НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Мартовски рок) - 19. Март 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : На правој $y = 0$ уведен је координатни систем чије базне тачке и јединица имају афине координате $A_1(1,0)$, $A_2(0,0)$ и $B(2,0)$. На правој $y = x$ уведен је координатни систем чије базне тачке и јединица имају афине координате $C_1(0,0)$, $C_2(1,1)$ и $D(2,2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективног пресликавања са центром у $S(0,2)$ које пресликава праву $y = 0$ на праву $y = x$.

Решење : Тражено перспективно пресликавање f одређено је са три пара тачака. Са слике видимо да је $f(A_2) = C_1$, $f(B) = C_2$ и $f(X) = D$, где је X бесконачно далека тачка праве $y = 0$. Потребно је наћи координате тачке X. У ту сврху потражимо везу између стандардних афиних и наших координата са праве $y = 0$. Ту афиним координатама $(1:1)$, $(0:1)$, $(2:1)$ одговарају базне тачке тј $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$. Ово даје везу

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

. Како X као бесконачно далека има стандардне афине координате $(1:0)$ то множењем горњом матрицом добијамо да су њене координате $X(1:2)$. Координате осталих тачака знамо као базне из услова задатка. Дакле имамо $A_2(0:1)$, $B(1:1)$, $X(1:2)$ које се сликају у $C_1(1:0)$, $C_2(0:1)$, $D(1:1)$, што даје тражене формуле трансформације:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \square$$

.

Друго решење : Може се посматрати рецимо тачка $Y(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ и искористити веза да тачке A_1, A_2, B иду у тачке Y, C_1, C_2. Једино су непознате координате тачке Y но она има стандардне афине координате $(2:3)$ на правој $y = x$, док базне тачке и јединица имају $(0:1)$, $(1:1)$ и $(2:1)$. Као и у првом решењу срачунају се координате за Y и на крају матрица пресликавања. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : У произвољан четвороугао уписан је трапез. Ако се бочне ивице трапеза секу на једној дијагонали датог четвороугла, доказати да су онда основице трапеза паралелне другој дијагонали.

Решење: Нека је $ABCD$ трапез са $AB \parallel CD$ уписан у четвороугао $PQRS$ и рецимо $A \in PQ$, $B \in QR$, $C \in RS$, $D \in SP$. Како је $AD \cap BC \cap QS \neq \varnothing$, то тротеменици $\triangle\, ABQ$ и $\triangle\, DCS$ имају центар перспективе, те по Дезарговој теореми имају и осу перспективе. $AQ \cap DS = \{P\}$, $BQ \cap CS = \{R\}$, $AB \cap CD = \{X\}$, при чему су по теореми P, R и X колинеарне. Одавде је $AB \cap CD \cap PR = \{X\}$, но $AB \parallel CD$, одакле је X бесконачно далека тачка. Зато је и $AB \parallel CD \parallel PR$, што је и требало доказати! $\square$

Друго решење: Задатак се могао решити и применом Обрнуте Дезаргове теореме на тротеменике $\triangle\, ADP$ и $\triangle\, BCR$ $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дата је раван $\tau(t, S', OS_0)$. Представити пројекцију праве купе чија основа припада равни τ, средиште основе је дата тачка S, а раван π је једна тангентна раван купе. Представити затим и пројекцију пресека купе и равни ρ која садржи праву t и тачку M висине купе SV која дели SV у односу $2:1$.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа централног пројектовања представити паралелне равни α и β, представити затим прав ваљак чије основе припадају равнима α и β чија је висина једнака пречнику основе.