НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Мартовски рок) - 18. Март 2006.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Наћи (бар један) нови пројективни систем у чијим је афиним координатама пресликавање $\lambda x_1' = 2x_2$, $\lambda x_2' = 3x_1 - x_2$ хомотетија.

Решење : Дато пресликавање може се записати као $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$. Карактеристични полином матрице пресликавања биће $\chi(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$. Сопственим вредностима -3 и 2 одговарају редом сопствени вектори $(-2, 3)$ и $(1, 1)$, те су фиксне тачке пресликавања (у старом систему) $(-2 : 3)$ и $(1 : 1)$. Хомотетија на правој има за фиксне тачке центар хомотетије и бесконачно далеку тачку. Да би решили задатак морамо фиксним тачкама доделити координате бесконачно далеке и центра хомотетије у новом систему. Уколико желимо да се хомотетија јасно види узећемо да је центар хомотетије нула. Зато ћемо у колоне матрице преласка уписати векторе представнике фиксних тачака. На пример $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, што заправо значи да је нова база $f_1 = -2e_1 + 3e_2$ и $f_2 = e_1 + e_2$. Матрица преликавања у новој бази биће $C^{-1}AC$, те како је $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ имамо

$$C^{-1}AC \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. У новом систему пресликавање је дакле $\lambda x_1' = -3x_1$, $\lambda x_2' = 2x_2$, односно афино $x' = -\frac{3}{2}x$, што је очигледно хомотетија. □

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дате су три конкурентне праве p, q, a и тачке A_1, A_2, A_3 на правој a. Ако су f_1, f_2, f_3 перспективна пресликавања праве p на праву q са центрима A_1, A_2, A_3 (тим редом), доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

Решење: Потребно је и довољно показати да за произвољно $P \in p$ важи $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P)$. Нека је $Q_1 := f_1(P)$, $P_1 := f_2^{-1}(Q_1)$, тј $A_1P \cap A_2P_1 = \{Q_1\}$ и нека је $Q_2 := f_3(P)$, $P_2 := f_2^{-1}(Q_2)$, тј $A_3P \cap A_2P_2 = \{Q_2\}$. Применимо ли Папасову теорему на колинеарне тројке $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P, P_2 \in p$ добићемо три колинеарне тачке одређене са $A_1P \cap A_2P_1$, $A_3P \cap A_2P_2$ и $A_1P_2 \cap A_3P_1$. Прве две тачке су Q_1 и Q_2 и оне одређују праву q, одакле за $\{Q\} := A_1P_2 \cap A_3P_1$ важи $Q \in q$, односно $A_1P_2 \cap A_3P_1 \cap q = \{Q\}$. Како је сада $A_1P_2 \cap q = \{f_1(P_2)\}$ и $A_3P_1 \cap q = \{f_3(P_1)\}$ то мора бити $f_1(P_2) = Q = f_3(P_1)$, односно $f_1(f_2^{-1}(f_3(P))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(P)))$, што доказује тврђење. □

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дата су темена $A(A', A_0)$ и $B(B', A_0)$ правилног тетраедра $ABCD$. Ако је AB паралелна равни π, а CD са равни π заклапа угао од $\pi/6$ конструисати пројекцију тог тетраедра.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дате су тачке $S^c \in p^c(P, P^c_\infty)$ и $V^c \in q^c(Q, Q^c_\infty)$. Представити пројекцију праве купе са врхом V и средиштем основе S, ако је пречник основе једнак висини купе.