услов у тачки изводимо формуле које морају бити испуњене. Централна тема рада је генерализација дефиниције принципа дуалности на псеудо-Риманов случај. На основу те генерализације долазимо до оригиналних резултата испитујући под којим условима ће важити принцип дуалности. Од раније је било познато да прицип дуалности важи за Риманове многострукости, али сада дајемо уопштење по којем принцип дуалности важи уколико не постоји изотропан сопствени вектор Јакобијевог оператора. Крајњи резултат рада је да принцип дуалности мора важити за произвољну четвородимензиону Осерманову многострукост, тако да се евентуални контрапримери морају тражити у већим димензијама.

Предговор

Појам кривине основни је концепт диференцијалне геометрије, док је централни проблем повезати својства тензора кривине са геометријом одговарајуће многострукости. Једно од веома важних питања је шта се може рећи о метрици уколико су познате секционе кривине многострукости. Најпростији случај је када су све секционе кривине једнаке, што генерише простор константне секционе кривине и тада је метрика у потпуности одређена. Наредни случај по једноставности је када Јакобијев оператор K_X има константан карактеристични полином, независан од тачке многострукости и јединичног временског или просторног вектора X. Такве многострукости називају се Осерманове многострукости, а читав овај рад бави се изучавањем својстава таквих многострукости.

Један од отворених проблема у овој области свакако је Осерманова хипотеза. Мора ли Осерманова многострукост бити равна или локално симетричан простор ранга један? Приликом решавања појединих случајева ове тешке хипотезе природно се појавила импликација

$$K_X(Y) = \lambda Y \Rightarrow K_Y(X) = \lambda X$$

која, уколико важи, у знатној мери олакшава рачун. На основу те импликације Ракић је дефинисао принцип дуалности, а затим и доказао да он важи у случају Риманових многострукости. Та теорема у великој мери је допринела да Николајевски начини највећи пробој у решавању Осерманове хипотезе и докаже њену валидност за Риманове многострукости димензија $n \neq 16$. Касније је постало популарно решавати варијанту Осерманове хипотезе у псеудо-Римановом случају, али данас је ту јако мало ствари урађено. Имајући идеју да ће принцип дуалности бити веома корисно оруђе у решавању хипотезе у псеудо-Римановом случају, ја сам уопштио принцип дуалности. Како је показано да се за недијагонализабилне псеудо-Риманове Осерманове многострукости могу конструисати разни контрапримери хипотезе, то сам често претпостављао услов дијагонализабилне многострукости. Са тим условом доказао сам неколико нових резултата, као на пример да принцип дуалности важи уколико не постоји изотропан сопствени вектор Јакобијевог оператора. Централна теорема је да принцип дуалности важи за сваку четвородимензиону многострукост, што заправо значи да се евентуални контрапример за принцип дуалности мора тражити у димензијама $n \geq 5$. Овако постављен уопштени принцип дуалности може се посматрати као засебан проблем, а искрено се да надам да ће овај рад помоћи у бољем разумевању псеудо-Римановиx Осермановиx многострукости као и саме Осерманове хипотезе.

Овај рад посвећен је прерано отишлом проф. Др Новици Блажићу.

Београд, октобар 2006.
Владица Андрејић

Глава 1

Осерманове многострукости

У овој глави уводимо основну нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз читав рад. Основни објекат са којим радимо је псеудо-Риманова[1] многострукост. У секцији 1.1 дефинишемо просторне, временске и изотропне тангентне векторе, а затим уводимо Леви-Чивита[2] повезаност. У секцији 1.2 дефинишемо оператор и тензор кривине са лепим особинама као што су: коса симетрија, симетрија по паровима и Бјанкијев[3] идентитет, а затим дефинишемо и Ричијев[4] тензор. Секцију завршавамо дефиницијом Јакобијевог[5] и рестрикованог Јакобијевог оператора. Секција 1.3 доноси временске и просторне Осерманове[6] услове у тачки. Након основних примера Осермановних оператора кривине дајемо дефиниције тачка по тачка Осерманове и глобално Осерманове многострукости. У секцији 1.4 представљамо концепте Жордан[7]-Осерманове многострукости. Као најједноставнији случај Жордан-Осермановних многострукости јављају се дијагонализабилне многострукости, што ће нам бити јако чест услов у резултатима наредних глава. Главу завршавамо секцијом 1.5 у којој по узору на рад Гарсија-Рио[8], Купели[9], Васкез-Лоренцо[10] вршимо конструкцију Осерманове многострукости сигнатуре (2,2). Полази се од специфичне Вокерове[11] метрике сигнатуре (2,2) на $\mathbb{R}^4$ из које се даље рачунају Кристофелови[12] симболи који одређују Леви-Чивита повезаност, а самим тим и Јакобијев оператор. Овај пример уједно показује

[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)
[2]Tullio Levi-Civita (1873–1941)
[3]Luigi Bianchi (1856–1928)
[4]Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925)
[5]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)
[6]Robert Osserman (?)
[7]Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)
[8]Eduardo García-Río (?)
[9]Demir Nuri Kupeli (?)
[10]Ramón Vázquez-Lorenzo (?)
[11]Arthur Geoffrey Walker (1909–2001)
[12]Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

да постоје Осермановe многострукости које нису Жордан-Осермановe.

1.1 Основни појмови

Нека је M Хаусдорфов простор, односно тополошки простор у којем се сваке две различите тачке могу раздвојити дисјунктним отвореним околинама. Отворена карта на M је пар (U, φ), где је U отворен подскуп од M, а φ хомоморфизам са U на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Диференцијабилна структура на M димензије n је фамилија отворених карти $(U_k, \varphi_k)_{k\in\Lambda}$ на M, где је $\varphi_k(U_k)$ отворени подскуп од $\mathbb{R}^n$ тако да су испуњене аксиоме:

(1) $M = \bigcup_{k\in\Lambda} U_k$

(2) За сваки пар индекса $i, j \in \Lambda$ пресликавање $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ је диференцијабилно пресликавање са $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

(3) Фамилија $(U_k, \varphi_k)_{k\in\Lambda}$ је максимална фамилија отворених карата за које (1) и (2) важе.

Дефиниција 1.1 *Диференцијабилна многострукост димензије n је Хаусдорфов простор са диференцијабилном структуром димензије n.*

Започнимо причу са диференцијабилном многострукости M димензије n. Са $\mathcal{F}(M)$ означимо скуп свих глатких реалних пресликавања на M

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ је диференцијабилна}\}.$$

За $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$ пресликавања $\alpha f + \beta h$ и fh се природно дефинишу путем

$$(\alpha f + \beta h)(p) = \alpha f(p) + \beta h(p) \quad \text{и} \quad (fh)(p) = f(p)h(p)$$

за $p \in M$. Лако је видети да је у односу на претходно дефинисане операције $\mathcal{F}(M)$ комутативан прстен (са јединицом), као и алгебра над реалним бројевима $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.2 *Тангентни простор T_pM многострукости M у тачки $p \in M$ је скуп свих пресликавања $X : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ таквих да је*

$$X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h) \quad и \quad X(fh) = f(p)X(h) + h(p)X(f)$$

за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$.

По својој природи диференцијабилне многострукости су закривљени простори и као такви могу бити веома компликовани за изучавање. Насупрот томе векторски простори су много простији и пружају мноштво погодности. Приметимо да је по претходној дефиницији T_pM векторски простор и може се схватити као најбоља линеарна апроксимација многострукости M у тачки $p \in M$. Управо то је разлог што смо склонији да користимо тангентни простор уместо оригиналне многострукости. Унија свих тангентних простора многострукости M назива се тангентно раслојење. Оно се обележава са $T(M)$ и поседује на природан начин засновану структуру многострукости.

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Дефиниција 1.3 *Векторско поље на диференцијабилној многострукости M је диференцијабилно пресликавање $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ које задовољава*

$$X(\alpha f + \beta h) = \alpha Xf + \beta Xh \quad и \quad X(fh) = fXh + hXf \tag{1.1}$$

за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$. Скуп свих векторских поља на многострукости M обележавамо са $\mathcal{X}(M)$.

Векторско поље на многострукости M може се интуитивно схватити као глатко пресликавање $X : M \to T(M)$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X_p \in T_pM$. Веза између претходних концепата дата је формулом $(Xf)(p) = X_p(f)$ која важи за $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ и $p \in M$. На скупу $\mathcal{X}(M)$ природно уводимо основне операције на следећи начин. За $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $f, h \in \mathcal{F}(M)$ и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ дефинишемо:

$$\begin{gathered}
\alpha X + \beta Y \text{ са } (\alpha X + \beta Y)(f) = \alpha(Xf) + \beta(Yf); \\
fX \text{ са } (fX)(h) = fX(h); \\
XY \text{ са } XY(f) = X(Yf); \\
[X, Y] \text{ са } [X, Y] = XY - YX.
\end{gathered}$$

Захваљујући формули (1.1) лако видимо да је $\mathcal{X}(M)$ модул над $\mathcal{F}(M)$.

Време је да на тангентном простору уведемо метрику и тако креирамо псеудо-Риманову многострукост, основни објекат са којим радимо.

Дефиниција 1.4 *Псеудо-Риманова метрика на диференцијабилној многострукости M је пресликавање $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ које сваком $p \in M$ додељује недегенерисану симетричну билинеарну форму $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, а при томе не мења сигнатуру.*

Недегенерисаност симетричне билинеарне форме g_p заправо значи

$$(g_p(X, Y) = 0 \text{ за свако } Y \in T_pM) \Rightarrow (X = 0).$$

Из теореме линеарне алгебре знамо да се симетрична билинеарна форма g_p на n-димензионом векторском простору T_pM над $\mathbb{R}$ може дијагонализовати, односно да постоји база $(E_1, ..., E_n)$ за T_pM таква да је $g_p(E_i, E_j) = 0$ за $i \neq j$. Штавише, у случају да је

g_p недегенерисана, база $(E_1, ..., E_n)$ може бити изабрана тако да важи и $g_p(E_i, E_i) = \pm 1$. За такву базу кажемо да је псеудоортонормирана, а ако са s означимо број знакова $-$, биће $n - s$ знакова $+$, а број s неће зависити од избора базе. Тада кажемо да је метрика сигнатуре $(s, n - s)$.

Дефиниција 1.5 *Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је диференцијабилна многострукост M опремљена псеудо-Римановом метриком g.*

Сигнатура метрике је заправо и сигнатура псеудо-Риманове многострукости. Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост димензије n, односно сигнатуре $(s, n - s)$. Како је тангентни простор T_pM рестрикција скупа $\mathcal{X}(M)$ у тачки p, то ћемо их поистоветити уколико је тачка p добро позната. Самим тим у даљем тексту ћемо векторска поља и тангентне векторе обележавати истим словима. Слично, ради краћег записа, псеудо-Риманову метрику g_p у тачки p облежаваћемо кратко са g кад нема бојазни од забуне.

Важну улогу у псеудо-Римановој геометрији има норма вектора, за коју уводимо скраћену ознаку

$$\varepsilon_X = g(X, X).$$

У зависности од знака норме све ненула тангентне векторе многострукости M можемо поделити у три типа.

Дефиниција 1.6 *Тангентни ненула вектор $X \in T_pM$ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је:*

1) просторан ако је $\varepsilon_X > 0$;

2) временски ако је $\varepsilon_X < 0$;

3) изотропан ако је $\varepsilon_X = 0$;

4) дефинитан ако је $\varepsilon_X \neq 0$;

5) јединичан ако је $|\varepsilon_X| = 1$.

Уводимо и посебне ознаке $S_p^+(M)$, $S_p^-(M)$ и $S_p(M)$ за скупове јединичних просторних, јединичних временских, односно јединичних вектора.

$$\begin{aligned} S_p^+(M) =& \{X \in T_pM \mid \varepsilon_X = 1\} \\ S_p^-(M) =& \{X \in T_pM \mid \varepsilon_X = -1\} \\ S_p(M) =& \{X \in T_pM \mid |\varepsilon_X| = 1\} = S_p^+(M) \cup S_p^-(M) \end{aligned}$$

Када ове скупове сумирамо по свим тачкама многострукости добијамо одговарајућа јединична раслојења

$$S^+(M) = \bigcup_{p\in M} S_p^+(M) = \{X \in T(M) \mid g(X,X) = 1\},$$
$$S^-(M) = \bigcup_{p\in M} S_p^-(M) = \{X \in T(M) \mid g(X,X) = -1\},$$
$$S(M) = \bigcup_{p\in M} S_p(M) = S^+(M) \cup S^-(M).$$

Наредни појам који дефинишемо је афина повезаност на многострукости.

Дефиниција 1.7 *Афина повезаност на многострукости M је пресликавање $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ које сваком $X \in \mathcal{X}(M)$ додељује линеарни ендоморфизам ∇_X реалног векторског простора $\mathcal{X}(M)$ који задовољава:*

1) $\nabla_{fX+hY} = f\nabla_X + h\nabla_Y$,

2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$

за све $f, h \in \mathcal{F}(M)$ и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Леви-Чивита је наредном теоремом показао да у мноштву афиних повезаности псеудо-Риманове многострукости (M, g) једна има посебан значај.

Теорема 1.1 *На псеудо-Римановој многострукости (M, g) постоји јединствена афина повезаност која задовољава:*

1) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(без торзије)*

2) $\nabla_X g = 0$ *(g је паралелно тензорско поље)*

за свако $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Јединствена афина повезаност из претходне теореме назива се Леви-Чивита повезаност.

1.2 Јакобијев оператор

У претходној секцији остварили смо све предуслове за дефиницију Јакобијевог оператора. Пођимо од псеудо-Риманове многострукости (M, g). Она нам даје Леви-Чивита повезаност ∇, на основу које дефинишемо оператор кривине са

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]},$$

што заправо значи да је

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

за свако $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Тензор кривине дефинишемо са

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

и лако се може показати да он има следеће лепе особине:

$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$,

$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$,

$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$ (Бјанкијев идентитет)

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$.

За псеудо-Риманову многострукост (M,g) дефинишемо Ричијев тензор на следећи начин:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y).$$

Уколико је $(E_1,...,E_n)$ псеудоортонормирана база тангентног простора биће

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{1\leq p\leq n} \varepsilon_p R(E_p,X,Y,E_p)$$

где норму вектора E_p обележавамо кратко са $\varepsilon_p = g(E_p,E_p)$. Како је $R(E_p,X,Y,E_p) = R(E_p,Y,X,E_p)$ то је Ричијев тензор симетричан, односно важи $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Дефиниција 1.8 *Јакобијев оператор за $X \in T_pM$ је пресликавање $K_X : T_pM \to T_pM$ задато са*

$$K_X(Z) = R(Z,X)X.$$

Приметимо да из својства тензора кривине $g(K_X(Z),X) = R(Z,X,X,X) = 0$ имамо $K_X(Z)\perp X$, те је кодомен Јакобијевог оператора K_X заправо $X^\perp = \{Y \in T_pM \mid g(Y,X) = 0\}$. Уколико је $X \in S_p(M)$ јединичан то је $X^\perp$ недегенерисана хиперповрш тангентног простора T_pM, а како је $K_X(X) = R(X,X)X = 0$, то тада има смисла посматрати рестрикован Јакобијев оператор на $X^\perp$.

Дефиниција 1.9 *Рестрикован Јакобијев оператор за $X \in S_p(M)$ је пресликавање $K'_X : X^\perp \to X^\perp$ задато са*

$$K'_X(Z) = R(Z,X)X.$$

1.3 Осерманов услов

Нека је (M,g) n-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метриком g. Означимо са R оператор кривине, а са $K_X : Y \mapsto R(Y,X)X$ адекватан Јакобијев оператор.

Дефиниција 1.10 *Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост и $p \in M$. (M,g) је временски Осерманова у p ако је карактеристични полином од K_X независан од избора $X \in S_p^-(M)$. (M,g) је просторно Осерманова у p ако је карактеристични полином од K_X независан од избора $X \in S_p^+(M)$.*

Касније (теорема 2.1) ће се испоставити да су временски Осерманова и просторно Осерманова многострукост у тачки еквивалентни појмови, те такве многострукости зовемо Осермановe у тачки.

Дефиниција 1.11 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и $p \in M$. (M, g) је Осерманова у p ако је и временски и просторно Осерманова у p.*

Сада можемо погледати основне примере Осерманових оператора кривине, односно конструкција оператора кривине чији је карактеристичан полином Јакобијевог оператора константан.

Пример 1.1 Нека је (V, g) векторски простор са метриком g. Дефинишимо оператор кривине $R^0 : V \times V \times V \to V$ са

$$R^0(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

За јединичан $X \in S_p(M)$ ортогоналан на Y $(g(X,Y) = 0)$, рестрикован Јакобијев оператор постаје

$$K'_X(Y) = R(Y,X)X = g(X,X)Y - g(Y,X)X = \varepsilon_X Y.$$

Видимо да је $K'_X = \varepsilon_X \mathrm{Id}$ за свако јединично X. На временским, односно просторним јединичним X пресликавање K'_X је константно, те је такав и адекватан карактеристични полином.

Пример 1.2 Нека је (V, g) векторски простор са метриком g и $J : V \to V$ ермитска комплексна структура, односно важи $J^2 = -\mathrm{Id}$ и $g(JX, JY) = g(X,Y)$ за све $X, Y \in V$. Оператор кривине можемо дефинисати путем

$$R^J(X,Y)Z = g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ.$$

Овако конструисан R^J је Осерманов оператор кривине, јер како је $g(X, JX) = 0$ имамо за одговарајући Јакобијев оператор

$$K_X(Y) = R^J(Y,X)X = -3g(Y,JX)JX = \begin{cases} -3\varepsilon_X \mathrm{Id} & \text{на } < JX > \\ 0 & \text{на } < JX >^{\perp} \end{cases}.$$

Осерманов услов може се проширити на целокупну многострукост на два начина. На тај начин добијају се концепти тачка по тачка и глобално Осермановe многострукости.

Дефиниција 1.12 *Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је тачка по тачка Осерманова ако је (M, g) Осерманова у свакој тачки $p \in M$.*

Дефиниција 1.13 *Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је глобално Осерманова ако је карактеристичан полином K_X Јакобијевог оператора независан од избора $X \in S^-(M)$ или $X \in S^+(M)$.*

Кроз читав рад термин Осерманова многострукост подразумеваће глобално Осерманову многострукост, а наравно тада она мора бити и тачка по тачка Осерманова. Међутим постоје примери многострукости које су Осерманове тачка по тачка, али не и глобално [4]. Са друге стране може се показати да у случају n-димензионе многострукости за $n > 4$, тачка по тачка Осерманова многострукост чији рестриковани Јакобијев оператор има тачно две сопствене вредности мора бити и глобално Осерманова. То је за Риманов случај показано у [10], док је општи случај доказан у [8].

1.4 Жордан - Осерманове многострукости

Осерманов услов првобитно је био постављен у случају Риманових многострукости, односно у сигнатури $(0, n)$, од стране Осермана[15]. Дефинитност метрике у том случају омогућава дијагонализабилност Јакобијевог оператора, те се Осерманов услов може еквивалентно исказати као константност сопствених вредности рачунато са вишеструкостима. Међутим у псеудо-Римановом случају сопствена структура Јакобијевог оператора није у потпуности одређена карактеристичним полиномом, већ његовом Жордановом формом.

Дефиниција 1.14 *Жорданов блок димензије $k \times k$ који одговара реалној сопственој вредности $\lambda \in \mathbb{R}$ је матрица $\mathcal{J}(k, \lambda)$ дефинисана са*

$$\mathcal{J}(k,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

У случају комплексне сопствене вредности $\lambda = a + ib$, Жорданов блок димензије $2k \times 2k$ који одговара $\lambda \in \mathbb{C}$ је матрица дефинисана са

$$\mathcal{J}(k,a,b) = \begin{pmatrix} A & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

где су A и I_2 блокови димензије 2×2 дефинисани са

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Симетрични оператори су они оператори K за које важи $g(K(X), Y) = g(K(Y), X)$, што несумњиво важи за Јакобијев оператор јер $g(K_Z(X), Y) = R(X, Z, Z, Y) = g(K_Z(Y), X)$. У теорији симетричних оператора познато је да сопствену структуру одређује Жорданова форма, што се види из добро познате наредне теореме из линеарне алгебре[9].

Теорема 1.2 *За сваки симетричан оператор K на реалном векторском простору V постоји база за V у којој оператор K има блок дијагоналну матрицу састављену од Жордanових блокова описаних у (1.2) и (1.3). Неуређена колекција горе описаних Жордanових блокова назива се Жорданова форма оператора K.*

Даља уопштења Осермановог услова тичу се сопствене структуре Јакобијевог оператора, те тако долазимо до наредне дефиниције, најпре постављене у [2].

Дефиниција 1.15 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. (M, g) је Жордан-Осерманова у тачки $p \in M$ ако је Жорданова форма Јакобијевог оператора K_X независна од $X \in S_p(M)$. (M, g) је тачка по тачка Жордан-Осерманова ако је Жордан-Осерманова у свакој $p \in M$. (M, g) је глобално Жордан-Осерманова ако је Жорданова форма Јакобијевог оператора K_X независна од $X \in S(M)$.*

Као идеал у псеудо-Римановом случају јавља се Жорданова форма која за блокове има само матрице 1×1. Такве многострукости називамо дијагонализабилним.

Дефиниција 1.16 *За псеудо-Риманову Осерманову многуструкост кажемо да је дијагонализабилна уколико за свако $X \in S_p(M)$ постоји псеудоортонормирана база тангентног простора T_pM у којој Јакобијев оператор K_X има дијагоналну матрицу.*

Велики број резултата у наредним главама дајемо уз претпоставку дијагонализабилности. То је на неки начин и природно јер такве многострукости су најблискије матичном Римановом случају.

1.5 Примери Осермanових многострукости

Један од начина да се конструише Осерманова многострукост је да се пође од псеудо-Риманове метрике. Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Лоренцо[8] су кренули од фамилије Вокерових метрика на $\mathbb{R}^4$ датих са:

$$g = \begin{pmatrix} x_3 f_1 & a & 1 & 0 \\ a & x_4 f_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

при чему су $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ глатке реалне функције које зависе само од x_1 и x_2, док је $a \in \mathbb{R}$ реалан број. Вокерова метрика[19] је јако погодна за рад јер не мења сигнатуру, односно наша горедефинисана метрика има сигнатуру $(2, 2)$. Да би дошли до Леви-Чивита повезаности морамо најпре срачунати Кристофелове симболе. Они се лако рачунају из метрике по наредној формули[11]

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right), \tag{1.5}$$

где су g_{ij} елементи матрице g задате у (1.4), а g^{ij} елементи њој инверзне матрице

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_3 f_1 & -a \\ 0 & 1 & -a & -x_4 f_2 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Конкретан рачун даје нам све Кристофелове симболе различите од нуле:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2} f_1, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_3 f_1^2, \\
\Gamma_{11}^4 &= -\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{a}{2} f_1, & \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\
\Gamma_{12}^4 &= \Gamma_{21}^4 = \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{2} f_2, \\
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{a}{2} f_2, & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_4 f_2^2, \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} f_1, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} f_2.
\end{aligned}$$

Означимо са $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ за $i = 1, 2, 3, 4$ базне векторе тангентног простора. Кристофелови симболи су заправо коефицијенти у развоју повезаности, односно важи

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Одавде можемо изразити све ненула координатне коваријантне изводе:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} E_1 &= -\frac{1}{2} f_1 E_1 + \left(\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_3 f_1^2\right) E_3 + \left(-\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{a}{2} f_1\right) E_4, \\
\nabla_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} E_3 + \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1} E_4, \\
\nabla_{E_1} E_3 &= \frac{1}{2} f_1 E_3, \\
\nabla_{E_2} E_2 &= -\frac{1}{2} f_2 E_2 + \left(-\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{a}{2} f_2\right) E_3 + \left(\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_4 f_2^2\right) E_4, \\
\nabla_{E_2} E_4 &= \frac{1}{2} f_2 E_4.
\end{aligned}$$

Коначно можемо да срачунамо ненула координатне операторе кривине:

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_1 =&\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_1-\frac{1}{2}x_3f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3+\\
&+\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}+(x_3f_2-2a)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+x_4f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-af_1f_2\right)E_4,\\
R(E_1,E_2)E_2 =&-\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_2+\frac{1}{2}x_4f_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4-\\
&-\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}+x_3f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+(x_4f_1-2a)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-af_1f_2\right)E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_3 =&-\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3, & R(E_1,E_2)E_4 =&\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4,\\
R(E_1,E_3)E_1 =&\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_4, & R(E_1,E_3)E_2 =&-\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3,\\
R(E_2,E_4)E_1 =&-\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4, & R(E_2,E_4)E_2 =&\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_3.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Матрицу Јакобијевог оператора за X можемо добити тако што X изразимо преко базних вектора $X=\sum_{i=1}^4\alpha_iE_i$. Није тешко видети да се из формула (1.7) добија блок матрица

$$K_X=\begin{pmatrix} A & 0\\ B & A^T\end{pmatrix}$$

где је

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & -\alpha_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ -\alpha_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \alpha_1\alpha_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\end{pmatrix}.$$

Иако можемо конкретно срачунати матрицу B (уз велики труд то је урађено у [8]), то нећемо чинити јер је јасно да карактеристичан полином за K_X не зависи од матрице B.

$$\omega_X=\det(\lambda I_4-K_X)=\det(\lambda I_2-A)\det(\lambda I_2-A^T)=(\det(\lambda I_2-A))^2$$

Како је

$$\det(\lambda I_2-A)=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)$$

можемо закључити да константан карактеристичан полином имамо само у случају

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0 \tag{1.8}$$

те ћемо све даље рачуне радити са том претпоставком. У том случају карактеристичан полином Јакобијевог оператора постаје $\omega_X=\lambda^4$, што доказује да је тако конструисана псеудо-Риманова многострукост $(\mathbb{R}^4,g)$ заправо глобално Осерманова.

Овај пример је уједно јако згодан за испитивање Жордан-Осермановог услова. Како су све нуле карактеристичног полинома једнаке то ће Жорданова форма зависити од минималног полинома за K_X. Поставимо ли услов

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \tag{1.9}$$

формуле (1.7) се редукују и координатни оператори кривине нису нула само за

$$R(E_1, E_2)E_1 = -af_1f_2E_4 \quad \text{и} \quad R(E_1, E_2)E_2 = -af_1f_2E_3$$

одакле је лако видети

$$K_X = af_1f_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad K_X^2 = 0.$$

Сада се уочава да је уз претпоставку (1.9) у тачкама за које је $af_1f_2 = 0$ минимални полином λ, док је у тачкама за које је $af_1f_2 \neq 0$ то λ^2. Овај резултат нам казује да постоје глобално Осерманове многострукости које нису Жордан-Осерманове. Наведимо још да се може показати ([8]) да уз претпоставку $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq 0$ минимални полином за K_X износи λ^3.

Глава 2

k-штајн многострукости

Ова глава посвећена је k-штајн многострукостима, многострукостима чијем је имену кумовала духовита досетка Карпентера[1], Греја[2] и Вилмора[3]. У секцији 2.1 дајемо дефиницију k-штајн многострукости преко константности трагова степенова Јакобијевог оператора на псеудосферама. Затим доказујемо еквивалентност k-штајнових и тачка по тачка Осермановиx многострукости. На крају секције доказујемо да све сопствене вредности Јакобијевог оператора за изотропан тангентни вектор Осерманове многострукости морају бити нуле. У секцији 2.2 показујемо да су Ајнштајнова[4] многострукост и 1-штајн заправо еквивалентни појмови, а затим дајемо карактеризацију Ајнштајнових многострукости преко координатних компоненти тензора кривине. У секцији 2.3 описане су формуле које важе под условом да је многострукост 2-штајн. Секција 2.4 решава питање Лоренцових[5] Осермановиx многострукости. Уз помоћ Шурове[6] леме доказујемо да Лоренцова 2-штајн многострукост мора бити константне секционе кривине, што је резултат који су најпре дали Блажић[7], Бокан[8] и Гилки[9]. Главу завршавамо секцијама 2.5 и 2.6 са претпоставкама да је многострукост дијагонализабилна и тачка по тачка Осерманова. Користећи особености Вандермондове[10] детерминанте, доказујемо веома важне формуле $\sum_{p\in\Lambda_a} Z_{pp} = 0$ и $\sum_{p,q\in\Lambda_a} Z_{pq}Z_{qp} = 0$. Читава ова глава даје припремне резултате за теореме које ћемо касније формулисати и доказати.

[1] P. Carpenter (?)
[2] Alfred Gray (1939–1998)
[3] Thomas James Willmore (1919)
[4] Albert Einstein (1879–1955)
[5] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)
[6] Friedrich Heinrich Schur (1856–1932)
[7] Novica Blažić (1959–2005)
[8] Neda Bokan (1947)
[9] Peter Belden Gilkey (1946)
[10] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

2.1 Дефиниција и еквиваленције

Дефиниција 2.1 *За псеудо-Риманову многострукост (M,g) кажемо да је k-штајн у тачки $p \in M$ уколико постоје константе C_t за $1 \leq t \leq k$ такве да једнакости*

$$\mathrm{Tr}(K_X^t) = (\varepsilon_X)^t C_t \tag{2.1}$$

важе за свако јединично $X \in S_p(M)$. Псеудо-Риманова многострукост (M,g) је k-штајн уколико је k-штајн у свакој тачки $p \in M$.

Погледајмо карактеристичан полином ω_X Јакобијевог оператора K_X.

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda I_n - K_X) = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} - ... - \sigma_{n-1}\lambda - \sigma_n.$$

Може се показати ([12]) да су његови коефицијенти $\sigma_1, ..., \sigma_n$ повезани са траговима степенова Јакобијевог оператора на следећи начин:

$$\sigma_1 = \mathrm{Tr}(K_X)$$

$$k\sigma_k = \mathrm{Tr}(K_X^k) - \sigma_1\mathrm{Tr}(K_X^{k-1}) - ... - \sigma_{k-1}\mathrm{Tr}(K_X), \text{ за } 2 \leq k \leq n. \tag{2.2}$$

Нека је (M,g) k-штајн многострукост у тачки $p \in M$. Тада за $X \in S_p(M)$ постоје константе C_t за које важи (2.1), што је константност трагова степенова Јакобијевог оператора на псеудосфери $S_p^-(M)$, односно $S_p^+(M)$. Везе из (2.2) нам дају константност и за коефицијенте $\sigma_1, ..., \sigma_n$ карактеристичног полинома ω_X. Самим тим карактеристичан полином Јакобијевог оператора је константан на псеудосферама $S_p^-(M)$ и $S_p^+(M)$, те је (M,g) и временски и просторно Осерманова многострукост у $p \in M$.

Запитајмо се да ли важи обрат. Нека је (M,g) временски Осерманова многострукост у тачки $p \in M$. Тада карактеристичан полином ω_X не зависи од избора временског $X \in S_p^-(M)$, што доводи до константности коефицијената $\sigma_1, ..., \sigma_n$, а због (2.2) и до константности трагова степенова Јакобијевих оператора. Самим тим постојаће константе C_k тако да важи $\mathrm{Tr}(K_X^k) = (\varepsilon_X)^k C_k$ за свако $X \in S_p^-(M)$. Покажимо да то мора важити и за $X \in S_p^+(M)$.

Поставимо произвољну псеудоортонормирану базу $(E_1, E_2, ..., E_n)$ тангентног простора T_pM. Нека је $1 \leq i \neq j \leq n$ и

$$X = \alpha E_i + \beta E_j. \tag{2.3}$$

Ако Јакобијев оператор K_X рачунамо по дефиницији добићемо

$$\begin{aligned} K_X(Z) &= R(Z, \alpha E_i + \beta E_j)(\alpha E_i + \beta E_j) \\ &= \alpha^2 R(Z,E_i)E_i + \alpha\beta R(Z,E_i)E_j + \beta\alpha R(Z,E_j)E_i + \beta^2 R(Z,E_j)E_j \\ &= \alpha^2 K_{E_i}(Z) + \alpha\beta\left(R(Z,E_i)E_j + R(Z,E_j)E_i\right) + \beta^2 K_{E_j}(Z). \end{aligned}$$

Ради лакшег записа и краћих ознака дефинишемо

$$K_i : Z \mapsto K_{E_i}(Z), \ \text{за } 1 \le i \le n$$
$$K_{ij} : Z \mapsto R(Z, E_i)E_j + R(Z, E_j)E_i, \ \text{за } 1 \le i, j \le n$$

што доводи до записа претходног рачуна путем

$$K_X = \alpha^2 K_i + \alpha\beta K_{ij} + \beta^2 K_j. \tag{2.4}$$

Норма вектора X је

$$\varepsilon_X = g(X, X) = g(\alpha E_i + \beta E_j, \alpha E_i + \beta E_j) = \alpha^2 \varepsilon_i + \beta^2 \varepsilon_j$$

одакле се добија

$$\alpha^2 = \varepsilon_X \varepsilon_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \beta^2. \tag{2.5}$$

Једначине (2.4) и (2.5) дају нам јако битну формулу

$$K_X = \varepsilon_X \varepsilon_i K_i + \alpha\beta K_{ij} + \beta^2 (K_j - \varepsilon_i \varepsilon_j K_i). \tag{2.6}$$

Основна идеја је посматрати развој оператора K_X^k, а затим његов траг. Како смо за свако $X \in S_p^-(M)$ имали $\mathrm{Tr}(K_X^k) = (\varepsilon_X)^k C_k$ то нам погодан избор α и β спрегнутих са (2.5) омогућава једнакост за слободан члан:

$$\mathrm{Tr}((\varepsilon_X \varepsilon_i K_i)^k) = (\varepsilon_X)^k C_k.$$

Како можемо бирати $\varepsilon_X = \varepsilon_j = -1$ и $\varepsilon_i = 1$ путем $\alpha^2 = \beta^2 - 1$ то за свако i имамо $\mathrm{Tr}(K_i^k) = (\varepsilon_i)^k C_k$. Произвољност псеудоортонормиране базе даје нам могућност да свако $X \in S_p^+(M)$ поставимо за координатни вектор, те $\mathrm{Tr}(K_X^k) = (\varepsilon_X)^k C_k$ важи и за свако $X \in S_p^+(M)$. Овим смо доказали да за свако k временски Осерманова многострукост у p мора бити k-штајн у p уколико постоји временски тангентни вектор. Сасвим слично можемо показати и да просторно Осерманова многострукост у p мора бити k-штајн у p, што комплетира следећу теорему коју је поставио Гилки[9].

Теорема 2.1 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост сигнатуре $(s, n-s)$ и $p \in M$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1) Ако је $s \ge 1$ онда је M временски Осерманова у p

2) Ако је $s \le n-1$ онда је M просторно Осерманова у p

3) M је k-штајн у p за свако k.

Ова теорема нам даје еквивалентност временске и просторне Осерманове многострукости у тачки. Самим тим (дефиниција 1.11) уколико је барем једна од ставки из теореме 2.1 испуњена за многострукост кажемо да је Осерманова у p. Такође, Осерманова многострукост мора бити k-штајн за свако k. Међутим ограничење на јединичне $X \in S_p(M)$ у дефиницији k-штајн многострукости (дефиниција 2.1) није неопходно, што видимо из наредне теореме која је заправо код Гилкија[9] дефиниција.

Теорема 2.2 *Псеудо-Риманова многострукост* (M, g) *димензије* $n \geq 3$ *је* k*-штајн у тачки* $p \in M$ *ако и само ако постоје константе* C_t *за* $1 \leq t \leq k$ *такве да* $\mathrm{Tr}(K_X^t) = (\varepsilon_X)^t C_t$ *важи за свако* $X \in T_pM$.

Доказ. Продужење ограничења са јединичних $X \in S_p(M)$ на дефинитне је очигледна, јер свако дефинитно X може се написати као $X = \alpha X_0$ за $X_0 \in S_p(M)$ и $\alpha \neq 0$.

$$\mathrm{Tr}(K_X^t) = \mathrm{Tr}(K_{\alpha X_0}^t) = \mathrm{Tr}(\alpha^2 K_{X_0})^t = \alpha^{2t}\mathrm{Tr}(K_{X_0}^t) = \alpha^{2t}(\varepsilon_{X_0})^t C_t = (\alpha^2 \varepsilon_{X_0})^t C_t = (\varepsilon_X)^t C_t$$

Преостаје нам случај изотропног X, те претпоставимо да је $\varepsilon_X = 0$. Како се X може написати као збир два дефинитна вектора и важи $n > 2$, то постоји дефинитан Y ортогоналан на X. Конструишимо фамилију тангентних вектора $\{Z_r \mid r > 0\}$ са

$$Z_r = \frac{1}{r}X + Y.$$

Z_r је дефинитан јер $\varepsilon_{Z_r} = g(\frac{1}{r}X + Y, \frac{1}{r}X + Y) = g(Y, Y) = \varepsilon_Y \neq 0$, те k-штајн услов доноси константе C_t такве да важи

$$\mathrm{Tr}(K_{Z_r}^t) = (\varepsilon_{Z_r})^t C_t.$$

Међутим имамо

$$\mathrm{Tr}(K_{X+rY}^t) = \mathrm{Tr}(K_{rZ_r}^t) = \mathrm{Tr}(r^2 K_{Z_r})^t = r^{2t}\mathrm{Tr}(K_{Z_r}^t) = r^{2t}(\varepsilon_{Z_r})^t C_t = r^{2t}(\varepsilon_Y)^t C_t$$

те кад пустимо да r опада ка нули добијамо

$$\mathrm{Tr}(K_X^t) = \lim_{r \searrow 0} \mathrm{Tr}(K_{X+rY}^t) = \lim_{r \searrow 0} \left(r^{2t}(\varepsilon_Y)^t C_t\right) = 0.$$

Одавде је $\mathrm{Tr}(K_X^t) = 0 = (\varepsilon_X)^t C_t$ за изотропан X што комплетира доказ. □

Теорема 2.2 има једну веома значајну последицу. Наиме како тачка по тачка Осерманова многострукост мора бити k-штајн за свако k, то за свако k и изотропно X важи $\mathrm{Tr}(K_X^t) = 0$. Формула (2.2) даје нам $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = 0$ за коефицијенте карактеристичног полинома, те је $\omega_X(\lambda) = \lambda^n$, што доказује наредну теорему наведену у [9].

Теорема 2.3 *Све сопствене вредности Јакобијевог оператора за изотропан тангентни вектор тачка по тачка Осерманове многострукости су нуле.*

2.2 Ајнштајнова многострукост

Наставимо идеју из претходне секције и задржимо ознаке. Увођење псеудоортонормиране базе $(E_1, ..., E_n)$ тангентног простора даје нам могућност да изразимо елементе матрица основних оператора K_i, K_{ij} и K_j преко координатних компоненти тензора кривине. Имамо

$$K_j(E_t) = R(E_t, E_j)E_j = \sum_p \varepsilon_p g(R(E_t, E_j)E_j, E_p)E_p$$

$$K_{ij}(E_t) = R(E_t, E_i)E_j + R(E_t, E_j)E_i = \sum_p \varepsilon_p g\left(R(E_t, E_i)E_j + R(E_t, E_j)E_i, E_p\right) E_p$$

што даје

$$K_j(E_t) = \sum_p \varepsilon_p R_{tjjp} E_p \quad \text{и} \quad K_{ij}(E_t) = \sum_p \varepsilon_p (R_{tijp} + R_{tjip}) E_p. \tag{2.7}$$

Да би избегли компликоване ознаке у даљем тексту фиксираћемо i и j при чему је $1 \leq i \neq j \leq n$. Једнакости (2.7) нам дефинишу елементе A_{pq}, B_{pq} и Z_{pq} као функције од i и j на следећи начин.

$$A_{pq} = [K_i]_{pq} = \varepsilon_p R_{qiip} \tag{2.8}$$

$$B_{pq} = [K_j]_{pq} = \varepsilon_p R_{qjjp} \tag{2.9}$$

$$Z_{pq} = [K_{ij}]_{pq} = \varepsilon_p (R_{qijp} + R_{qjip}). \tag{2.10}$$

Како је

$$[K_X^k]_{pq} = \sum_{p_2, p_3, \ldots, p_k} [K_X]_{pp_2} [K_X]_{p_2 p_3} \cdots [K_X]_{p_k q}$$

$$\mathrm{Tr}(K_X^k) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_k} [K_X]_{p_1 p_2} [K_X]_{p_2 p_3} \cdots [K_X]_{p_k p_1}$$

једнакост (2.6) $K_X = \varepsilon_X \varepsilon_i K_i + \alpha\beta K_{ij} + \beta^2 (K_j - \varepsilon_i \varepsilon_j K_i)$ доноси другачији запис константности за $\mathrm{Tr}(K_X^k)$ путем

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1} = p_1} \prod_{1 \leq l \leq k} \left(\varepsilon_X \varepsilon_i A_{p_l p_{l+1}} + \alpha\beta Z_{p_l p_{l+1}} + \beta^2 (B_{p_l p_{l+1}} - \varepsilon_i \varepsilon_j A_{p_l p_{l+1}})\right) = \varepsilon_X^k C_k. \tag{2.11}$$

Једначина (2.11) је основна у даљим разматрањима, а корисне информације можемо добити разликовањем појединачних случајева.

Дефиниција 2.2 *Ајнштајнова многострукост је псеудо-Риманова многострукост* (M, g) *за коју је* $\mathrm{Ric} = C \cdot g$*, за неку глобалну константу* C.

Покажимо да 1-штајн и Ајнштајн заправо представљају исте концепте. Уколико је (M, g) Ајнштајнова тада је за неку константу C

$$\varepsilon_X C = C \cdot g(X, X) = \mathrm{Ric}(X, X) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto R(Z, X)X) = \mathrm{Tr} K_X$$

и многострукост је 1-штајн. Обратно, нека је (M, g) 1-штајн, односно нека важи $\mathrm{Ric}(X, X) = \mathrm{Tr} K_X = \varepsilon_X C$ за свако $X \in S_p(M)$. Из симетричности и билинеарности Ричијевог тензора је

$$\mathrm{Ric}(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Ric}(X, X) + 2\alpha\beta \mathrm{Ric}(X, Y) + \beta^2 \mathrm{Ric}(Y, Y)$$

одакле за јединичне $\alpha X + \beta Y$, X и Y имамо

$$\varepsilon_{\alpha X + \beta Y} C = \alpha^2 \varepsilon_X C + 2\alpha\beta \mathrm{Ric}(X, Y) + \beta^2 \varepsilon_Y C.$$

Како је $\varepsilon_{\alpha X+\beta Y} = \alpha^2\varepsilon_X + 2\alpha\beta g(X,Y) + \beta^2\varepsilon_Y$, то нам за $\alpha, \beta \neq 0$ преостаје $\mathrm{Ric}(X,Y) = Cg(X,Y)$ и многострукост је Ајнштајнова, чиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 2.4 *Многострукост је Ајнштајнова ако и само ако је 1-штајн.*

Показали смо да је Ајнштајнова многострукост специјалан случај k-штајн многострукости за $k = 1$. У позадини термина k-штајн заправо лежи духовита досетка Карпентера, Греја и Вилмора [6] који су дали генерализацију базирану на Ајнштајновим многострукостима. Како име славног математичара и физичара Ајнштајна (Einstein) на немачком значи један камен (ein-stein) то су генерализације постале цвајштајн (zwei-stein, два камена), драјштајн (drei-stein, три камена) и тако даље. Једначина (2.11) за $k = 1$ даје

$$\sum_{1\leq p\leq n} \big(\varepsilon_X\varepsilon_i A_{pp} + \alpha\beta Z_{pp} + \beta^2(B_{pp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pp})\big) = \varepsilon_X C_1.$$

Погодном манипулацијом параметара можемо закључити да коефицијенти уз $\alpha\beta$ и β^2 морају бити нула, одакле добијамо две једначине:

$$\sum_{1\leq p\leq n} Z_{pp} = 0 \tag{2.12}$$

$$\sum_{1\leq p\leq n} (B_{pp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pp}) = 0. \tag{2.13}$$

Овим формулама Ајнштајнова многостукост је потпуно одређена.

Теорема 2.5 *Псеудо-Риманова многострукост је Ајнштајнова ако и само ако у псеудоортонормираној бази важе формуле*

$$\sum_{1\leq p\leq n} \varepsilon_i\varepsilon_p R_{piip} = \mathrm{const} = C_1 \tag{2.14}$$

$$\sum_{1\leq p\leq n} \varepsilon_p R_{pijp} = 0 \tag{2.15}$$

за свако $1 \leq i \neq j \leq n$.

Доказ. Формуле из теореме (2.14) и (2.15) су заправо формуле (2.12) и (2.13) јер

$$\sum_p Z_{pp} = \sum_p \varepsilon_p(R_{pijp} + R_{pjip}) = 2\sum_p \varepsilon_p R_{pijp}$$

$$\sum_p \varepsilon_i A_{pp} = \sum_p \varepsilon_j B_{pp} \;\Leftrightarrow\; \sum_p \varepsilon_i\varepsilon_p R_{piip} = \sum_p \varepsilon_i\varepsilon_p R_{pjjp}$$

те су оне наравно испуњене ако је многострукост Ајнштајнова. Покажимо да формуле (2.14) и (2.15) дају и довољан услов. Ако је $(E_1, ..., E_n)$ псеудоортонормирана база тангентног простора за неке $\alpha_p \in \mathbb{R}$ $(1 \leq p \leq n)$ биће

$$X = \sum_{1\leq p\leq n} \alpha_p E_p.$$

Изразимо ли Јакобијев оператор K_X преко основних оператора добијамо

$$K_X = K_{\sum \alpha_p E_p} = \sum_{1\le p\le n} \alpha_p^2 K_p + \sum_{1\le p<q\le n} \alpha_p\alpha_q K_{pq}. \tag{2.16}$$

Из формуле (2.7) изводимо трагове основних оператора

$$\mathrm{Tr}K_p = \sum_{1\le t\le n} \varepsilon_t R_{tppt} = \varepsilon_p C_1$$

$$\mathrm{Tr}K_{pq} = \sum_{1\le t\le n} \varepsilon_t (R_{tpqt} + R_{tqpt}) = 2\sum_{1\le t\le n} \varepsilon_t R_{tpqt} = 0$$

те заменом у (2.16)

$$\mathrm{Tr}K_X = \sum_{1\le p\le n} \alpha_p^2 \mathrm{Tr}K_p + \sum_{1\le p<q\le n} \alpha_p\alpha_q \mathrm{Tr}K_{pq} = \sum_{1\le p\le n} \alpha_p^2 \varepsilon_p C_1 = C_1\varepsilon_X$$

и многострукост је Ајнштајнова. □

2.3 2-штајн многострукост

Цвајштајн (2-штајн) многострукост представља специјалан случај k-штајн многострукости за $k = 2$. Једначина (2.11) нам за $k = 2$ даје

$$\sum_{1\le p,q\le n} \big(\varepsilon_X\varepsilon_i A_{pq} + \alpha\beta Z_{pq} + \beta^2(B_{pq} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pq})\big)\big(\varepsilon_X\varepsilon_i A_{qp} + \alpha\beta Z_{qp} + \beta^2(B_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{qp})\big) = \varepsilon_X^2 C_2.$$

Овога пута коефицијенти уз $\alpha\beta$, β^2, $\alpha\beta^3$ и β^4 морају бити нула, при чему се појављивање α^2 регулише по једначини (2.5) $\alpha^2 = \varepsilon_X\varepsilon_i - \varepsilon_i\varepsilon_j\beta^2$. Добијамо једначине:

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} (\varepsilon_X\varepsilon_i A_{pq} Z_{qp} + Z_{pq}\varepsilon_X\varepsilon_i A_{qp}) \qquad (\text{ уз } \alpha\beta)$$

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} (\varepsilon_X\varepsilon_i A_{pq}(B_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{qp}) + \varepsilon_X\varepsilon_i Z_{pq}Z_{qp} + (B_{pq} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pq})\varepsilon_X\varepsilon_i A_{qp}) \qquad (\text{уз } \beta^2)$$

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} (Z_{pq}(B_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{qp}) + (B_{pq} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pq})Z_{qp}) \qquad (\text{уз } \alpha\beta^3)$$

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} ((B_{pq} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{pq})(B_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A_{qp}) - \varepsilon_i\varepsilon_j Z_{pq}Z_{qp}) \qquad (\text{уз } \beta^4).$$

Рачун можемо упростити коришћењем симетрије $\sum_{1\le p,q\le n} = \sum_{1\le q,p\le n}$. На пример,

$$\sum_{1\le p,q\le n} (A_{pq}Z_{qp} + Z_{pq}A_{qp}) = \sum_{1\le p,q\le n} (A_{pq}Z_{qp}) + \sum_{1\le q,p\le n} (Z_{qp}A_{pq}) = 2\sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}Z_{qp}.$$

Сређивањем једначина добијамо:

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}Z_{qp}, \tag{2.17}$$

$$0 = 2\sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}B_{qp} - 2\varepsilon_i\varepsilon_j \sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}A_{qp} + \sum_{1\le p,q\le n} Z_{pq}Z_{qp}, \tag{2.18}$$

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} B_{pq}Z_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j \sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}Z_{qp}, \tag{2.19}$$

$$0 = \sum_{1\le p,q\le n} B_{pq}B_{qp} - 2\varepsilon_i\varepsilon_j \sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}B_{qp} + \sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}A_{qp} - \varepsilon_i\varepsilon_j \sum_{1\le p,q\le n} Z_{pq}Z_{qp}. \tag{2.20}$$

Помножимо ли (2.17) са $\varepsilon_i\varepsilon_j$ и додамо на (2.19), односно помножимо ли (2.18) са $\varepsilon_i\varepsilon_j$ и додамо на (2.20) добићемо једначине

$$\sum_{1\le p,q\le n} B_{pq}Z_{qp} = 0 \tag{2.21}$$

$$\sum_{1\le p,q\le n} A_{pq}A_{qp} = \sum_{1\le p,q\le n} B_{pq}B_{qp}. \tag{2.22}$$

Обједињавањем претходних формула добијамо следећу теорему.

Теорема 2.6 *За цвајштајн многострукост и произвољну псеудоортонормирану базу важе формуле*

$$\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq}^2 = \mathrm{const} = C_2 \tag{2.23}$$

$$\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq}R_{pijq} = 0 \tag{2.24}$$

$$2\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq}R_{pjjq} - 2\varepsilon_i\varepsilon_j C_2 + \sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q (R_{pijq} + R_{pjiq})^2 = 0 \tag{2.25}$$

за свако $1 \le i \ne j \le n$.

Доказ. У већ изведене формуле извршићемо замену по (2.8), (2.9) и (2.10). Тако из (2.22) као директну последицу добијамо (2.23). Обједињење (2.17) и (2.21) уз мало симетрије доноси нам формулу (2.24), док је (2.25) заправо формула (2.18). □

2.4 Лоренцове многострукости

У овој секцији претпоставићемо да је (M, g) Лоренцова многострукост, односно псеудо-Риманова многострукост сигнатуре $(1, n-1)$. Тај услов је веома рестриктиван, што се види из наредне теореме коју су доказали Блажић, Бокан и Гилки[3], као и Гилки[9].

Теорема 2.7 *Лоренцова 2-штајн многострукост мора бити константне секционе кривине.*

Доказ. Лоренцова многострукост је сигнатуре $(1, n-1)$ те у псеудоортонормираној бази $(E_1, ..., E_n)$ постоји само један временски вектор. Нека је то E_1, односно нека је $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n = 1$. Фиксирајмо $i = 1$ и $j > 1$, те преузмимо дефиниције (2.8), (2.9) и (2.10). Приметимо да важе симетрије

$$A_{qp} = \varepsilon_p \varepsilon_q A_{pq}, \ B_{qp} = \varepsilon_p \varepsilon_q B_{pq}, \ Z_{qp} = \varepsilon_p \varepsilon_q Z_{pq}. \tag{2.26}$$

Уз претпоставку да је многострукост 2-штајн из претходне секције знамо да важи (2.18)

$$2 \sum_{1 \le p,q \le n} A_{pq} B_{qp} - 2\varepsilon_i \varepsilon_j \sum_{1 \le p,q \le n} A_{pq} A_{qp} + \sum_{1 \le p,q \le n} Z_{pq} Z_{qp} = 0.$$

Ако заменимо $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_j = 1$, те искористимо (2.22) добићемо

$$\sum_{1 \le p,q \le n} (2A_{pq} B_{qp} + A_{pq} A_{qp} + B_{pq} B_{qp} + Z_{pq} Z_{qp}) = 0.$$

Заменимо ли $2A_{pq}B_{qp}$ са $(A_{pq}+B_{qp})^2 - A_{pq}^2 - B_{qp}^2$ и укључимо ли симетрије (2.26) добијамо

$$\sum_{1 \le p,q \le n} \left((A_{pq} + B_{qp})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1) A_{pq}^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1) B_{pq}^2 + \varepsilon_p \varepsilon_q Z_{pq}^2 \right) = 0.$$

Ради лакшег записа нека је

$$W_{pq} = (A_{pq} + B_{qp})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1) A_{pq}^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1) B_{pq}^2 + \varepsilon_p \varepsilon_q Z_{pq}^2. \tag{2.27}$$

Наша једначина сада постаје

$$\sum_{1 \le p,q \le n} W_{pq} = 0. \tag{2.28}$$

Приметимо да је $W_{pq} = W_{qp}$, као и да елементи W_{pq} имају посебан значај за индексе 1 и j. Наиме из дефиниција (2.8), (2.9) и (2.10) видимо да важи

$$A_{1q} = A_{q1} = 0, \ B_{jq} = B_{qj} = 0. \tag{2.29}$$

Слично томе имамо и

$$Z_{1q}^2 = (R_{q1j1} + R_{qj11})^2 = (-R_{q11j})^2 = A_{jq}^2, \quad Z_{jq}^2 = (R_{q1jj} + R_{qj1j})^2 = (-R_{qjj1}) = B_{1q}^2. \tag{2.30}$$

Коришћењем (2.29) у једначини (2.27), за свако $q > 1$ добијамо

$$W_{1q} = -B_{1q}^2 - Z_{1q}^2, \quad W_{jq} = A_{jq}^2 + Z_{jq}^2.$$

Примена (2.30) даје

$$W_{1q} + W_{jq} = -B_{1q}^2 - Z_{1q}^2 + A_{jq}^2 + Z_{jq}^2 = 0.$$

Посебним рачуном имамо

$$W_{11} = B_{11}^2,\ W_{1j} = W_{j1} = -Z_{1j}^2,\ W_{jj} = A_{jj}^2$$

те нам примена (2.30) даје

$$W_{11} + W_{1j} + W_{j1} + W_{jj} = B_{11}^2 - 2Z_{1j}^2 + A_{jj}^2 = 0.$$

Претходни рачуни омогућавају нам да из суме (2.28) искључимо 1 и j за вредности p и q. Самим тим преостаје нам

$$\sum_{p,q\notin\{1,j\}} W_{pq} = 0.$$

За $p, q \notin \{1, j\}$ је $\varepsilon_p = \varepsilon_q = 1$ одакле је W_{pq} сума квадрата реалних бројева

$$W_{pq} = (A_{pq} + B_{qp})^2 + Z_{pq}^2.$$

Сума квадрата је нула само ако су сви сабирци нула, одакле је за $p, q \notin \{1, j\}$

$$A_{pq} + B_{qp} = 0, \quad Z_{pq} = 0.$$

Преведемо ли ово на координатне тензоре кривине добићемо

$$R_{q11p} + R_{qjjp} = 0, \quad R_{q1jp} + R_{qj1p} = 0, \quad p, q \notin \{1, j\}. \tag{2.31}$$

За $p = q \notin \{1, j\}$ је $R_{p11p} + R_{pjjp} = 0$, што значи да је

$$\varepsilon_p \varepsilon_j R_{pjjp} = \varepsilon_p \varepsilon_1 R_{p11p}.$$

Како су секционе кривине $\kappa(E_u, E_v) = \varepsilon_u \varepsilon_v R_{uvvu}$, претходна једначина говори да је $\kappa(E_p, E_j) = \kappa(E_p, E_1)$. Обележимо ли $\kappa(E_1, E_2) = \kappa$ за $u \notin \{1, 2, v\}$ имамо $\kappa(E_u, E_v) = \kappa(E_u, E_1) = \kappa(E_u, E_2) = \kappa(E_1, E_2) = \kappa$, те није тешко закључити да је

$$\kappa(E_u, E_v) = \kappa\ , \quad \text{за } u \neq v. \tag{2.32}$$

Показали смо да су у свакој тачки секционе кривине на координатним 2-равнима једнаке. Како то важи за произвољну ортонормирану базу лако је проширити једнакост на све 2-равни. Сада на сцену ступа Шурова лема по којој псеудо-Риманова многострукост димензије $n \geq 3$ са константном секционом кривином у свакој тачки мора бити константне секционе кривине. Ово у потпуности доказује тврђење јер у мањим димензијама већ Ајнштајнова многострукост мора бити константне секционе кривине. □

2.5 Коефицијент уз $\alpha\beta$

Као и раније фиксираћемо индексе базних вектора псеудоортонормиране базе $(E_1, ..., E_n)$, но овога пута са $i = 1$ и $j > 1$. Погледајмо једначину (2.6)

$$K_X = \varepsilon_X \varepsilon_1 K_1 + \alpha\beta K_{1j} + \beta^2 (K_j - \varepsilon_1 \varepsilon_j K_1).$$

На почетку главе разматрали смо слободан члан у развоју $\mathrm{Tr}(K_X^k)$, но можемо изједначити и остале коефицијенте. Коефицијент уз $\alpha\beta$ у развоју $\mathrm{Tr}(K_X^k)$ мора бити нула! Уколико са $P^{[p]} \diamond Q^{[q]}$ означимо суму свих могућих производа у којима се P појављује p пута, а Q појављује q пута (дакле $\binom{p+q}{p}$ сабирака) добијамо

$$0 = \mathrm{Tr}\left((\varepsilon_X \varepsilon_1 K_1)^{[k-1]} \diamond K_{1j}^{[1]} \right) = (\varepsilon_X \varepsilon_1)^{k-1} \mathrm{Tr}(K_1^{[k-1]} \diamond K_{1j}^{[1]})$$

што даје

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-1]} \diamond K_{1j}^{[1]}) = 0. \tag{2.33}$$

Како је $\mathrm{Tr}(P + Q) = \mathrm{Tr}(Q + P)$ то редослед сабирања није битан, док $\mathrm{Tr}(PQ) = \mathrm{Tr}(QP)$ даје

$$\mathrm{Tr}(K_1^p K_{1j} K_1^q) = \mathrm{Tr}(K_1^q K_1^p K_{1j}) = \mathrm{Tr}(K_1^{p+q} K_{1j}).$$

Добијамо

$$0 = \mathrm{Tr}(K_1^{[k-1]} \diamond K_{1j}^{[1]}) = \sum_{p+q=k-1} \mathrm{Tr}(K_1^p K_{1j} K_1^q) = \sum_{p+q=k-1} \mathrm{Tr}(K_1^{p+q} K_{1j}) = k\mathrm{Tr}(K_1^{k-1} K_{1j})$$

што доводи до

$$\mathrm{Tr}(K_1^{k-1} K_{1j}) = 0. \tag{2.34}$$

На језику матрица то значи

$$\mathrm{Tr}(K_1^{k-1} K_{1j}) = \sum_{p_1, \ldots, p_k} A_{p_1 p_2} A_{p_2 p_3} \cdots A_{p_{k-1} p_k} Z_{p_k p_1}. \tag{2.35}$$

Ако би покушали да и даље задржимо произвољност матрица основних оператора ствари би се исувише закомпликовале. Један од начина да се потешкоће умање је бирање базе у којој оператор K_1 има блок дијагоналну матрицу састављену из Жордanових блокова. Међутим, најједноставнији рачун добија се уз претпоставку да је многострукост дијагонализабилна (дефиниција 1.16). У даљем тексту ове главе претпоставићемо да је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост. Дијагонализабилност примењујемо на E_1, односно бирамо базу $(E_1, E_2, ..., E_n)$ тангентог простора $T_p M$ у којој Јакобијев оператор K_1 има дијагоналну матрицу. То нам даје додатне могућности:

$$A_{pq} = 0, A_{pp} = \mu_p, \text{ за } 1 \leq p \neq q \leq n. \tag{2.36}$$

Услов (2.36) каже да у (2.35) вреди посматрати само $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$ што доводи до

$$\mathrm{Tr}(K_1^{k-1} K_{1j}) = \sum_p \mu_p^{k-1} Z_{pp}. \tag{2.37}$$

Сада можемо груписати једнаке сопствене вредности, те са Λ_a означити скуп свих индекса p за које је $\mu_p = a$

$$\Lambda_a = \{p \mid \mu_p = a\}.$$

Једначине (2.34) и (2.37) дају

$$\sum_a a^{k-1} \sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp} = 0$$

где се сумирање врши по различитим сопственим вредностима. Уведемо ли ознаку

$$W_a = \sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp}$$

добијамо систем једначина

$$\sum_a a^{k-1} W_a = 0$$

где је $k \geq 1$, а сумирање се врши по различитим сопственим вредностима a Јакобијевог оператора K_1. Ако је m број различитих сопствених вредности $a_1, ..., a_m$, тада можемо узети првих m једначина (за $1 \leq k \leq m$) при чему у матричном запису систем гласи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{a_1} \\ W_{a_2} \\ W_{a_3} \\ \vdots \\ W_{a_m} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.38}$$

Детерминанта Δ матрице овог система је Вандермондова детерминанта генерисана различитим елементима $a_1, ..., a_m$. Како је познато да је

$$\Delta = \prod_{1 \leq u < v \leq m} (a_v - a_u)$$

то је $\Delta \neq 0$, те систем има јединствено решење. Закључујемо да мора бити $W_a = 0$ за сваку сопствену вредност a и коначно имамо

$$\sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp} = 0 \tag{2.39}$$

Овај резултат важиће за тачка по тачка Осерманову дијагонализабилну многострукост јер је она k-штајн за свако k. Отуда и теорема:

Теорема 2.8 *За дијагонализабилну тачка по тачка Осерманову многострукост важи*

$$\sum_{p\in\Lambda_a} Z_{pp} = 0$$

за сваку сопствену вредност a *Јакобијевог оператора* K_1.

2.6 Коефицијент уз β^2

Слично као у претходној секцији и коефицијент уз β^2 у развоју $\mathrm{Tr}(K_X^k)$ мора бити нула, што даје

$$\mathrm{Tr}\left((\varepsilon_X\varepsilon_1K_1)^{[k-1]}\diamond(K_j-\varepsilon_1\varepsilon_jK_1)^{[1]}+\varepsilon_X\varepsilon_1\left((\varepsilon_X\varepsilon_1K_1)^{[k-2]}\diamond K_{1j}^{[2]}\right)\right)=0.$$

Након дељења са $(\varepsilon_X\varepsilon_1)^{k-1}$ имамо

$$\mathrm{Tr}\left(K_1^{[k-1]}\diamond(K_j-\varepsilon_1\varepsilon_jK_1)^{[1]}\right)+\mathrm{Tr}\left(K_1^{[k-2]}\diamond K_{1j}^{[2]}\right)=0. \tag{2.40}$$

Леви сабирак рачунамо као у претходној секцији

$$\mathrm{Tr}\left(K_1^{[k-1]}\diamond(K_j-\varepsilon_1\varepsilon_jK_1)^{[1]}\right)=k\mathrm{Tr}\left(K_1^{k-1}(K_j-\varepsilon_1\varepsilon_jK_1)\right)=k\sum_p\mu_p^{k-1}(B_{pp}-\varepsilon_1\varepsilon_j\mu_p)$$

одакле добијамо

$$\mathrm{Tr}\left(K_1^{[k-1]}\diamond(K_j-\varepsilon_1\varepsilon_jK_1)^{[1]}\right)=k\sum_a a^{k-1}\left(\sum_{p\in\Lambda_a}B_{pp}-\varepsilon_1\varepsilon_j|\Lambda_a|a\right) \tag{2.41}$$

где је $|\Lambda_a|$ број различитих p за које је $\mu_p=a$.
Десни сабирак је доста компликованији

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]}\diamond K_{1j}^{[2]})=\sum_{s+t+u=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j}K_1^u).$$

Њега можемо упростити са

$$\begin{aligned}
k\sum_{s+t=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j})&=\sum_{s+t=k-2}(s+1)\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j})+\sum_{s+t=k-2}(t+1)\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j})\\
&=\sum_{s_1+s_2+t=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^{s_1}K_{1j}K_1^tK_{1j}K_1^{s_2})+\sum_{s+t_1+t_2=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^{t_1}K_{1j}K_1^sK_{1j}K_1^{t_2})\\
&=2\sum_{s+t+u=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j}K_1^u)
\end{aligned}$$

након чега је

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]}\diamond K_{1j}^{[2]})=\frac{k}{2}\sum_{s+t=k-2}\mathrm{Tr}(K_1^sK_{1j}K_1^tK_{1j}).$$

Како су елементи матрице пресликавања $K_1^s K_{1j} K_1^t K_{1j}$ дати са

$$[K_1^s K_{1j} K_1^t K_{1j}]_{xy} = \sum_q [K_1^s K_{1j}]_{xq} [K_1^t K_{1j}]_{qy} = \sum_q \mu_x^s Z_{xq} \mu_q^t Z_{qy}$$

за траг добијамо

$$\mathrm{Tr}(K_1^s K_{1j} K_1^t K_{1j}) = \sum_{p,q} \mu_p^s \mu_q^t Z_{pq} Z_{qp}.$$

Претходни рачун нам даје

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]} \diamond K_{1j}^{[2]}) = \frac{k}{2} \sum_{s+t=k-2} \sum_{p,q} \mu_p^s \mu_q^t Z_{pq} Z_{qp} = \frac{k}{2} \sum_{p,q} Z_{pq} Z_{qp} \sum_{s+t=k-2} \mu_p^s \mu_q^t.$$

За рачун суме $\sum_{s+t=k-2} \mu_p^s \mu_q^t$ потребно је дискутовати случајеве $\mu_p = \mu_q$ и $\mu_p \neq \mu_q$. Наравно у првом случају сума је једнака $(k-1)\mu_p^{k-2}$, док је за $\mu_p \neq \mu_q$

$$\sum_{s+t=k-2} \mu_p^s \mu_q^t = \frac{\mu_p^{k-1} - \mu_q^{k-1}}{\mu_p - \mu_q} = \frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p - \mu_q} + \frac{\mu_q^{k-1}}{\mu_q - \mu_p}.$$

Обединимо ли претходна запажања добијамо

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]} \diamond K_{1j}^{[2]}) = \frac{k}{2} \sum_{p,q,\mu_p \neq \mu_q} Z_{pq} Z_{qp} \left(\frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p - \mu_q} + \frac{\mu_q^{k-1}}{\mu_q - \mu_p} \right) + \frac{k}{2} \sum_{p,q,\mu_p = \mu_q} Z_{pq} Z_{qp} (k-1) \mu_p^{k-2}.$$

Коришћењем симетрије по p и q и сређивањем претходне једначине имамо

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]} \diamond K_{1j}^{[2]}) = k \sum_{p,q,\mu_p \neq \mu_q} \frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p - \mu_q} Z_{pq} Z_{qp} + \frac{k(k-1)}{2} \sum_{p,q,\mu_p = \mu_q} \mu_p^{k-2} Z_{pq} Z_{qp}.$$

Након груписања сопствених вредности

$$\mathrm{Tr}(K_1^{[k-2]} \diamond K_{1j}^{[2]}) = k \sum_{a,b,a \neq b} \frac{a^{k-1}}{a-b} \sum_{p \in \Lambda_a, q \in \Lambda_b} Z_{pq} Z_{qp} + \frac{k(k-1)}{2} \sum_a a^{k-2} \sum_{p,q \in \Lambda_a} Z_{pq} Z_{qp}. \tag{2.42}$$

Коначно расписивање једначине (2.40) преко (2.41) и (2.42) даје

$$k \sum_a a^{k-1} \left(\sum_{p \in \Lambda_a} B_{pp} - \varepsilon_1 \varepsilon_j |\Lambda_a| a \right) + k \sum_{a,b,a \neq b} \frac{a^{k-1}}{a-b} \sum_{p \in \Lambda_a, q \in \Lambda_b} Z_{pq} Z_{qp} +$$
$$+ \frac{k(k-1)}{2} \sum_a a^{k-2} \sum_{p,q \in \Lambda_a} Z_{pq} Z_{qp} = 0.$$

Уколико поставимо

$$W_a = \sum_{p \in \Lambda_a} B_{pp} - \varepsilon_1 \varepsilon_j |\Lambda_a| a \quad \text{и} \quad W_{ab} = \sum_{p \in \Lambda_a, q \in \Lambda_b} Z_{pq} Z_{qp}$$

и претходну једначину поделимо са k биће

$$\sum_a a^{k-1} W_a + \sum_{a,b,a \neq b} \frac{a^{k-1}}{a-b} W_{ab} + \frac{k-1}{2} \sum_a a^{k-2} W_{aa} = 0,$$

одакле је

$$\sum_a a^{k-1}\left(W_a+\sum_{b\neq a}\frac{W_{ab}}{a-b}\right)+\sum_a (k-1)a^{k-2}\frac{W_{aa}}{2}=0.$$

Уз нове ознаке

$$Y_a=W_a+\sum_{b\neq a}\frac{W_{ab}}{a-b}\quad \text{и}\quad Z_a=\frac{W_{aa}}{2}$$

долазимо до система једначина

$$\sum_a a^{k-1}Y_a+\sum_a (k-1)a^{k-2}Z_a=0 \tag{2.43}$$

за свако $k\geq 1$ где се сума врши по различитим сопственим вредностима a Јакобијевог оператора K_1. Матрични запис система за првих $2m$ једначина (за $1\leq k\leq 2m$), где су $a_1,...,a_m$ све различите сопствене вредности Јакобијевог оператора је:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 1 & \cdots & 1\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 & 2a_1 & \cdots & 2a_m\\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_m^3 & 3a_1^2 & \cdots & 3a_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & \cdots & a_m^{2m-1} & (2m-1)a_1^{2m-2} & \cdots & (2m-1)a_m^{2m-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{a_1}\\ \vdots\\ Y_{a_m}\\ Z_{a_1}\\ \vdots\\ Z_{a_m}\end{pmatrix}=0.$$

Детерминанта Δ матрице овог система може се добити из Вандермондове детерминанте $V(a_1,...,a_m,b_1,...,b_m)$ генерисане елементима $a_1,...,a_m,b_1,...,b_m$ као

$$\Delta=\frac{\partial^m V(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m)}{\partial b_1\partial b_2\cdots\partial b_m}\bigg|\, b_t=a_t,\ 1\leq t\leq m \tag{2.44}$$

јер видимо да је $m+t$ колона заправо извод колоне t. Са друге стране је

$$V(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m)=\prod_u (b_u-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(b_v-b_u)\prod_{u<v}(b_v-a_u)\prod_{u<v}(b_u-a_v).$$

Уколико применимо $\frac{\partial V}{\partial b_t}\Big|\, b_t=a_t$ добијамо суму у којој живи само сабирак где се диференцира (b_t-a_t), јер након замене $b_t=a_t$ остали сабирци постају нула. Када ово применимо за свако $1\leq t\leq m$ добијамо

$$\Delta=\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_u-a_v).$$

Јасно је да Δ не може бити нула, штавише до на знак једнака је четвртом степену Вандермондове детерминанте генерисане са $a_1,...,a_n$. Зато наш систем има једнозначно решење

$$Y_a=0,\ Z_a=0$$

за сваку сопствену вредност a. $Z_a = 0$ повлачи $W_{aa} = 0$ те коначно добијамо

$$\sum_{p,q\in\Lambda_a} Z_{pq}Z_{qp} = 0 \tag{2.45}$$

што доказује наредну теорему.

Теорема 2.9 *За дијагонализабилну тачка по тачка Осермановy многострукост важи*

$$\sum_{p,q\in\Lambda_a} Z_{pq}Z_{qp} = 0$$

за сваку сопствену вредност a Јакобијевог оператора K_1.

Глава 3

Принцип дуалности

Мотивисан резултатима заједничког рада са Сарнаком[1], Осерман је поставио централно питање у теорији Осерманових многострукости познато као Осерманова хипотеза. Први фрагменти принципа дуалности јавили су се у резултатима које је дао Чи[2] решавајући хипотезу и који значајно редукују рачун. Принцип дуалности први је формулисао Ракић[3] у нади да ће бити корисна алатка у решавању Осерманове хипотезе. Он је доказао да принцип дуалности важи у Римановом случају, а Николајевски[4] је користећи управо тај резултат направио највећи пробој у решавању хипотезе. Инспирисани тиме у секцији 3.1 дајемо дефиницију принципа дуалности за псеудо-Риманов случај. Почевши од дефиниције у овој глави дајемо мноштво оригиналних резултата у вези принципа дуалности у псеудо-Римановом случају. У секцији 3.2 доказујемо да се у дијагонализабилном случају дуалност може проширити на све тангентне векторе X, Y са јединим ограничењем да је X дефинитан. У секцији 3.3 користимо рачуне претходне главе и доказујемо да уколико не постоји изотропан сопствени вектор Јакобијевог оператора то за такву многострукост мора важити принцип дуалности. Специјално принцип дуалности важи за Риманову Осерманову многострукост. У секцији 3.4 доказујемо да принцип дуалности важи за произвољну четвородимензиону Осерманову многострукост. У завршној секцији 3.5 дајемо мотиве и отворене проблеме за будући рад на принципу дуалности.

[1]Peter Clive Sarnak (1953)
[2]Quo-Shin Chi (?)
[3]Zoran Rakić (1964)
[4]Yuri Nikolayevsky (?)

3.1 Увод и дефиниција

Познато је да за Риманове многострукости (M, g) које су равне или локално симетричне ранга један важи да локалне изометрије од (M, g) делују транзитивно на јединичном раслојењу $S(M)$, те су самим тим сопствене вредности Јакобијевог оператора константне на $S(M)$ и многострукост је Осерманова. Мотивисан резултатима заједничког рада са Сарнаком[16], Осерман се у [15] упитао да ли важи обрат. Тако је настао централни проблем у теорији Осерманових многострукости познат као Осерманова хипотеза. Морају ли Осерманове многострукости бити равне или локално симетричне ранга један? Приликом решавања појединих случајева ове тешке хипотезе природно се појавила импликација

$$K_X(Y) = \lambda Y \Rightarrow K_Y(X) = \lambda X \tag{3.1}$$

која, уколико важи, у знатној мери олакшава рачун. Чи је у [7] доказао хипотезу за Риманове многострукости у случајевима димензије $n = 4$, $n \equiv 1 \pmod 2$ и $n \equiv 2 \pmod 4$. Он је у том раду користио не тако тешко тврђење да (3.1) важи уколико је λ екстремна сопствена вредност. У нади да ће потенцијални доказ да формула (3.1) увек важи допринети дубљем разумевању Осерманове хипотезе, Ракић[17] је први формулисао принцип дуалности, а затим и доказао[17, 18] његову исправност за Риманов случај. Касније је другачији доказ предложио Гилки[9], а испоставило се да је принцип дуалности заиста користан алат у решавању Осерманове хипотезе. Наиме највећи пробој направио је Николајевски[13, 14] који је користећи управо принцип дуалности успео да покаже ваљаност хипотезе у Римановом случају за све димензије сем $n = 16$.

Варијанта Осерманове хипотезе у псеудо-Римановом случају такође је заокупила пажњу. У Теореми 2.7 видели смо да у Лоренцовом случају Осерманова многострукост мора бити константне секционе кривине и самим тим хипотеза важи. Следећи случај по једноставности су Осерманове многострукости сигнатуре $(2, 2)$ који су разрешили Блажић, Бокан и Ракић[2]. Они су показали да уз претпоставку дијагонализабилности хипотеза важи, док се иначе могу конструисати разни контрапримери. Наша идеја у овом раду је испитати принцип дуалности у псеудо-Римановом случају да би боље разумели Осерманове многострукости. Наравно најинтересантнији случајеви биће када је многострукост дијагонализабилна и под том претпоставком дајемо већину резултата.

Дефиниција 3.1 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. Кажемо да принцип дуалности важи за вредност λ у тачки $p \in M$ ако за све међусобно ортогоналне X и Y из $S_p(M)$ важи*

$$K_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y \Rightarrow K_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X. \tag{3.2}$$

Уколико принцип дуалности важи за све вредности λ у тачки $p \in M$ кажемо да принцип дуалности важи у тачки $p \in M$. Принцип дуалности важи за многострукост (M, g) уколико принцип дуалности важи у тачки p за свако $p \in M$.

Овако постављена дефиниција је заправо уопштење јер је првобитно ([17]) услов (3.2) био дефинисан само за истородне јединичне X и Y.

3.2 Теорема о продужењу

У овој секцији кроз теорему о продужењу видећемо да домен за X и Y из дефиниције није толико рестриктиван.

Теорема 3.1 *Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост у тачки $p \in M$. Ако принцип дуалности важи за вредност λ у тачки $p \in M$ тада*

$$K_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y \Rightarrow K_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$$

важи за свако $X, Y \in T_pM$ са јединим ограничењем $\varepsilon_X \neq 0$.

Доказ. На почетку претпостављамо услов дуалности за λ.

$$(3.2) \text{ важи за } X, Y \in S_p(M) \text{ са } g(X, Y) = 0.$$

Нека су сада X и Y дефинитни ($\varepsilon_X, \varepsilon_Y \neq 0$) и међусобно ортогонални ($g(X, Y) = 0$). Неизотропност X и Y допушта нам да их изразимо преко јединичних X_0 и Y_0 путем $X = \alpha X_0$ и $Y = \beta Y_0$, при чему је $\alpha, \beta \neq 0$. Тада је

$$K_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y \Leftrightarrow K_{\alpha X_0}(\beta Y_0) = \varepsilon_{\alpha X_0} \lambda \beta Y_0 \Leftrightarrow \alpha^2 \beta K_{X_0}(Y_0) = \alpha^2 \varepsilon_{X_0} \beta \lambda Y_0 \Leftrightarrow K_{X_0}(Y_0) = \varepsilon_{X_0} \lambda Y_0$$

Због $g(X, Y) = 0$ је $g(X_0, Y_0) = 0$ и како $X_0, Y_0 \in S_p(M)$ то за X_0 и Y_0 важи (3.2) одакле

$$K_{X_0}(Y_0) = \varepsilon_{X_0} \lambda Y_0 \Rightarrow K_{Y_0}(X_0) = \varepsilon_{Y_0} \lambda X_0 \Leftrightarrow K_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X.$$

Овако смо проширили домен и сада имамо да

$$(3.2) \text{ важи за } X, Y \in T_p(M) \text{ са } \varepsilon_X, \varepsilon_Y \neq 0 \text{ и } g(X, Y) = 0.$$

Наредни корак је да омогућимо изотропност вектору Y. Нека је $K_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$, $g(X, Y) = 0$ и $\varepsilon_Y = 0$, односно Y је изотропан, ортогоналан на X сопствени вектор оператора K_X за сопствену вредност $\varepsilon_X \lambda$. Многострукост је по претпоставци дијагонализабилна, те постоји псеудоортонормирана база сопственог потпростора $\mathrm{Ker}(K'_X - \varepsilon_X \lambda \mathrm{Id})$. Y се зато може изразити као збир међусобно ортогоналних, просторног вектора E и временског вектора F, који су ортогонални на X.

$$K_X(E) = \varepsilon_X \lambda E, \ K_X(F) = \varepsilon_X \lambda F, \ Y = E + F,$$

$$g(E,F)=g(E,X)=g(F,X)=0,\ \varepsilon_E>0,\ \varepsilon_F<0.$$

Распишемо ли $K_{E+\theta F}$ преко оператора кривине добићемо

$$K_{E+\theta F}(X)=K_E(X)+\theta^2K_F(X)+\theta\left(R(X,E)F+R(X,F)E\right). \tag{3.3}$$

Како је

$$\varepsilon_{E+\theta F}=\varepsilon_E+\theta^2\varepsilon_F=(\varepsilon_E+\varepsilon_F)+(\theta^2-1)\varepsilon_F=\varepsilon_Y+(\theta^2-1)\varepsilon_F=(\theta^2-1)\varepsilon_F$$

то су за $\theta^2\neq 1$ вектори $E+\theta F$, E и F неизотропни ортогонални на X сопствени вектори оператора K_X који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X\lambda$. По претпоставци за њих важи принцип дуалности те је

$$K_{E+\theta F}(X)=\varepsilon_{E+\theta F}\lambda X,\ K_E(X)=\varepsilon_E\lambda X,\ K_F(X)=\varepsilon_F\lambda X.$$

Вратимо ли се у формулу (3.3) добијамо

$$\varepsilon_{E+\theta F}\lambda X=\varepsilon_E\lambda X+\theta^2\varepsilon_F\lambda X+\theta\left(R(X,E)F+R(X,F)E\right).$$

Како је $\varepsilon_{E+\theta F}=\varepsilon_E+\theta^2\varepsilon_F$ то из претходне једнакости можемо закључити да мора бити

$$R(X,E)F+R(X,F)E=0.$$

Формула (3.3) сада гласи

$$K_{E+\theta F}(X)=K_E(X)+\theta^2K_F(X)$$

док за $\theta=1$ она постаје

$$K_{E+F}(X)=K_E(X)+K_F(X).$$

Како је $K_E(X)+K_F(X)=\varepsilon_E\lambda X+\varepsilon_F\lambda X=\varepsilon_{E+F}\lambda X$ и $Y=E+F$ то имамо

$$K_Y(X)=0=\varepsilon_Y\lambda X$$

што доказује да

$$(3.2) \text{ важи за } X,Y\in T_p(M) \text{ са } \varepsilon_X\neq 0 \text{ и } g(X,Y)=0.$$

Преостаје нам да елиминишемо услов ортогоналности за X и Y. Претпоставимо да је $K_X(Y)=\varepsilon_X\lambda Y$ за $\varepsilon_X\neq 0$ и нека је $g(X,Y)\neq 0$. Тада постоји Z ортогонално на X и $\alpha\neq 0$ тако да је $Y=\alpha X+Z$. Из претпоставке је $K_X(\alpha X+Z)=\varepsilon_X\lambda(\alpha X+Z)$, те како је $K_X(X)=0$ имамо

$$K_X(Z)=\varepsilon_X\lambda(\alpha X+Z).$$

Знамо да је кодомен K_X ортогоналан на X одакле због $g(Z,X)=0$ важи

$$0=g(K_X(Z),X)=g(\varepsilon_X\lambda(\alpha X+Z),X)=g(\varepsilon_X\lambda\alpha X,X)=\varepsilon_X^2\alpha\lambda.$$

Како су и α и ε_X различити од нуле то мора бити $\lambda = 0$. Сада је $K_X(Z) = 0$ за ортогоналне Z и X са $\varepsilon_X \neq 0$, што су услови за X и Z за које важи дуалност. Дуалност нам даје $K_Z(X) = 0$, а нама преостаје да срачунамо $K_Y(X)$.

$$K_Y(X) = K_{\alpha X+Z}(X) = R(X, \alpha X+Z)(\alpha X+Z) = R(X, Z)(\alpha X+Z) = -\alpha R(Z, X)X + R(X, Z)Z$$

Дакле $K_Y(X) = -\alpha K_X(Z) + K_Z(X)$, те како смо имали $K_X(Z) = 0$ и $K_Z(X) = 0$ коначно добијамо $K_Y(X) = 0$, а самим тим и дуалност за неортогоналне X и Y.

(3.2) важи за $X, Y \in T_p(M)$ са $\varepsilon_X \neq 0$.

□

3.3 Главна теорема принципа дуалности

Основна идеја ове секције је превести услов дуалности (3.2) на координатне компоненте тензоре кривине, а затим искористити неки од већ успостављених рачуна из претходне главе.

Теорема 3.2 *Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост у тачки $p \in M$ и нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ псеудоортонормирана база T_pM таква да у њој оператор K_1 има дијагоналну матрицу. Тада принцип дуалности важи за вредност λ у тачки p ако и само ако за свако $j > 1$ и свако $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda}$ важи $Z_{uu} = 0$.*

Доказ. Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост у тачки $p \in M$ и нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ псеудоортонормирана база T_pM таква да у њој оператор K_1 има дијагоналну матрицу. E_u је сопствени вектор оператора K_1 који одговара вредности $\varepsilon_1\lambda$ за $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda} = \{t \mid \mu_t = \varepsilon_1\lambda\}$. Претпоставимо да принцип дуалности важи за вредност λ у тачки p. Тада за $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda}$ важи $K_u(E_1) = \varepsilon_u\lambda E_1$, одакле за $j > 1$ имамо $0 = g(K_u(E_1), E_j) = R_{1uuj}$. По (2.10) је

$$0 = 2\varepsilon_u R_{1uuj} = \varepsilon_u(R_{u1ju} + R_{uj1u}) = Z_{uu}$$

те за свако $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda}$ важи $Z_{uu} = 0$. Докажимо обрат. $Z_{22} = 0$ је еквивалентно са $R_{122j} = 0$ те је тада $K_2(E_1)$ ортогонално на свако E_j за $j > 1$. Из $K_1(E_2) = \varepsilon_1\lambda E_2$ добијамо $R_{1221} = R_{2112} = \varepsilon_2\varepsilon_1\lambda$, одакле је $K_2(E_1) = \varepsilon_2\lambda E_1$. Како можемо поставити $E_1 = X$ и $E_2 = Y$, те допунити до адекватне псеудоортонормиране базе, претходни рачун у потпуности доказује принцип дуалности. □

Теорема 3.2 нам сада омогућава интерпретацију формула (2.39) и (2.45) у смислу принципа дуалности. Отуда и наредне две теореме.

Теорема 3.3 *Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост у тачки $p \in M$ таква да карактеристични полином Јакобијевог оператора K_X има једноструку нулу λ. Тада принцип дуалности важи за вредност $\varepsilon_X \lambda$ у тачки $p \in M$. Посебно, уколико је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост у тачки $p \in M$ са свим различитим сопственим вредностима онда за њу важи принцип дуалности у тачки p.*

Доказ. Протумачимо теорему 2.8, односно формулу (2.39)

$$\sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp} = 0.$$

Уколико је $\Lambda_a = \{u\}$ једночлан скуп за неку сопствену вредност a оператора K_1, тада формула (2.39) даје $Z_{uu} = 0$ и по теореми 3.2 важи принцип дуалности за $\varepsilon_1 a$ у тачки. Посебно уколико су све нуле карактеристичног полинома различите, за сваку реалну нулу важиће принцип дуалности у тачки. □

Теорема 3.4 *Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост таква да за свако јединично X не постоји изотропан сопствени вектор од K_X. Тада за њу важи принцип дуалности. Специјално за Риманову Осерманову многострукост важи принцип дуалности.*

Доказ. Нека је (M, g) дијагонализабилна Осерманова многострукост таква да за свако јединично X не постоји изотропан сопствени вектор од K_X. Изаберимо псеудоортонормирану базу $(X = E_1, E_2, ..., E_n)$ у којој K_X има дијагоналну матрицу. Непостојање изотропног сопственог вектора заправо значи да сви сопствени потпростори оператора K_X садрже само истородне векторе. Како Λ_a генерише сопствени потпростор за сопствену вредност a то је $\varepsilon_p = \varepsilon_q$ за свако $p, q \in \Lambda_a$. Вратимо се сада на теорему 2.9, односно формулу (2.45)

$$\sum_{p,q \in \Lambda_a} Z_{pq} Z_{qp} = 0.$$

Како је $Z_{qp} = \varepsilon_q (R_{p1jq} + R_{pj1q}) = \varepsilon_q \varepsilon_p \varepsilon_p (R_{qj1p} + R_{q1jp}) = \varepsilon_p \varepsilon_q Z_{pq}$, то је због $\varepsilon_p = \varepsilon_q$

$$0 = \sum_{p,q \in \Lambda_a} \varepsilon_p \varepsilon_q Z_{pq}^2 = \sum_{p,q \in \Lambda_a} Z_{pq}^2.$$

Сума квадрата је нула само ако су сви сабирци нуле, те за свако $p, q \in \Lambda_a$ имамо $Z_{pq} = 0$. Ово важи за сваку сопствену вредност a, те је $Z_{pp} = 0$ за свако p и по теореми 3.2 важи принцип дуалности. Специјално Риманова многостукост нема изотропних вектора, па онда наравно нема ни сопствених изотропних. □

3.4 Четвородимензионе многострукости

За многострукости малих димензија наши рачуни бивају прилично упрошћени, самим тим можемо добити конкретне резултате. Случај димензија мањих од 4 није интересантан јер он даје многострукости константне секционе кривине. Први нетривијалан пример зато су четвородимензионе Осерманове многострукости, а сада ћемо показати да за њих важи принцип дуалности.

Теорема 3.5 *За четвородимензиону Осерманову многострукост важи принцип дуалности.*

Доказ. Нека је (M, g) 4-димензиона Осерманова многострукост. Сигнатуре (0,4) и (4,0) (Риманов случај) по теореми 3.4 доносе дуалност, као што сигнатуре (1,3) и (3,1) (Лоренцов случај) по теореми 2.7 доносе многострукост константне секционе кривине, а самим тим и дуалност (што се види из добијених једначина у секцији 2.4). Претпоставимо зато да је (M, g) Осерманова многострукост сигнатуре (2,2). У доказу разликујемо два суштински различита случаја у зависности од тога да ли је (M, g) дијагонализабилна многострукост или не.

Нека је (M, g) дијагонализабилна 4-димензиона Осерманова многострукост. Извршимо дискусију по броју различитих нула карактеристичног полинома рестрикованог Јакобијевог оператора. Уколико су све три нуле различите, по Теореми 3.3 важи принцип дуалности, док све једнаке нуле дају константну секциону кривину. Претпоставимо зато да рестриковани Јакобијев оператор K'_X има тачно две сопствене вредности $\varepsilon_X\lambda$ и $\varepsilon_X\mu$ од којих је једна, рецимо $\varepsilon_X\lambda$, двострука. Теорема 3.3 даје дуалност за вредност μ као једноструке нуле, те нам преостаје доказати дуалност за вредност λ. Будући да је многострукост дијагонализабилна то се за свако јединично X тангентни простор може разложити са

$$T_pM = < X > \oplus \mathrm{Ker}(K'_X - \varepsilon_X\lambda \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(K'_X - \varepsilon_X\mu \mathrm{Id}).$$

Претпоставимо $K_X(Y) = \varepsilon_X\lambda Y$, односно посматрајмо јединични $Y \in \mathrm{Ker}(K'_X - \varepsilon_X\lambda \mathrm{Id})$. K_Y такође разлаже тангентни простор T_pM, те се X ортогонално на Y може написати као

$$X = \alpha L + \beta M$$

при чему је

$$L \in \mathrm{Ker}(K'_Y - \varepsilon_Y\lambda \mathrm{Id}),\ M \in \mathrm{Ker}(K'_Y - \varepsilon_Y\mu \mathrm{Id}),\ g(L, M) = 0.$$

Даље је

$$K_Y X = K_Y(\alpha L + \beta M) = \alpha K_Y(L) + \beta K_Y(M) = \alpha\varepsilon_Y\lambda L + \beta\varepsilon_Y\mu M,$$

$$g(K_Y X, X) = g(\alpha\varepsilon_Y\lambda L + \beta\varepsilon_Y\mu M, \alpha L + \beta M) = \alpha^2\varepsilon_Y\varepsilon_L\lambda + \beta^2\varepsilon_Y\varepsilon_M\mu,$$

но како знамо да је

$$g(K_Y X, X) = R(X, Y, Y, X) = g(K_X Y, Y) = g(\varepsilon_X \lambda Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda$$

добијамо

$$\varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda = \alpha^2 \varepsilon_Y \varepsilon_L \lambda + \beta^2 \varepsilon_Y \varepsilon_M \mu.$$

Краћењем са ε_Y и заменом $\varepsilon_X = \alpha^2 \varepsilon_L + \beta^2 \varepsilon_M$ добијамо

$$\lambda(\alpha^2 \varepsilon_L + \beta^2 \varepsilon_M) = \alpha^2 \varepsilon_L \lambda + \beta^2 \varepsilon_M \mu$$

и коначно

$$\beta^2 \varepsilon_M \lambda = \beta^2 \varepsilon_M \mu.$$

Простор $\mathrm{Ker}(K'_V - \varepsilon_V \mu \mathrm{Id})$ је димензије 1 због једнострукости вредности μ, те у њему нема изотропних вектора. Зато је $\varepsilon_M \neq 0$, што са $\lambda \neq \mu$ доноси $\beta^2 = 0$, односно $\beta = 0$. То заправо значи да је X колинеарно L, а самим тим $X \in \mathrm{Ker}(K'_Y - \varepsilon_Y \lambda \mathrm{Id})$. Коначно добијамо

$$K_Y X = \varepsilon_Y \lambda X,$$

што доказује да принцип дуалности важи и за вредност λ. Овим смо комплетирали доказ за случај дијагонализабилне многострукости.

Случај недијагонализабилне многострукости је компликованији и доказ базирамо на егзистенцији псеудоортонормиране базе (E_1, E_2, E_3, E_4) за коју је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ и у којој оператор K_1 има следећи облик:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -d & 0 \\ 0 & d & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

при чему је $d \neq 0$. Рачун вршимо уз претпоставку да је многострукост 2-штајн, те самим тим користимо формуле из теорема 2.5 и 2.6.

За почетак из једначина (2.8) и (3.4) имамо

$$R_{1221} = -a,\ R_{1331} = b,\ R_{1441} = c,\ R_{2113} = d,\ R_{2114} = 0,\ R_{3114} = 0$$

и желимо да срачунамо координатне компоненте оператора K_2, K_3 и K_4. Формула (2.14) $\sum_p \varepsilon_i \varepsilon_p R_{piip} = C_1$ нам даје четири могућности за i и самим тим четири једначине

$$\begin{aligned} R_{2112} - R_{3113} - R_{4114} = C_1, \qquad & R_{1221} - R_{3223} - R_{4224} = C_1, \\ -R_{1331} - R_{2332} + R_{4334} = C_1, \qquad & -R_{1441} - R_{2442} + R_{3443} = C_1, \end{aligned}$$

из којих је

$$R_{2332} + R_{2442} = b + c,\ R_{2332} - R_{3443} = a + c,\ R_{2442} - R_{3443} = a + b.$$

Решавањем система добијамо

$$R_{2332} = c,\ R_{2442} = b,\ R_{3443} = -a. \tag{3.5}$$

Формула (2.15) $\sum_p \varepsilon_p R_{pijp} = 0$ нам за $1 \le i \ne j \le 4$ пружа шест могућности

$$\begin{aligned} R_{2443} &= R_{2113} = d, & R_{1442} &= -R_{1332} = x,\\ R_{2334} &= R_{2114} = 0, & R_{1443} &= R_{1223} = y,\\ R_{3224} &= R_{3114} = 0, & R_{1224} &= R_{1334} = z. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Формула (2.24) $\sum_{p,q} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{piiq} R_{pijq} = 0$ важи за $i \ne j$. Поставимо ли $(i,j) = (1,2)$ и $(i,j) = (2,1)$ добијамо

$$dy + (c-b)x = 0,\ dy + (b-c)x = 0$$

што даје $dy = (c-b)x = 0$, те због $d \ne 0$ имамо $y = 0$. Поставимо ли $(i,j) = (1,3)$ и $(i,j) = (3,1)$ добијамо

$$-dx + (c-a)y = 0,\ dx + (c-a)y = 0$$

одакле је $dx = (c-a)y = 0$ и важи $x = 0$. Овај резултат нам са (3.6) говори да су једини недијагонални различити од нуле елементи матрица оператора K_1, K_2, K_3, K_4 следећи:

$$R_{2113} = R_{2443} = d,\ R_{1224} = R_{1334} = z.$$

Поставимо ли $(i,j) = (1,4)$ добијамо $(b-a)z - d(R_{2143} + R_{3142})$, док за $(i,j) = (2,3)$ добијамо $(b-a)d - z(R_{1234} + R_{4231})$, што можемо записати као

$$(b-a)z = d(R_{1234} + R_{1324}),\ (b-a)d = z(R_{1234} + R_{1324}). \tag{3.7}$$

Формула (2.23) $\sum_{p,q} \varepsilon_p \varepsilon_q R^2_{piiq} = C_2$ нам за $i = 1$ и $i = 2$ даје

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2d^2 = C_2,\ a^2 + c^2 + b^2 - 2z^2 = C_2$$

одакле је $d^2 = z^2$. Формула (2.25) за $(i,j) = (1,2)$ гласи:

$$2 \sum_{1 \le p,q \le 4} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{p11q} R_{p22q} - 2C_2 + \sum_{1 \le p,q \le 4} \varepsilon_p \varepsilon_q (R_{p12q} + R_{p21q})^2 = 0.$$

Одавде добијамо

$$2(bc + cb) - 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2d^2) + \big(2a^2 - 2d^2 - 2z^2 + 2(R_{3124} + R_{3214})^2\big) = 0$$

што након сређивања и замене $z^2 = d^2$ постаје

$$(b-c)^2 = (R_{1432} - R_{1324})^2. \tag{3.8}$$

Слично претходном, из формуле (2.25) за $(i,j) = (1,3)$ добијамо

$$2(-ac - ac) + 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2d^2) + \big(2d^2 - 2b^2 + 2z^2 - 2(R_{2134} + R_{2314})^2\big) = 0$$

што након сређивања постаје

$$(a-c)^2 = (R_{2134} + R_{2314})^2. \tag{3.9}$$

Сада када смо извршили припрему можемо по узору на рад Блажић, Бокан и Ракић [2] извршити дискусију по могућим Жордановим формама. Случај само једног Жордановог блока (троструке нула и карактеристичног и минималног полинома) одмах пада јер тада, до на множење скаларом, постоји јединствени сопствени вектор и он је изотропан. Случај комплексних нула може се описати са (3.4) за $a = b$, а једини сопствени вектор је тада E_4. Имамо $K_1(E_4) = cE_4$, а како је $R_{1442} = R_{1443} = R_{1444} = 0$ то је $K_4(E_1)$ ортогонално на $< E_2, E_3, E_4 >$ и мора бити $K_4(E_1) = -cE_1$, што доказује дуалност. Напоменимо да је у горенаведеном раду доказано да случај комплексних нула заправо није могућ.

Преостаје случај са два Жорданова блока који се може описати са (3.4) при чему је $a = t - d$, $b = t + d$. Сопствени вектори су тада разапети са $E_2 - E_3$ и E_4. Уколико Жорданови блокови одговарају различитим сопственим вредностима (такође доказано да овај случај не постоји) имали би за сопствене векторе само изотропан $E_2 - E_3$ и дефинитан E_4. Као у претходном случају мора бити $K_4(E_1) = -cE_1$ и дуалност важи.

До сада је преживео само случај троструке нуле за карактеристични полином од K_1', при чему минимални полином има двоструку нулу. Тада је $a = c - d$ и $b = c + d$.

Означимо ли

$$u = R_{1234},\ v = R_{1324}$$

по Бјанкијевом идентитету имамо $R_{1432} = R_{1234} - R_{1324} = u - v$. Сада важи

$$\begin{aligned} u + v &= 2z \quad \text{из } (3.7) \\ (u-2v)^2 &= z^2 \quad \text{из } (3.8) \\ (v-2u)^2 &= z^2 \quad \text{из } (3.9). \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо јединствено решење $u = v = z$, односно $R_{1432} = 0$ и сада можемо испитати дуалност. Сопствени вектори оператора K_1 су облика $\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4$ и имамо

$$K_1(\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4) = \alpha(aE_2 + dE_3 + dE_2 - bE_3) + \beta c E_4 = c(\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4).$$

Потребно је срачунати $K_{\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4}(E_1)$, односно $g(K_{\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4}(E_1), E_j)$ за $j = 2, 3, 4$

$$T_j = g(K_{\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4}(E_1), E_j) = R(E_1, \alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4, \alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4, E_j).$$

За овако дефинисано T_j добијамо

$$\begin{aligned} T_2 &= \alpha\beta(R_{1242} - R_{1342} - R_{1432}) = \alpha\beta(-z + v - (u - v)) = 0, \\ T_3 &= \alpha\beta(R_{1243} - R_{1343} + R_{1423}) = \alpha\beta(-u + z + (v - u)) = 0, \\ T_4 &= \alpha^2(R_{1224} - R_{1234} - R_{1324} + R_{1334}) = \alpha^2(z - u - v + z) = 0, \end{aligned}$$

те је $K_{\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4}(E_1)$ ортогонално на $< E_2, E_3, E_4 >$ и наравно мора бити

$$K_{\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4}(E_1) = -c\beta^2 E_1.$$

Наравно за јединично $\alpha E_2 - \alpha E_3 + \beta E_4$ је $\beta^2 = 1$ и видимо да принцип дуалности важи, што у потпуности доказује теорему. □

3.5 Отворени проблеми

Из претходно изнетих тврђења може се приметити да псеудо-Риманове Осерманове многострукости пружају огроман простор за будући рад. За сада је познато јако мали број примера Осермановиx многострукости и то су углавном или Риманове или четвородимензионе многострукости. Међутим, за њих смо у Теореми 3.4 и Теореми 3.5 констатовали да важи принцип дуалности.

Прво питање базира се на дефиницији принципа дуалности и Теореми 3.1. Може ли се поставити теорема о продужењу и за Осерманове многострукости које нису дијагонализабилне? У складу са тим може се посматрати и импликација

$$K_X(Y) = 0 \Rightarrow K_Y(X) = 0$$

у случају да је $\varepsilon_X = 0$, односно када је X изотропан тангентни вектор. То нарочито има смисла јер већина познатих примера има само нуле за сопствене вредности Јакобијевог оператора.

Даље могућности тичу се евентуалне потраге за Осермановим многострукостима у којима не важи принцип дуалности, јер за сада такве нису познате. По Теореми 3.5 њих морамо тражити у димензијама $n \geq 5$. Због тога, било би корисно извршити класификацију Осермановиx многострукости у сигнатурама $(2, m)$, а посебно у сигнатури $(2, 3)$ која од могућих делује најједноставније. Такође отворено је питање принципа дуалности у случају да многострукост има тачно две сопствене вредности за Јакобијев оператор.

Аутор овог рада се искрено нада да ће се у скоријој будућности још неко ухватити у коштац са проблемима које пружа принцип дуалности и да ћемо ускоро сазнати и разумети много више о Осермановим многострукостима.

Литература

[1] Andrejić, Rakić : *On the duality principle in pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, preprint (2006)

[2] Blažić, Bokan, Rakić : *Osserman Pseudo-Riemannian Manifolds of Signature (2,2)*, J. Austral. Math. Soc. **71** (2001), 367–395

[3] Blažić, Bokan, Gilkey : *A Note on Osserman Lorentzian manifolds*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 227–230

[4] Blažić, Vukmirović : *Examples of self-dual, Einstein metrics of (2,2)-signature* , Math. Scand. **94** (2004), 63–74

[5] Manfredo Perdigão do Carmo: *Riemannian Geometry*, Boston, 1992

[6] Carpenter, Gray, Willmore : *The Curvature of Einstein Symmetric Spaces*, Q.J.Math.Oxford **33** (1982), 45–64

[7] Quo-Shin Chi : *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 187–202

[8] Garcia-Río, Kupeli, Vázquez-Lorenzo: *Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002

[9] Peter Gilkey: *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor*, World Scientific, 2001

[10] Gilkey, Swann, Vanhecke : *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacoby operator*, Quart. J. Math. Oxford **46** (1995), 299–320

[11] Alfred Gray: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1998

[12] Svetozar Kurepa : *Konačnodimenzioni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1979, 240–241

[13] Yuri Nikolayevsky : *Osserman conjecture in dimension $n \neq 8, 16$*, Math. Ann. **331** (2005), 505–522

[14] Yuri Nikolayevsky : *Osserman manifolds of dimension 8*, manuscripta math **115** (2004), 31–53

[15] Robert Osserman : *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 731–756

[16] Osserman, Sarnak : *A new curvature ivariant and entropy of geodesic flows*, Invent. Math. **77** (1984), 455–462

[17] Zoran Rakić : *Osserman-ove mnogostrukosti*, doktorska disertacija, Beograd, 1998

[18] Zoran Rakić : *On duality principle in Osserman manifolds*, Linear Algebra and its Applications **296** (1999), 183–189

[19] Arthur Walker : *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math. Oxford **1** (1950), 69–79