Iskazna logika

Pod iskazom podrazumevamo tvrdnju za koju možemo odrediti istinitosnu vrednost (tačno/netačno ili $T/\bot$ ili $1/0$) i pritom iskaze obeležavamo malim slovima latinice

$\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$

Iskazni jezik se sastoji od simbola (slova):

1) iskazna slova $\mathcal{P}$
2) logički veznici ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow, \dots$)
3) pomoćni simboli (zagrade (i))

Iskazna formula je nešto što možemo doživeti kao rečenicu svakodnevnog jezika
Formulu gradimo po pravilima:

1) iskazna slova jesu iskazne formule.
2) ako imamo formule F i G, tada su i:
   $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$,
   $(F \veebar G)$ takođe formule
3) iskaznu formulu dobijamo isključivo primenom pravila 1) i 2)

Definišemo funkciju $v: \mathcal{P} \to \{0,1\}$ koju zovemo valuacija i kažemo da je iskaz p netačan u valuaciji v ako je $v(p)=0$, a tačan ukoliko je $v(p)=1$
Funkciju v proširujemo do funkcije $\hat{v}: For \to \{0,1\}$ koju nazivamo interpretacijom na sledeći način;

1) $\hat{v}(p) = v(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}$

2) Ako su F i G formule za koje znamo $\hat{v}(F)$ i $\hat{v}(G)$, tada je:

$\hat{v}$

F	$\neg F$
0	1
1	0

$\hat{v}$

F	G	$F \wedge G$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\hat{v}$

F	G	$F \vee G$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\hat{v}$

F	G	$F \Leftrightarrow G$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\hat{v}$

F	G	$F \veebar G$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\hat{v}$

F	G	$F \Rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Stav: Na skup od n iskaznih slova, možemo definisati 2^n valuacija

dokaz: Svako iskazno slovo može pri nekoj valuaciji v uzeti tačno 2 vrednosti (0 ili 1). Samim tim, imamo $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ puta}} = 2^n$ mogućnosti.

Zašto iz netačnog može slediti tačno?

1) Ako netačno rešavamo zadatak, mi možemo dobiti tačno rešenje.

2) Beograd je najveći grad na svetu i Niš je grad. Stoga, Beograd je veći od Niša.

Def: Formula F je tautologija ako je tačna pri svim valuacijama iskaznih slova koja se pojavljuju u njoj.

Formula F je kontradikcija ako je netačna pri svim valuacijama iskaznih slova koja se pojavljuju u njoj.

Primer: Da li su sledeće konstrukcije f-le?

1) $(((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p)$ ✓

2) $((p \underbrace{\Rightarrow) \wedge \neg} q) \underbrace{\vee (\Leftrightarrow) \Rightarrow} r)$ ✗

(× pod $\Rightarrow$ i pod $\Leftrightarrow$)

Primer:

1) $p \vee \neg p$ tautologija
2) $p \wedge \neg p$ kontradikcija
3) $p \Leftrightarrow p$ tautologija
4) $p \Leftrightarrow \neg p$ kontradikcija
5) $p \vee r$ ništa

Da je formula tautologija, proveravamo na sledeće načine:

1) tablični metod
2) metod svođenja na apsurd (kontradikciju)
3) metod diskusije po slovu.

miro

1) $F: ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Kako smo u poslednjoj koloni dobili sve jedinice $\Rightarrow$ F je tautologija

2) $F: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

Ovaj metod se sastoji od sledećih koraka:
a) pretpostavimo da F nije tautologija (tj. da postoji neka valuacija u kojoj je F netačna)
b) dokažemo da to nije moguće
c) zaključujemo da polazna pretpostavka nije dobra.

Pretpostavimo da postoji: $\hat{v}: For \to \{0,1\}$ za koju je $\hat{v}(F) = 0$

1) $\hat{v}(((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))) = 0$
2) $\hat{v}((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = 1$
3) $\hat{v}((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)) = 0$
4) $\hat{v}(r \Rightarrow p) = 1$
5) $\hat{v}(q \Rightarrow p) = 0$
6) $\hat{v}(q) = 1$
7) $\hat{v}(p) = 0$
8) $\hat{v}(r) = 0$ iz 4)

} Našli smo istinitosne vrednosti za sva slova

9) Iz 2) znamo da je

(1) $= \hat{v}((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = (0 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 =$ (0)

$\Rightarrow 1 = 0$ ↯ Ovo nije moguće $\Rightarrow$ Polazna pretpostavka ne valja, pa je F tautologija.

miro

3) F: $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

Ovaj metod se sastoji od sledećih koraka:

a) izaberemo slovo koje se najčešće pojavljuje

b) dokažemo da je F tačna kada je to slovo tačno

c) dokažemo da je F tačna kada je to slovo netačno

d) zaključimo da je F uvek tačna.

Biramo slovo p:

I $\hat{v}(p) = 0 \Rightarrow \hat{v}(\neg p) = 1$

$\Rightarrow \hat{v}(F) = 1$ jer je F implikacija čiji je zaključak $\neg p$, a to je tačno

II $\hat{v}(p) = 1 \Rightarrow \hat{v}(\neg p) = 0$

$((1 \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow 0$

IIa) $\hat{v}(q) = 0 \Rightarrow \hat{v}(\neg q) = 1$

$((1 \Rightarrow 0) \wedge 1) \Rightarrow 0$

$(0 \wedge 1) \Rightarrow 0$

$0 \Rightarrow 0$

(1)

IIb) $\hat{v}(q) = 1 \Rightarrow \hat{v}(\neg q) = 0$

$((1 \Rightarrow 1) \wedge 0) \Rightarrow 0$

$(1 \wedge 0) \Rightarrow 0$

$0 \Rightarrow 0$

(1)

Zaključak: F je uvek tačna $\Rightarrow$ F je tautologija.

miro

Osobine operacija:

$\hat{v}(0 \vee F) = \hat{v}(F)$ $\quad$ $\hat{v}(0 \Rightarrow F) = 1$

$\hat{v}(1 \vee F) = 1$ $\quad$ $\hat{v}(1 \Rightarrow F) = \hat{v}(F)$

$\hat{v}(0 \wedge F) = 0$ $\quad$ $\hat{v}(F \Rightarrow 0) = \hat{v}(\neg F)$

$\hat{v}(1 \wedge F) = \hat{v}(F)$ $\quad$ $\hat{v}(F \Rightarrow 1) = 1$

Bitne tautologije (dokazati da jesu tautologije na 1) 2) 3) način)

1) $p \vee \neg p$

2) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$

3) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

4) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

6) $(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$

7) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

8) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

9) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

10) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

miro

Primena iskazne logike

1. Veceras je organizovana žurka o kojoj znamo:

1) Ako dođe E, doći će i H i D
2) Ako ne dođe G, doći će D i B
3) Ako dođe H, doći će i F i D
4) Ako ne dođe G, neće doći C i F
5) Ako dođu A i B, doći će i G
6) Ako ne dođu G i H, neće doći ni C
7) Ako dođe B i ne dođe F, neće doći C
8) Ne dolazi G

Odrediti ko dolazi, a ko ne.

Neka je p iskaz „Osoba P dolazi na žurku"

1) $e \Rightarrow (h \wedge d) = 1$
2) $\neg g \Rightarrow (d \wedge b) = 1$
3) $h \Rightarrow (f \wedge d) = 1$
4) $\neg g \Rightarrow (\neg c \wedge \neg f) = 1$
5) $(a \wedge b) \Rightarrow g = 1$
6) $(\neg g \wedge \neg h) \Rightarrow \neg c = 1$
7) $(b \wedge \neg f) \Rightarrow \neg c = 1$
8) $\neg g = 1 \Leftrightarrow g = 0$

Iz 2) imamo $d \wedge b = 1$, dakle $d = 1$ i $b = 1$

Iz 4) $\neg c \wedge \neg f = 1$, dakle $\neg c = 1$ i $\neg f = 1$, odnosno $c = 0$ i $f = 0$

Iz 5) zaključujemo $a \wedge b = 0$. Kako je $b = 1 \Rightarrow a = 0$

Iz 3) kako je $f \wedge d = 0 \wedge 1 = 0$, zaključujemo $h = 0$

Iz 1) kako je $h \wedge d = 0 \wedge 1 = 0$, zaključujemo da je $e = 0$

miro

Ostrva

Imamo 4 vrste plemena:

1) Vernici (Istinozborci) - uvek govore istinu
2) Lažovi (Nevernici) - uvek lažu
3) Špijuni - govore istinu osobama iz svog plemena, a ostale lažu
4) Dvostruki agluti - lažu osobe iz svog plemena, a inače govore istinu

Stav: Na ostrvu Istinozboraca i Lažova nijedna osoba ne može reći „Ja sam Lažov".

Posmatramo situaciju kada se na ostrvu nalaze 2 plemena i dve osobe A i B razgovaraju.
Interesovaće nas istinitosna vrednost iskaza p koji je izgovoren od strane osobe A osobi B (u zavisnosti od toga kojim plemenima pripadaju osobe A i B)

(I) Ostrvo Istinozboraca i Lažova

$a =$ „A je Istinozborac"
$b =$ „B je Istinozborac"

a	b	p
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Vidimo da je $\boxed{p \Leftrightarrow a = 1}$

(II) Ostrvo Špijuna i Nevernika (Lažov)

$a =$ „A je Špijun"
$b =$ „B je Špijun"

a	b	p
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vidimo da je $\boxed{p \Leftrightarrow (a \wedge b) = 1}$

miro

III Ostrvo Istinozboraca i Duplih agenata:

$a =$ „A je Istinozborac"
$b =$ „B je Istinozborac"

a	b	p
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vidimo da je $p \Leftrightarrow (a \vee b) = 1$

IV Ostrvo Istinozboraca i Špijuna

$a =$ „A je Istinozborac"
$b =$ „B je Istinozborac"

a	b	p
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Vidimo da je $p \Leftrightarrow (b \Rightarrow a) = 1$

V Ostrvo Severnih i Južnih Špijuna

$a =$ „A je Severni Špijun"
$b =$ „B je Severni Špijun"

a	b	p
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vidimo da je $p \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) = 1$

VI Ostrvo Severnih i Južnih Dvostrukih agenata

a	b	p
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a =$ „A je Severni"
$b =$ „B je Severni"

$p \Leftrightarrow (a \veebar b) = 1$

miro

2. Nalazimo se na ostrvu Vernika i Nevernika i sretemo osobe A, B, C, D, E, F, G i H.

1) A: „C je Vernik, D je Nevernik".
2) B: „Tačno jedan od F i A je Vernik"
3) C: „H i E nisu iz istog plemena"
4) D: „G i A su iz istog plemena"
5) E: „F i C nisu iz istog plemena"
6) F: „Bar jedan od B i H je Nevernik"

Odrediti ko je Vernik, a ko Nevernik.

1) $a \Leftrightarrow (c \wedge \neg d) = 1$
2) $b \Leftrightarrow (a \veebar f) = 1$
3) $c \Leftrightarrow (h \veebar e) = 1$
4) $d \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow a) = 1$
5) $e \Leftrightarrow (f \veebar c) = 1$
6) $f \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg h) = 1$

1° Pretpostavimo $a=1$ 2° za domaći diskutovati po $a=0$

Iz 1) zaključujemo $c \wedge \neg d = 1$, tj. $c=1$ i $\neg d = 1$, odnosno $c=1$ i $d=0$

Iz 4) $0 \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow 1)$, pa je $g=0$

a) Pretpostavimo dodatno da je $b=1$

Iz 2) $1 \Leftrightarrow (1 \veebar f)$, pa zaključujemo $f=0$

Iz 5) $e \Leftrightarrow (0 \veebar 1)$ pa je $e=1$

Iz 6) $0 \Leftrightarrow (0 \vee \neg h)$, pa je $\neg h = 0$, tj. $h=1$

Međutim, iz 3) imamo $1 \Leftrightarrow (1 \veebar 1)$, tj. $1 \Leftrightarrow 0$ ↯

b) Stoga, $b=0$

Kako i pod ovom dodatnom pretpostavkom dobijemo ↯, odbacujemo polaznu pretpostavku a=1

Iz 2) $0 \Leftrightarrow (1 \veebar f)$, pa je $f=1$

Iz 5) $e \Leftrightarrow (1 \veebar 1)$, pa je $e=0$

Iz 3) $c \Leftrightarrow (h \veebar e)$, tj. $1 \Leftrightarrow (h \veebar 0)$, pa je $h=1$

Iz 6) $f \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg h)$, tj. $1 \Leftrightarrow (1 \vee 0)$ ✓

Dakle, imamo konzistentnu situaciju.

$a=c=f=h=1$, ostali su 0

miro

3. Nalazimo se na ostrvu Špijuna i Nevernika

1) $A \to B$: „Ako je C Nevernik, onda je H Špijun"
2) $B \to C$: „Ako je F Špijun, onda je A Nevernik"
3) $C \to D$: „Ako je A Nevernik, onda je B Nevernik"
4) $E \to F$: „Ako je B Nevernik, onda je C Špijun"
5) $F \to G$: „Ili je D Špijun, ili je A Nevernik"

1) $(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow h)$
2) $(b \wedge c) \Leftrightarrow (f \Rightarrow \neg a)$
3) $(c \wedge d) \Leftrightarrow (\neg a \Rightarrow \neg b)$
4) $(e \wedge f) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow c)$
5) $(f \wedge g) \Leftrightarrow (d \veebar \neg a)$

1° $a = 0$

Iz 1) kako je $a \wedge b = 0$, mora biti $\neg c \Rightarrow h = 0$, dakle $\neg c = 1$ i $h = 0$, tj. $c = 0$ i $h = 0$

Iz 2) kako je $f \Rightarrow \neg a = f \Rightarrow 1 = 1$ imamo $b \wedge c = 1$, tj. $b = 1$ i $c = 1$

Stoga, dobili smo $\lightning$, pa polazna pretpostavka ne valja

2° $a = 1$

Iz 3) kako je $\neg a \Rightarrow \neg b = 0 \Rightarrow \neg b = 1$, imamo $c \wedge d = 1$, tj. $c = 1$ i $d = 1$

Iz 4) kako je $\neg b \Rightarrow c = \neg b \Rightarrow 1 = 1$, to je $e \wedge f = 1$, odnosno $e = 1$ i $f = 1$

Iz 1) kako je $\neg c \Rightarrow h = 0 \Rightarrow h = 1$, to je $a \wedge b = 1$, pa je $a = 1$ (ali to znamo) i $b = 1$

Iz 5) $(1 \veebar g) \Leftrightarrow (1 \veebar 0)$

$1 \veebar g = 1$, pa je $g = 1$

Iz 2) $(1 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 0)$, tj. $1 \Leftrightarrow 0$ $\lightning$

Stoga, zadatak nema rešenja.

miro

4. Ostrvo Severnih i Južnih Špijuna.

1) $A \to B$: „F je Južni Špijun i C je Južni Špijun"
2) $B \to C$: „E i F nisu iz istog plemena"
3) $C \to D$: „B i A su Severni Špijuni"
4) $D \to E$: „F i A su Severni Špijuni"

1) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c)$
2) $(b \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f)$
3) $(c \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow (b \wedge a)$
4) $(d \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow (f \wedge a)$

1° $a=0$

Iz 3) kako je $b \wedge a = 0 \Rightarrow$

$(c \Rightarrow d) = 0$, tj. istinitosne vrednosti za c i d se razlikuju

Iz 4) vidimo da se istinitosne vrednosti za d i e razlikuju

Stoga, c i e uzimaju istu vrednost.

a) $d=1$

$c=0$

$e=0$

Ako je $f=1$

Iz 1) kako je $\neg f \wedge \neg c = 0 \wedge 1 = 0$

imamo $(a \Leftrightarrow b) = 0$, tj. $b=1$

Iz 2) $(b \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f)$

$(1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \veebar 1)$

$0 \qquad 1$

↯

Odbacujemo $d=1$

Ako je $f=0$

Iz 2) imamo

$(b \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f)$

$(b \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \veebar 0)$

$\qquad\qquad 0$

Dalje, $b=1$

Iz 1) imamo

$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c)$

$(b \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \wedge 1)$

$0 \qquad 1$

↯

pretpostavku

2° $a=1$

⋮

b) $d=0$

$c=1$

$e=1$

Nastaviti za domaći

KNF i DNF

Def: Literal u iskaznoj logici je iskazno slovo, ili njegova negacija ($p, \neg r, \ldots$)

Def: Formula α je u disjunktivnoj normalnoj formi (DNF) ako je oblika $D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_k$ gde je svaki D_i konjunkcija literala, a u konjuktivnoj normalnoj formi (KNF) ako je oblika $K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_k$ gde je svaki K_i disjunkcija literala.

Primer: $p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$ disjunktivna forma

$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_3$ konjuktivna forma

Ako imamo tablicu istinitosnih vrednosti formule α, kako možemo odrediti eksplicitni izraz za α?

1. način: Zapisati formulu koja je tačna akko je formula α tačna (moguće za sve formule koje nisu $\perp$)

2. način: Zapisati formulu koja je netačna akko je formula α netačna (moguće za sve formule koje nisu $\perp$)

1. Odrediti eksplicitni izraz za formulu $\alpha(p,q,r)$ čija je tablica

	p	q	r	α
–	0	0	0	0
•	0	0	1	1
–	0	1	0	0
•	0	1	1	1
–	1	0	0	0
•	1	0	1	1
•	1	1	0	1
•	1	1	1	1

1. način

$\alpha \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ DNF

2. način

$\alpha \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ KNF

Posledica: Preko $\neg, \wedge, \vee$ možemo dobiti sve formule

miro

2. Odrediti koliko ima logički neekvivalentnih formula A takvih da je $((p \wedge g) \vee A) \Leftrightarrow ((\neg g \vee \neg A) \Rightarrow r)$ tautologija pri čemu se u A pojavljuju p, g i r.

p	g	r	A	p∧g	(p∧g)∨A	¬g	¬A	¬g∨¬A	(¬g∨¬A)⇒r	F
0	0	0	v_1	0	v_1	1	$\neg v_1$	1	0	$\neg v_1$
0	0	1	v_2	0	v_2	1	$\neg v_2$	1	1	v_2
0	1	0	v_3	0	v_3	0	$\neg v_3$	$\neg v_3$	v_3	1
0	1	1	v_4	0	v_4	0	$\neg v_4$	$\neg v_4$	1	v_4
1	0	0	v_5	0	v_5	1	$\neg v_5$	1	0	$\neg v_5$
1	0	1	v_6	0	v_6	1	$\neg v_6$	1	1	v_6
1	1	0	v_7	1	1	0	$\neg v_7$	$\neg v_7$	v_7	v_7
1	1	1	v_8	1	1	0	$\neg v_8$	$\neg v_8$	1	1
					L				D	

Da bi F bila tačna ⇒ mora biti $v_1 = v_5 = 0$ i $v_2, v_4, v_6, v_7 = 1$

F ne zavisi od v_3 i v_8, pa oni mogu biti i 0 i 1. Dakle imamo $2 \cdot 2 = 4$ različitih mogućnosti za formulu A

p	g	r	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

$A_1 \equiv (\neg p \wedge \neg g \wedge r) \vee (\neg p \wedge g \wedge r) \vee (p \wedge \neg g \wedge r) \vee (p \wedge g \wedge \neg r)$ DNF

$A_2 \equiv (p \vee g \vee r) \wedge (p \vee \neg g \vee r) \wedge (\neg p \vee g \vee r$

A_3 i A_4 za domaći.

II način da se dođe do KNF i DNF je primenom ekvivalentnih transformacija

$p \Rightarrow g \equiv \neg p \vee g$

$p \Leftrightarrow g \equiv (p \Rightarrow g) \wedge (g \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee g) \wedge (\neg g \vee p)$

$p \veebar g \equiv \neg(p \Leftrightarrow g) \equiv \neg((\neg p \vee g) \wedge (\neg g \vee p)) \equiv$

$\neg(\neg p \vee g) \vee \neg(\neg g \vee p) \equiv$

$(\neg\neg p \wedge \neg g) \vee (\neg\neg g \wedge \neg p) \equiv$

$(p \wedge \neg g) \vee (g \wedge \neg p)$

miro

3. Naći KNF i DNF formule

$\neg(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (\neg p_1 \wedge p_3)$

$\equiv \neg(\neg(p_1 \Rightarrow p_2)) \vee (\neg p_1 \wedge p_3) \equiv$

$(p_1 \Rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3) \equiv$

$(\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3) \equiv$

$\neg p_1 \vee p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$ DNF

$\equiv (\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$

$\equiv (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3)$

$\equiv (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3)$ KNF

4. Odrediti sve logički neekvivalentne formule A takve da je $(p \vee q) \wedge (A \veebar (q \vee r))$ kontradikcija, pri čemu A zavisi samo od slova p, q, r.

Potpuni sistemi veznika

Def: Skup veznika iskazne logike je potpun ako se svaka iskazna formula može zapisati korišćenjem isključivo veznika iz tog skupa.

Posledica: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je potpun sistem veznika (KNF i DNF)

Posledica: $\{\neg, \wedge\}$ je potpun sistem veznika

dokaz: Kako je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ potpun, dovoljno je još da preko $\neg$ i $\wedge$ izrazimo $\vee$

$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Posledica: $\{\neg, \vee\}$ je potpun sistem veznika

dokaz: Dovoljno je izraziti $\wedge$ korišćenjem samo $\neg$ i $\vee$

$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

miro

1. Dokazati da $\{1, \Leftrightarrow\}$ nije potpun sistem veznika.

Dokazaćemo da formulu $\neg p$, gde je p neko iskazno slovo ne možemo dobiti korišćenjem samo 1 i $\Leftrightarrow$.
Posmatrajmo valuaciju v koja svakom iskaznom slovu dodeljuje vrednost 1.
Dokazujemo da za svaku formulu F koja je izgrađena od $\wedge$ i $\Leftrightarrow$ važi da je $\hat{v}(F) = 1$ indukcijom po složenosti formule:

baza: $sl(F) = 0$
F je neko iskazno slovo g
$\hat{v}(F) = \hat{v}(g) = v(g) = 1$

hipoteza: Neka je ovo tačno za sve formule složenosti $< n$

korak: Neka je F formula složenosti n

$F = A \wedge B$ ili $F = A \Leftrightarrow B$
gde su A i B formule manje složenosti od n
pa za A i B važi hipoteza
$\hat{v}(A) = \hat{v}(B) = 1$
$\hat{v}(F) = \hat{v}(A \wedge B) = 1 \wedge 1 = 1$
$\hat{v}(F) = \hat{v}(A \Leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

Međutim $\hat{v}(\neg p) = \neg \hat{v}(p) = \neg v(p) = \neg 1 = 0$
Dakle, zaista ne možemo izraziti formulu $\neg p$.

Da li je moguće naći jednočlan potpun sistem veznika?

Stav: Ako je $\{*\}$ jednočlan potpun sistem veznika, tada je $0 * 0 = 1$ i $1 * 1 = 0$.

dokaz: Dokazujemo da mora biti $0 * 0 = 1$.
Pretpostavimo suprotno da je $0 * 0 = 0$
Posmatrajmo valuaciju koja svakom iskaznom slovu dodeljuje vrednost 0.
Ako je F neka formula izgrađena korišćenjem samo veznika $*$ tada je $\hat{v}(F) = 0$ što vidimo indukcijom po složenosti formule:
baza: $sl(F) = 0$
$F = p$ neko iskazno slovo
$\hat{v}(F) = \hat{v}(p) = v(p) = 0$

miro

hipoteza: Neka ovo važi za sve formule složenosti $<n$

korak: Neka je F formula $sl(F)=n$
Tada je $F = A * B$ gde je $sl(A)$ i $sl(B) < n$

$$\hat{v}(F) = \hat{v}(A * B) = \hat{v}(A) * \hat{v}(B) = 0 * 0 = 0$$

Samim tim, mi ne možemo izraziti formulu $\neg p$ gde je p neko iskazno slovo.
$\hat{v}(\neg p) = \neg \hat{v}(p) = \neg v(p) = \neg 0 = 1$

Analogno se dokaže da $1 * 1 = 0$

Dalje, ako želimo da je $\{*\}$ potpun sistem veznika, za tablicu istinitosti imamo mogućnosti:

p	q	p*q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

↓ Lukasijevičev veznik

p	q	p*q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

p*q je zapravo $\neg p$

p	q	p*q
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

p*q je zapravo $\neg q$

Nisu potpuni sistemi veznika

p	q	p*q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

↑ Šeferov veznik

Iz tablica vidimo $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$ i $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$
Lukasijevičev veznik = „ni li"

Šeferov veznik = „ni"

2. Dokazati da $\{\downarrow\}$ i $\{\uparrow\}$ jesu jednočlani potpuni sistemi veznika.

Kako su $\{\neg, \wedge\}$ i $\{\neg, \vee\}$ potpuni sistemi veznika, dovoljno je da njih dobijemo.

p	p ↓ p	¬p
0	1	1
1	0	0

$p \downarrow p \equiv \neg p$ izrazili smo negaciju

$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv p \vee q$ izrazili smo disjunkciju

} Imamo $\{\neg, \vee\}$ što jeste potpun sistem

p	p ↑ p	¬p
0	1	1
1	0	0

$p \uparrow p \equiv \neg p$

$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv p \wedge q$

} Imamo $\{\neg, \wedge\}$ što jeste potpun sistem.

miro

potpun sistem.

3. Ispitati da li je $\{\underline{\vee}, \Rightarrow\}$ potpun sistem veznika.

Preko $\underline{\vee}$ dobijamo $\bot$

p	$p \underline{\vee} p$
0	0
1	0

$p \underline{\vee} p \equiv \bot$

Znamo da
$(p \Rightarrow \bot) \equiv \neg p$

Dakle, $(p \Rightarrow (p \underline{\vee} p)) \equiv \neg p$
pa i negaciju možemo dobiti preko $\underline{\vee}$ i $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, pa je $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q \equiv$

$(p \Rightarrow (p \underline{\vee} p)) \Rightarrow q$

Stoga, možemo dobiti $\vee$ preko $\underline{\vee}$ i $\Rightarrow$

Kako je $\Rightarrow \{\neg, \vee\}$ p.s.v. to je i $\{\Rightarrow, \underline{\vee}\}$ p.s.v.

Predikatska logika

-Proširenje iskazne logike; uvodimo nove simbole:

1° Kvantifikatori

a) univerzalni ($\forall$) - „za svaki", „za proizvoljni", „za bilo koji"...

b) egzistencijalni ($\exists$) - „postoji" „za neki",...

c) jedinstveni egzistencijalni ($\exists!$) - „postoji jedinstveni"

- Ako je $P(x)$ neko svojstvo objekta x, tada:

1) $(\forall x)\,P(x)$ - svaki ima svojstvo P

2) $(\exists x)\,P(x)$ - neki ima svojstvo P

3) $(\exists!x)\,P(x)$ - tačno jedan ima svojstvo P

$(\exists!x)\,P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Rightarrow y=x))$

Stoga, $\exists!$ je izveden iz $\exists$ i $\forall$

De-Morganovi zakoni:

$\neg(\forall x)\,P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

$\neg(\exists x)\,P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$

Ukoliko je $P(x,y)$ neko svojstvo objekata x i y, tada:

$(\forall x)(\forall y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\,P(x,y)$

$(\exists x)(\exists y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\,P(x,y)$

$(\exists x)(\forall y)\,P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,P(x,y)$

1. Kvadrat svakog realnog broja je nenegativan

$(\forall x)(x\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$

2. Jednačina $5x+7=0$ ima rešenja u skupu racionalnih brojeva.

$(\exists x)(x\in\mathbb{Q} \wedge 5x+7=0)$

3. Postoji najveći realan broj.

$(\exists x)(x\in\mathbb{R} \wedge (\forall y)(y\in\mathbb{R} \Rightarrow y\leq x))$

[Ne može $y<x$ jer za $y=x$, dobijamo $x<x$ ↯]

miro

4. Negacija prethodnog

$\neg(\exists x)(x\in\mathbb{R}\wedge(\forall y)(y\in\mathbb{R}\Rightarrow y\leq x))\Leftrightarrow$

Naveli smo na 1. dvočasu:

$p\Rightarrow q\equiv\neg p\vee q$

$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$ } De-Morganovi zakoni

$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$

$(\forall x)\neg(x\in\mathbb{R}\wedge(\forall y)(y\in\mathbb{R}\Rightarrow y\leq x))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\neg(x\in\mathbb{R})\vee\neg(\forall y)(y\in\mathbb{R}\Rightarrow y\leq x))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\neg(x\in\mathbb{R})\vee(\exists y)\neg(y\in\mathbb{R}\Rightarrow y\leq x))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\neg(x\in\mathbb{R})\vee(\exists y)\neg(\neg(y\in\mathbb{R})\vee(y\leq x)))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\neg(x\in\mathbb{R})\vee(\exists y)(\neg\neg(y\in\mathbb{R})\wedge\neg(y\leq x)))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\neg(x\in\mathbb{R})\vee(\exists y)(y\in\mathbb{R}\wedge y>x))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(x\in\mathbb{R}\Rightarrow(\exists y)(y\in\mathbb{R}\wedge y>x))$

„od svakog realnog broja postoji veći realan broj"

5. Postoji najviše jedan objekat sa svojstvom P.

$(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y)\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\forall y)(\neg(P(x)\wedge P(y))\vee(x=y))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\forall y)(\neg(P(x)\wedge P(y))\vee\neg\neg(x=y))\Leftrightarrow$

$(\forall x)(\forall y)\neg(P(x)\wedge P(y)\wedge\neg(x=y))\Leftrightarrow$

$(\forall x)\neg(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge\neg(x=y))\Leftrightarrow$

$\neg(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge x\neq y)$

„Ne postoje dva različita objekta sa svojstvom P."

6. Postoje tačno dva realna broja čiji je kvadrat jednak 2

$(\exists x)(\exists y)(x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\wedge x^2=2\wedge y^2=2\wedge x\neq y\wedge(\forall z)(z\in\mathbb{R}\wedge z^2=2\Rightarrow(z=x\vee z=y))$.

miro

(2°) Promenljive ($x, y, z, \dots$)

(3°) Predikatski simboli - simboli za označavanje konstanti (2 iz prethodne rečenice), funkcija, operacija (+ iz rečenice 2), relacija (= u prethodnoj rečenici)

- Većina matematike se može iskazati jezikom predikatske logike.

Def: Ako je α neka formula predikatske logike, kažemo da je promenljiva x slobodna u α ukoliko nije pod dejstvom kvantifikatora. Inače je vezana.

Primer: 1) $(\forall x) P(x, y)$ — x: vezana, y: slobodna

2) $(\exists x) Q(x) \wedge (\forall y)(\forall z) R(x, y, z)$ — x: vezano, y: slobodno, z: vezani

Formalni jezici

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

komutativnost

a) sabiranja: $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$

b) množenja: $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$

asocijativnost

a) sabiranja: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$

b) množenja: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

distributivnost: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$

miro

II način da se ovo odradi jeste uvođenjem formalnog jezika u kom uzimamo sve iz iskazne logike kvantifikatore, promenljive i dva pomoćna predikatska simbola S i P, u značenju:

$S(x,y,z)$ je tačno akko je $x+y=z$

$P(x,y,z)$ je tačno akko je $x \cdot y = z$

komutativnost: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x,y,z) \Rightarrow S(y,x,z))$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z) \Rightarrow P(y,x,z))$

asocijativnost: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)$

$(S(x,y,s) \wedge S(s,z,t) \wedge S(y,z,u) \Rightarrow S(x,u,t))$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)$

$(P(x,y,s) \wedge P(s,z,t) \wedge P(y,z,u) \Rightarrow P(x,u,t))$

distributivnost: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)(\forall v)$

$(S(y,z,s) \wedge P(x,s,t) \wedge P(x,y,u) \wedge P(x,z,v) \Rightarrow S(u,v,t))$

Ovo je korisno jer sada za ove rečenice možemo tražiti druge modele u kojima važe (iz geometrije, analize, verovatnoće ....) Od značaja je traženje rečenica koje uvek važe (u svakom modelu) - to su valjane formule predikatske logike.

2. $(\mathbb{R}^2, \in)$

Kreiramo opet formalni jezik u kom uzimamo sve iskazne simbole, kvantifikatore, promenljive i dodajemo 3 predikatska simbola: M, V i D

$M(x)$ je tačno akko je x tačka

$D(x)$ je tačno akko je x prava

$V(x,y)$ je tačno akko tačka x pripada pravoj y $(x \in y)$

1) Za svake dve različite tačke postoji prava koja ih sadrži.

$(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge M(y) \wedge \neg(x=y) \Rightarrow (\exists z)(D(z) \wedge V(x,z) \wedge V(y,z)))$

2) Postoje paralelne međusobno različite prave.

(U ravni smo, pa nemamo mogućnost da su dve prave mimoilazne. Stoga, prave su paralelne i različite akko nemaju zajedničkih tačaka)

$(\exists x)(\exists y)(D(x) \wedge D(y) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg(\exists z)(M(z) \wedge V(z,x) \wedge V(z,y)))$.

3) Za svaku tačku i svaku pravu koja je ne sadrži postoji jedinstvena prava kroz zadatu tačku koja je paralelna sa zadatom pravom.

miro

3. $(\mathbb{N}, 1, \leq)$

Formiramo formalni jezik uzimajući logičkih veznika, kvantifikatora, promenljivih i dva predikatska simbola V i L u značenju:

$V(x,y)$ je tačno akko $x|y$

$L(x,y)$ je tačno akko $x \leq y$

1) Zapisati formulu koja definiše broj 1.

$\varphi(x)$: $(\forall y)\, V(x,y)$

φ je tačno akko $x=1$

$\psi(x)$: $(\forall y)\, L(x,y)$

ψ je tačno akko $x=1$

Formule φ i ψ su tu kako bismo izbegli korišćenje predikatskog simbola za konstantu 1.

2) Napisati definiciju prostog broja.

$P(x)$: $\neg\varphi(x) \wedge (\forall y)(V(y,x) \Rightarrow \varphi(y) \vee (y=x))$

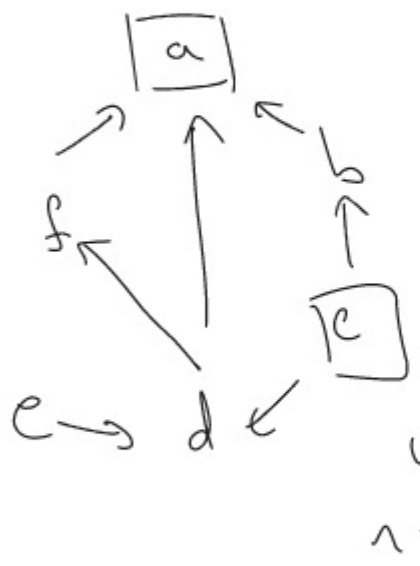
3) Od svakog prirodnog broja postoji prost koji je od njega veći.

$(\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge L(x,y) \wedge \neg(x=y))$.

miro

Primena predikatske logike

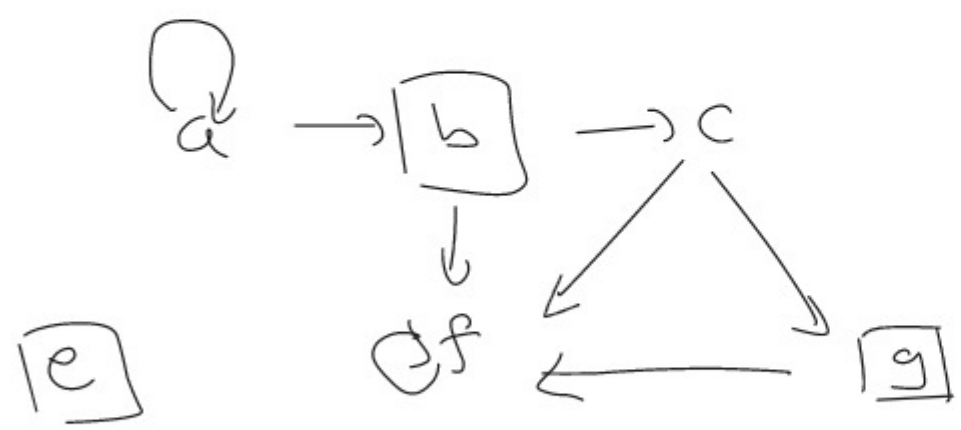
1. Neka $g(x,y)$ označava $x \to y$, a $r(x)$ $\boxed{x}$.
Za svaki element sledećeg dijagrama napisati formulu koja ga definiše



$\varphi_a(x)$: $r(x) \wedge (\exists y)\, g(y,x)$
$\varphi_c(x)$: $r(x) \wedge \neg \varphi_a(x)$
$\varphi_e(x)$: $\neg(\exists y)\, g(y,x) \wedge \neg r(x)$
$\varphi_d(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_e(y))$
$\varphi_f(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_d(y)) \wedge \neg r(x)$
$\varphi_b(x)$: $\neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_d(x) \wedge \neg\varphi_f(x)$

b) Koji elementi zadovoljavaju formulu
$(\forall y)(r(x) \Rightarrow \neg g(x,y))$
Kada je $r(x)$ netačno, formula je tačna. Stoga, formulu zadovoljavaju b, d, f, e.
Za c: $r(x)$ je tačno, pa mora za svako y biti i $\neg g(x,y)$ tačno, tj. $g(x,y)$ netačno. Međutim, za $y=d$ $g(x,y)$ je tačno, pa c ne zadovoljava.
Za a: Mora $g(x,y)$ biti netačno za svako y, što jeste ispunjeno. Dakle, a zadovoljava formulu.

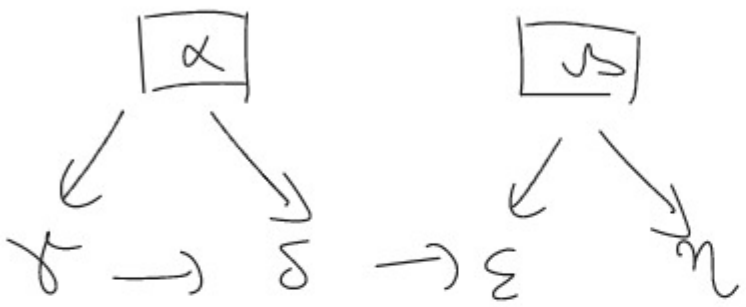
2. Sa $g(x,y)$ označavamo $x \to y$, a sa $r(x)$ $\boxed{x}$
Opisati sve elemente:



$\varphi_c(x)$: $\neg r(x) \wedge \neg g(x,x)$
$\varphi_b(x)$: $(\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_c(y))$
$\varphi_a(x)$: $(\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_b(y))$
$\varphi_f(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_b(y)) \wedge \neg\varphi_c(x)$
$\varphi_d(x)$: $g(x,x) \wedge \neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_f(x)$
$\varphi_e(x)$: $r(x) \wedge \neg(\exists y)\, g(y,x)$
$\varphi_g(x)$: $\neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_f(x) \wedge \neg\varphi_d(x) \wedge \neg\varphi_e(x)$.

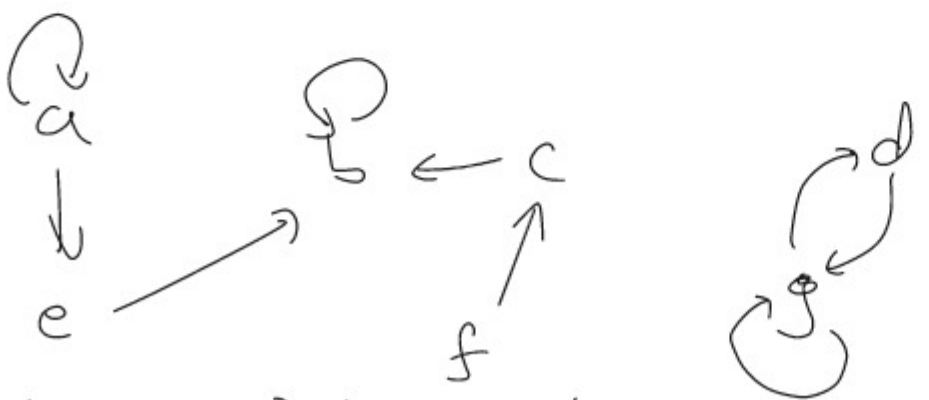
miro

3. Sa $g(x,y)$ označavamo $x \to y$, a sa $r(x)$ $\boxed{x}$.
Opisati sve elemente.



$\varphi_\alpha(x)$: $r(x) \wedge (\exists y)(\exists z)(g(x,y) \wedge g(y,z))$
$\varphi_\beta(x)$: $r(x) \wedge \neg\varphi_\alpha(x)$
$\varphi_\gamma(x)$: $\neg r(x) \wedge (\exists y)(\exists z)(g(x,y) \wedge g(y,z))$
$\varphi_\delta(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_\gamma(y))$.
$\varphi_\varepsilon(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_\delta(y))$
$\varphi_\eta(x)$: $\neg\varphi_\alpha(x) \wedge \neg\varphi_\beta(x) \wedge \neg\varphi_\gamma(x) \wedge \neg\varphi_\delta(x) \wedge \neg\varphi_\varepsilon(x)$.

4.



$\varphi_b(x)$: $(\exists y)(\exists z)(\exists w)(g(y,x) \wedge g(z,x) \wedge g(w,x) \wedge \neg(y=z) \wedge \neg(z=w) \wedge \neg(w=y))$

$\varphi_g(x)$: $g(x,x) \wedge (\exists y)(g(x,y) \wedge g(y,x) \wedge \neg(x=y))$

$\varphi_d(x)$: $(\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_g(y) \wedge \neg(x=y))$
$\varphi_a(x)$: $g(x,x) \wedge \neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_g(x)$

$\varphi_e(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_a(y)) \wedge \neg\varphi_a(x)$
$\varphi_c(x)$: $(\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_b(y)) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_b(x)$
$\varphi_f(x)$: $\neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_g(x) \wedge \neg\varphi_d(x) \wedge \neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_c(x)$

b) Koji elementi zadovoljavaju sledeće:

1) $(\forall y)\neg g(x,y)$

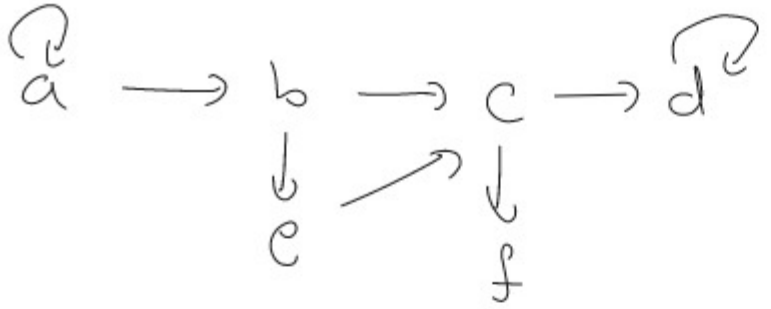
2) $(\exists y)(\exists z)(g(y,x) \wedge g(x,z))$

3) $(\exists y)(\exists z)(\exists w)(g(y,x) \wedge g(z,x) \wedge g(w,x) \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w)$

4) $(\forall y)(g(x,y) \Leftrightarrow g(y,x))$.

miro

5.



$\varphi_a(x)$: $g(x,x) \wedge (\exists y)(g(x,y) \wedge \neg(x=y))$

$\varphi_d(x)$: $g(x,x) \wedge \neg\varphi_a(x)$

$\varphi_b(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_a(y)) \wedge \neg\varphi_a(x)$

$\varphi_c(x)$: $(\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_d(y) \wedge \neg(x=y))$

$\varphi_e(x)$: $(\exists y)(\exists z)(g(y,x) \wedge \varphi_b(y) \wedge g(x,z) \wedge \varphi_c(z))$

$\varphi_f(x)$: $\neg\varphi_a(x) \wedge \neg\varphi_d(x) \wedge \neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_e(x)$

b) Koji elementi zadovoljavaju formule

1) $(\forall y)(g(x,x) \Rightarrow g(y,x))$

Kad god je $g(x,x)$ netačno, formula je tačna, pa je formula je tačna za b, c, e, f.

Za a: $g(x,x)$ je tačno, pa za svako y mora $g(y,x)$ biti tačno. To nije ispunjeno (recimo $y=e$)

Za d: Nije ispunjeno (recimo $y=e$)

2) $(\exists y)(\exists z)(g(x,y) \wedge g(x,z) \wedge y \neq z)$

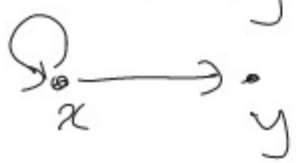
1° $x \neq y \neq z \neq x$ b i c



2° $x = y \neq z$ a



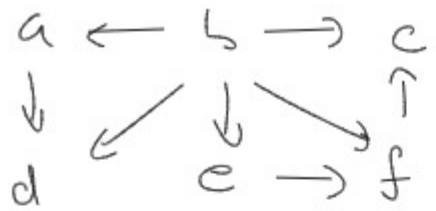
3° $x = z \neq y$ a



Odgovor: a, b, c

miro

6.



$\varphi_b(x)$: $(\forall y)(x \neq y \Rightarrow g(x,y))$

~~$(\forall y)(g(x,y) \wedge x \neq y)$~~

$\varphi_e(x)$: $\neg\varphi_b(x) \wedge (\exists y)(\exists z)(g(x,y) \wedge g(y,z))$

$\varphi_f(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_e(y))$

$\varphi_c(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_f(y))$

$\varphi_d(x)$: $\neg(\exists y)\, g(x,y) \wedge \neg(\exists y)(\exists z)(\exists w)(\varphi_b(y) \wedge g(y,z) \wedge g(z,w) \wedge g(w,x))$

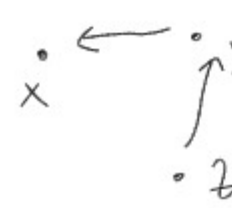
$\varphi_a(x)$: $\neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_f(x) \wedge \neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_d(x)$

b) Koji elementi zadovoljavaju formule:

1) $(\forall y)\, g(x,y)$ nijedan (jer za $y=x$ dobijamo petlju u x)

2) $(\exists y)(\exists z)(g(y,x) \wedge g(z,y))$

1° $x \neq y \neq z \neq x$ — c, d, f



2° $x = y = z$



nijedan element

3° $y = x \neq z$ — nijedan

$g(y,x)$ postaje $g(x,x)$

4° $y = z \neq x$

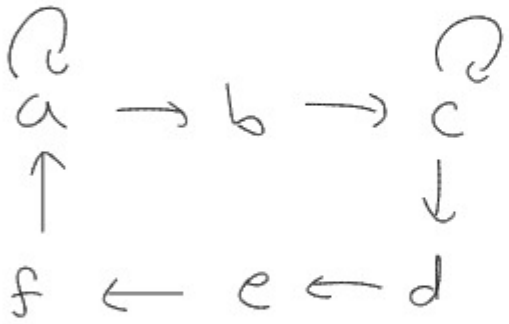
$g(z,y)$ postaje $g(y,y)$ — nijedan

5° $x = z \neq y$



nijedan

7.



$\varphi_b(x)$: $(\exists y)(\exists z)(g(y,y) \wedge g(y,x) \wedge g(x,z) \wedge g(z,z) \wedge \neg(y=z))$

$\varphi_a(x)$: $g(x,x) \wedge (\exists y)(g(x,y) \wedge \varphi_b(y))$

$\varphi_c(x)$: $g(x,x) \wedge (\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_b(y))$

$\varphi_d(x)$: $(\exists y)(g(y,x) \wedge \varphi_c(y)) \wedge \neg\varphi_c(x)$

$\varphi_e(x)$: $(\exists y)(\varphi_d(y) \wedge g(y,x))$

$\varphi_f(x)$: $(\exists y)(\varphi_a(y) \wedge g(x,y) \wedge \neg(x=y))$

b) Koji elementi zadovoljavaju formulu $(\exists y)(g(x,y) \wedge g(y,y))$?

miro

Prirodna dedukcija

Pravila:

(1) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ $(\wedge_E^l)$ (2) $\dfrac{A \wedge B}{B}$ $(\wedge_E^d)$

(3) $\dfrac{A,\ B}{A \wedge B}$ $(\wedge_u)$

(4) $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ $(\neg\neg_E)$ (5) $\dfrac{A}{\neg\neg A}$ $(\neg\neg_u)$

(6) $\dfrac{A \Rightarrow B,\ A}{B}$ $(\Rightarrow_E)$ ili modus ponens (MP)

(7) $\dfrac{A \Rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$ modus tolens (MT)

(8) $\dfrac{\begin{array}{|c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}$ $(\Rightarrow_u)$

(9) $\dfrac{A,\ \neg A}{\bot}$ $(\neg_E)$ ili uvođenje kontradikcije

(10) $\dfrac{\begin{array}{|c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}$ $(\neg_u)$

(11) $\dfrac{A}{A \vee B}$ $(\vee_u^l)$ (12) $\dfrac{B}{A \vee B}$ $(\vee_u^d)$

(13) $\dfrac{A \vee B,\ \begin{array}{|c} A \\ \vdots \\ C \end{array},\ \begin{array}{|c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}$ $(\vee_E)$

(14) $\dfrac{\bot}{A}$ $(\bot_E)$ ex falso quodlibet (efq)

(15) $\dfrac{A \vee B,\ \neg A}{B}$ (16) $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{A}$ disjunktivni silogizmi (DS)

(17) $\dfrac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}$ $(\Leftrightarrow_u)$

miro

(18) $\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}\ (\Leftrightarrow E^{ld})$ (19) $\dfrac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}\ (\Leftrightarrow E^{dl})$

(20) $\dfrac{A \Rightarrow B \quad , \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$ tranzitivnost implikacije $(\Rightarrow_T)$

(21) $\dfrac{}{A \vee \neg A}$ tertium non datur (tnd)
zakon isključenja trećeg

(22) $\dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$ (23) $\dfrac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$

(24) $\dfrac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$ $\dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}$

} De Morganovi zakoni

Teorema dedukcije: $\Gamma, A \vdash B$ akko $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$

1. Dokazati sekvent:
$(p \wedge q) \wedge s \ , \ r \wedge t \vdash t \wedge q$

1.	$(p \wedge q) \wedge s$		
2.	$r \wedge t$		
3.	$p \wedge q$	$(\wedge E^l)$	na 1.
4.	q	$(\wedge E^d)$	na 3.
5.	t	$(\wedge E^d)$	na 2.
6.	$t \wedge q$	$(\wedge u)$	na 4. i 5.

2. $p \Rightarrow q \ , \ \neg r \Rightarrow \neg q, \ r \Rightarrow s \vdash p \Rightarrow s$

1.	$p \Rightarrow q$		
2.	$\neg r \Rightarrow \neg q$		
3.	$r \Rightarrow s$		
4. |	p		
5. |	q	(MP)	na 1. i 4.
6. |	$\neg\neg q$	$(\neg\neg u)$	na 5.
7. |	$\neg\neg r$	(MT)	na 2. i 6.
8. |	r	$(\neg\neg_E)$	na 7.
9. |	s	(MP)	na 3. i 8
10.	$p \Rightarrow s$	$(\Rightarrow u)$	

II način:
preko teoreme dedukcije:
dokazujemo sekvent
$p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow s, p \vdash s$

miro

3. $\vdash ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	
2.	$p \Rightarrow q$	
3.	p	
4.	q	(MP) na 2. i 3.
5.	$q \vee r$	($\vee_u^l$) na 4.
6.	$p \Rightarrow q \vee r$	($\Rightarrow u$) na 3.-5.
7.	$p \Rightarrow r$	
8.	p	
9.	r	(MP) na 7. i 8.
10.	$q \vee r$	($\vee_u^d$) na 9.
11.	$p \Rightarrow q \vee r$	($\Rightarrow u$) na 8.-10.
12.	$p \Rightarrow q \vee r$	($\vee_E$) na 1., 2.-6. i 7.-11.
13.	$((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$	($\Rightarrow u$) na 1.-12.

Lema 1: $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ $\qquad$ $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$

dokaz:

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	
2.	α	
3.	$\neg\neg\alpha$	($\neg\neg u$) na 2.
4.	β	(DS) na 1. i 3.
5.	$\alpha \Rightarrow \beta$	

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	
2.	$\alpha \vee \neg\alpha$	(tnd)
3.	α	
4.	β	(MP) na 1. i 3.
5.	$\neg\alpha \vee \beta$	($\vee_u^d$)
6.	$\neg\alpha$	
7.	$\neg\alpha \vee \beta$	($\vee u$) na 6.
8.	$\neg\alpha \vee \beta$	($\vee_E$) na 2. i 3.-5. i 6.-7.

Lema 2: $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \alpha$ $\qquad$ $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \neg\beta$

dokaz:

1.	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	
2.	$\neg\alpha$	
3.	$\neg\alpha \vee \beta$	($\vee_u^l$) na 2.
4.	$\alpha \Rightarrow \beta$	lema 1. na 3.
5.	$\perp$	($\neg_E$) na 1. i 4.
6.	$\neg\neg\alpha$	($\neg u$) na 2.-5.
7.	α	($\neg\neg_E$)

domaći (potpuno analogno)

miro

4. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))) \Rightarrow t,\ s \wedge t \Rightarrow q \wedge r,\ \neg t \vee s \vdash q$

1.	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))) \Rightarrow t$	
2.	$s \wedge t \Rightarrow q \wedge r$	
3.	$\neg t \vee s$	
4.	$t \Rightarrow s$	lema 1. na 3.
5.	$t \vee \neg t$	(tnd)
6. |	t	
7. |	s	(MP) na 4. i 6.
8. |	$s \wedge t$	($\wedge_u$) na 6. i 7.
9. |	$q \wedge r$	(MP) na 2. i 8.
10. |	q	($\wedge_E^l$) na 9.
11. |	$\neg t$	
12. |	$\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)))$	(MT) na 1. i 11.
13. |	$\neg(q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))$	lema 2. na 12.
14. |	q	lema 2. na 13.
15.	q	($\vee_E$) na 5., 6.-10. i 11.-14.

5. $p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r,\ p \vee r \Leftrightarrow q \vee r \vdash p \Leftrightarrow q$

1.	$p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r$	
2.	$p \vee r \Leftrightarrow q \vee r$	
3.	$p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$	($\Leftrightarrow_E^{ld}$) na 1.
4.	$p \vee r \Rightarrow q \vee r$	($\Leftrightarrow_E^{ld}$) na 2.
5. |	p	
6. |	$p \vee r$	($\vee_u^l$) na 5.
7. |	$q \vee r$	(MP) na 4. i 6.
8. |	$\neg q$	
9. \ |	r	
10. \ |	$p \wedge r$	($\wedge_u$) na 5. i 9.
11. \ |	$q \wedge r$	(MP) na 3. i 10.
12. \ |	q	($\wedge_E^l$) na 11.
13. |	q	($\vee_E$) na 7. i 8. i 9.-12.
14.	$p \Rightarrow q$	($\Rightarrow_u$) na 5.-13.

Ostaje još da se dokaže $q \Rightarrow p$

⋮

n.	$q \Rightarrow p$	
n+1.	$p \Leftrightarrow q$	($\Leftrightarrow_u$) na 14. i n.

miro

6. $p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)$, $\neg p \vee q \vdash p \Rightarrow r$

1.	$p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)$	
2.	$\neg p \vee q$	
3. |	p	
4. |	$\neg\neg p$	$(\neg\neg_u)$ na 3.
5. |	q	(DS) na 2. i 4.
6. |	$\neg r \Rightarrow \neg q$	(MP) na 1. i 3.
7. |	$\neg\neg q$	$(\neg\neg_u)$ na 5.
8. |	$\neg\neg r$	(MT) na 6. i 7.
9. |	r	$(\neg\neg_E)$ na 8.
10.	$p \Rightarrow r$	

7. $b \Leftrightarrow e \vee f$, $f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b) \vdash b$

1.	$b \Leftrightarrow e \vee f$	
2.	$f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)$	
3. |	$\neg b$	
4. |	$e \vee f \Rightarrow b$	$(\Leftrightarrow_E^{dl})$ na 1.
5. |	$\neg(e \vee f)$	(MT) na 3. i 4.
6. |	$\neg e \wedge \neg f$	DeMorgan na 5.
7. |	$\neg f$	$(\wedge_E^{d})$ na 6.
8. |	$(a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow f$	$(\Leftrightarrow_E^{dl})$ na 2.
9. |	$\neg(a \Rightarrow \neg b)$	(MT) na 7. i 8.
10. |	$\neg\neg b$	lema 2 na 9.
11. |	$\bot$	$(\neg_E)$ na 3. i 10.
12.	$\neg\neg b$	$(\neg_u)$ na 3.-11.
13.	b	$(\neg\neg_E)$ na 12.

miro

Skupovi

- Neka su A i B skupovi

$A \subseteq B$ ako $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A = B$ ako $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ako $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A)$ ako $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$

- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- $A \triangle B = \{ x \mid x \in A \underline{\vee} x \in B \}$



- $A \subseteq X$, gde je X univerzalni skup (univerzum diskursa), tada $A^c = X \setminus A$

Osnovne osobine:

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\qquad$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A \cup \phi = A$ $\qquad$ $A \cap \phi = \phi$

$A \cap B \subseteq A$ $\qquad$ $A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq A \cup B$ $\qquad$ $B \subseteq A \cup B$

1. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \triangle C)$ ako $x \in A \wedge x \in B \triangle C$ ako

$\underbrace{x \in A}_{a} \wedge (\underbrace{x \in B}_{b} \underline{\vee} \underbrace{x \in C}_{c})$ ako $(\underbrace{x \in A}_{a} \wedge \underbrace{x \notin B}_{b}) \underline{\vee} (\underbrace{x \in A}_{a} \wedge \underbrace{x \in C}_{c})$

miro

$a \wedge (b \veebar c)$ i želim da dokažemo da je ono isto što i $(a \wedge b) \veebar (a \wedge c)$

a	b	c	$b \veebar c$	$a \wedge (b \veebar c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \veebar (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

iste vrednosti, dakle
to su ekivalentne formule

akko $x \in A \cap B$ $\veebar$ $x \in A \cap C$ akko $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Stoga, $x \in A \cap (B \triangle C) \iff x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
Po definiciji, $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2. Dokazati da je $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ akko $C \subseteq A$.

$\Rightarrow$: Neka je $A \cap (B \cup C) \overset{(*)}{=} (A \cap B) \cup C$
Dokazujemo $C \subseteq A$.
Pretpostavimo suprotno, da $C \not\subseteq A$, tj. da postoji $y \in C$, $y \notin A$
Kako je $y \in C \Rightarrow y \in (A \cap B) \cup C$ jer je $C \subseteq (A \cap B) \cup C$
Kako $y \notin A \Rightarrow y \notin A \cap (B \cup C)$ jer je $A \cap (B \cup C) \subseteq A$
Ovo je $\lightning$ sa $(*)$
Stoga, pretpostavka je pogrešna, pa je $C \subseteq A$.

miro

$\Leftarrow$: Neka je $C \subseteq A$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (\underbrace{A \cap C}_{C \text{ jer je } C \subseteq A}) = (A \cap B) \cup C$

3. Rešiti skupovnu jednačinu po X, ako su A i B zadati skupovi.

$A \cup X = (A \cap X) \triangle B$

a: $y \in A$

b: $y \in B$

x: $y \in X$

Znam da važi

$y \in A \cup X \Leftrightarrow y \in (A \cap X) \triangle B$

$(y \in A \vee y \in X) \Leftrightarrow ((y \in A \wedge y \in X) \veebar y \in B)$

$(a \vee x) \Leftrightarrow ((a \wedge x) \veebar b)$

Treba naći iskaz x tako da važi ova ekvivalencija

a	b	x	$a \vee x$	$a \wedge x$	$(a \wedge x) \veebar b$	F
0	0	v_1	v_1	0	0	$\neg v_1$
0	1	v_2	v_2	0	1	v_2
1	0	v_3	1	v_3	v_3	v_3
1	1	v_4	1	v_4	$\neg v_4$	$\neg v_4$

Stoga, $v_1 = v_4 = 0$

$v_2 = v_3 = 1$ Dakle,

a	b	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$X \Leftrightarrow (a \veebar b)$

Dakle, $X = A \triangle B$

miro

4. Rešiti skupovnu jednačinu:

$(A \cap B) \cup X = (A \cap B \cap X) \cup C \quad i \quad A \cap B \cap C \subseteq X$

$a : y \in A$
$b : y \in B$
$c : y \in C$
$x : y \in X$

Svođenjem na jezik iskazne logike, jednačina $(A \cap B) \cup X = (A \cap B \cap X) \cup C$ postaje

$(a \wedge b) \vee x \Leftrightarrow (a \wedge b \wedge x) \vee c$

L D

				L		D		
a	b	c	x	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee x$	$a \wedge b \wedge x$	$(a \wedge b \wedge x) \vee c$	F
0	0	0	v_1	0	v_1	0	0	$\neg v_1$
0	0	1	v_2	0	v_2	0	1	v_2
0	1	0	v_3	0	v_3	0	0	$\neg v_3$
0	1	1	v_4	0	v_4	0	1	v_4
1	0	0	v_5	0	v_5	0	0	$\neg v_5$
1	0	1	v_6	0	v_6	0	1	v_6
1	1	0	v_7	1	1	v_7	v_7	v_7
1	1	1	v_8	1	1	v_8	1	1

Stoga, vidimo $v_1 = v_3 = v_5 = 0$

$v_2 = v_4 = v_6 = v_7 = 1$

Za v_8 nemamo jedinstveno rešenje, pa elemente koji odgovaraju toj poslednjoj situaciji $(y \in A \cap B \cap C)$ možemo proizvoljno dodavati. Međutim, uslov $A \cap B \cap C \subseteq X$ nam diktira $v_8 = 1$

a	b	c	x	
0	0	0	0	
0	0	1	1	•
0	1	0	0	
0	1	1	1	•
1	0	0	0	
1	0	1	1	•
1	1	0	1	•
1	1	1	1	•

Za x konstruišemo DNF:

$x \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

$X = (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

miro

Def: Dekartov proizvod skupova A i B je
$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

Stav (princip proizvoda): Ako je $|A| = m$, a $|B| = n$, tada
$|A \times B| = m \cdot n$

Def: Partitivni skup skupa A je
$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

Stav: Ako je $|A| = n$, tada je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
dokaz: Ako je $B \subseteq A$, jedine mogućnosti za elemente skupa B su elementi skupa A.
Ako je $a \in A$, tada za njega imamo 2 mogućnosti u odnosu na skup B: 1° $a \in B$ 1
2° $a \notin B$ 0
Stoga, imamo $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ puta}} = 2^n$ mogućnosti.

5. Naći $\mathcal{P}(S)$ ako je
a) $S = \{\phi\}$ $|S| = 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2$
b) $S = \{\{\phi\}\}$ $|S| = 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2$
c) $S = \{\phi, \{\phi\}\}$ $|S| = 2 \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 4$

a) $\mathcal{P}(S) = \{\phi, \{\phi\}\}$
b) $\mathcal{P}(S) = \{\phi, \{\{\phi\}\}\}$
c) $\mathcal{P}(S) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

$\phi \subseteq X$ jer $A \subseteq B$ ako $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
$X \subseteq X$
Kada je $A = \phi$, pretpostavka implikacije je netačna, pa je implikacija tačna

6. Dokazati da za sve skupove važi
$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

U opštem slučaju, obratna inkluzija ne važi
Uzmimo $a \in A \setminus C$ $a \in A$ $a \notin C$
$d \in D \setminus B$ $d \in D$ $d \notin B$
$a \in A \cup C$ $d \in B \cup D$
$(a,d) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$
$(a,d) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$
jer $(a,d) \notin A \times B$ jer $d \notin B$
$(a,d) \notin C \times D$ jer $a \notin C$

miro

$(x,y) \in (A\times B)\cup(C\times D) \iff$

$(x,y) \in A\times B \vee (x,y) \in C\times D \iff$

$(x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in C \wedge y\in D)$

$\Rightarrow$

$(x\in A\cup C \wedge y\in B\cup D) \vee (x\in A\cup C \wedge y\in B\cup D)$

$\iff (x,y)\in (A\cup C)\times(B\cup D) \vee (x,y)\in (A\cup C)\times(B\cup D)$

$\iff (x,y)\in (A\cup C)\times(B\cup D)$

Stoga, $(A\times B)\cup(C\times D) \Rightarrow (A\cup C)\times(B\cup D)$.

$\emptyset \times A = A\times\emptyset = \emptyset$

7. Neka su A i B neprazni skupovi i $(A\times B)\cup(B\times A) = C\times D$. Dokazati da je $A=B=C=D$.

Po prethodnom zadatku

$C\times D = (A\times B)\cup(B\times A) \subseteq (A\cup B)\times(A\cup B)$

Stoga, kako je $C\times D \neq \emptyset$ (jer $\underbrace{A\times B}_{\neq\emptyset} \subseteq (A\times B)\cup(B\times A) = \underbrace{C\times D}_{\neq\emptyset}$)

to je $C\neq\emptyset$ i $D\neq\emptyset$

Dalje, $\underline{C\subseteq A\cup B}$

$\underline{D\subseteq A\cup B}$

Sa druge strane, kako je $(A\times B)\cup(B\times A) = C\times D$

to je $A\times B\subseteq C\times D$ $\quad B\times A\subseteq C\times D$

$A\subseteq C$ $\quad B\subseteq C \Rightarrow \underline{A\cup B\subseteq C}$

$B\subseteq D$ $\quad A\subseteq D \Rightarrow \underline{A\cup B\subseteq D}$

$A\cup B = C$

$A\cup B = D$

(možemo zaključiti ovo jer $A\neq\emptyset$ i $B\neq\emptyset$)

Dalje, imamo $C=D=A\cup B$

Ako još dokažemo da je $A=B$, imamo

$C=D=A\cup A=A=B$

Imamo da je $(A\times B)\cup(B\times A) = C\times D = (A\cup B)\times(A\cup B)$ (*)

Dokažimo $A\subseteq B$ (da je $B\subseteq A$ se pokazuje potpuno analogno):

Pretpostavimo suprotno, da $A\not\subseteq B$, tj. da postoji $a\in A$ takav da $a\notin B$.

Tada $a\in A\cup B$, pa $(a,a)\in (A\cup B)\times(A\cup B)$

Međutim, $\left.\begin{array}{l}(a,a)\notin A\times B\\ (a,a)\notin B\times A\end{array}\right\} \Rightarrow (a,a)\notin (A\times B)\cup(B\times A)$ Ovo je $\lightning$ sa (*).

Stoga, $A\subseteq B$.

miro

Relacije

Def: Binarna relacija između elemenata skupa A i skupa B je bilo koji podskup $R \subseteq A \times B$ (za $A = B$, kažemo da je R relacija na skupu A)

Primer: $\leq$ na $\mathbb{R}$

$2 \leq 3 \iff (2,3) \in \leq$ (infiksna notacija)

$3 \not\leq 2 \iff (3,2) \notin \leq$

Osobine relacija $R \subseteq A \times A = A^2$

Il pravih
$<$ na $\mathbb{R}$
$=$ na $\mathbb{R}$
$>$ na $\mathbb{R}$
$\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$
$\leq$ na $\mathbb{R}$

1) refleksivnost - $\forall a \in A \quad aRa$
2) antirefleksivnost - $\forall a \in A \quad a \not R a$
3) simetričnost - $\forall a,b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa$
4) asimetričnost - $\forall a,b \in A \quad aRb \Rightarrow b \not R a$
5) antisimetričnost - $\forall a,b \in A \quad aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
6) tranzitivnost - $\forall a,b,c \in A \quad aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je ekvivalencija ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna ($=$, $\parallel$, $\cong$, $\simeq$, $\equiv_{\text{modu}}$, ...)

Relacija $R \subseteq A \times A$ je poredak ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna ($\leq$, $\subseteq$, ...).
Za poredak kažemo da je linearan (totalan) ako su svaka dva elementa u relaciji ($\forall a,b \in A$ važi aRb ili bRa)

Primer: $\leq$ jeste linearan poredak na $\mathbb{R}$
$\subseteq$ nije linearan poredak:
$\{1\}$ $\{2\}$ nisu u relaciji ni na jedan način

miro

Relacije ekvivalencije

$\sim$ neka relacija ekvivalencije na skupu A
Za $a \in A$ definišemo njegovu klasu
$[a] = C_a = \{b \in A \mid a \sim b\}$
$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$

Primer: $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 3)}$ $\quad x \equiv_{(\mathrm{mod}\ 3)} y$ za $x, y \in \mathbb{Z}$
akko $3 \mid y - x$
akko x i y daju isti ostatak pri deljenju sa 3

Imamo 3 ostatka pri deljenju sa 3 - 0, 1, 2
$[0] = \{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\}$
$[1] = \{1, 4, -2, \ldots\}$
$[2] = \{2, 5, -1, \ldots\}$
$\mathbb{Z}/_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 3)}} = \{[0], [1], [2]\}$ je traženi skup

Važe svojstva:
$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$
$a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
$\bigcup_{a \in A} [a] = A$
} jedna particija skupa A na neprazne, disjunktne podskupove

1. Ako su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije na A, tada je i $\rho_1 \cap \rho_2$ relacija ekvivalencije na A. Da li isto važi i za $\rho_1 \cup \rho_2$?

ρ_1 i ρ_2 su refleksivne, simetrične i tranzitivne

R: $(a,a) \in \rho_1 \cap \rho_2 \quad \forall a \in A$?
$\Leftrightarrow (a,a) \in \rho_1 \wedge (a,a) \in \rho_2 \quad \forall a \in A$ ✓
što jeste ispunjeno jer su ρ_1 i ρ_2 refleksivne.

miro

S: $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cap \rho_2$

$(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (a,b) \in \rho_1 \wedge (a,b) \in \rho_2$, ali

ρ_1 i ρ_2 jesu simetrične $\Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \wedge (b,a) \in \rho_2$ ✓

$\Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cap \rho_2$

T: $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2 \wedge (b,c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \overset{?}{\Rightarrow} (a,c) \in \rho_1 \cap \rho_2$

$(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2 \wedge (b,c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow$

$\underline{(a,b) \in \rho_1} \wedge \underline{(a,b) \in \rho_2} \wedge \underline{(b,c) \in \rho_1} \wedge \underline{(b,c) \in \rho_2}$

$\Rightarrow ((a,b) \in \rho_1 \wedge (b,c) \in \rho_1) \wedge ((a,b) \in \rho_2 \wedge (b,c) \in \rho_2)$

$\Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \wedge (a,c) \in \rho_2 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \cap \rho_2$ ✓

$\Uparrow$ ρ_1 i ρ_2 su tranzitivne

$\rho_1 \cup \rho_2$: refleksivnost i simetričnost prolaze, ali tranzitivnost puca u opštem slučaju:

Primer: $A = \{a,b,c\}$

$\rho_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$\rho_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$\rho_1 \cup \rho_2$ ima (a,b) i (b,c), ali nema (a,c), pa nije tranzitivna.

2. Dopuniti $\rho = \{(1,1), (1,2), (2,3), (4,4), (4,5)\}$ do minimalne relacije ekvivalencije na skupu $\{1,2,3,4,5\}$.

	1	2	3	4	5
1	T	T	T		
2	T	T	T		
3	T	T	T		
4				T	T
5				T	T

Treba nam refleksivnost

$\Rightarrow$ dodajemo $(2,2), (3,3), (5,5)$

Treba nam simetričnost

$(1,2) \in \rho \Rightarrow (2,1)$ dodajemo

$(2,3) \in \rho \Rightarrow (3,2)$ dodajemo

$(4,5) \in \rho \Rightarrow (5,4)$ dodajemo

$(1,2) \in \rho$ i $(2,3) \in \rho \Rightarrow (1,3)$ dodajemo

$\Rightarrow (3,1)$ dodajemo

$C_1 = \{1,2,3\}$ je klasa
$C_2 = \{4,5\}$ je klasa
} imamo particionisanje skupa $\{1,2,3,4,5\}$ na klase.

miro

Relacije poretka

Def: Neka je $\leq$ poredak na skupu A i neka je $B \subseteq A$.
Za $a \in A$ kažemo da je:

1) gornje ograničenje skupa B ako je $\forall b \in B \quad b \leq a$
2) donje ograničenje skupa B ako je $\forall b \in B \quad a \leq b$
3) najveći element skupa B ako mu pripada i jeste jedno gornje ograničenje.
4) najmanji element skupa B ako mu pripada i jeste jedno donje ograničenje.
5) maksimalni element skupa B ako mu pripada i od njega ne postoji veći element skupa B.
6) minimalni element skupa B ako mu pripada i od njega ne postoji manji element skupa B.
7) supremum skupa B ako je njegovo najmanje gornje ograničenje
8) infimum skupa B ako je njegovo najveće donje ograničenje.

Primer: 1) $\leq$ na $\mathbb{R}$ i $[0,1)$



gornje ograničenje : 2
donje ograničenje: -11
najveći : nema
najmanji: 0
maksimalni : ne postoji
minimalni: 0
supremum: 1
infimum: 0

miro

2) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$

$\subseteq$ i skup $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$

$= \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$

gornje ograničenje: $\{1,2,3\}$

donje ograničenje: $\emptyset$

najveći: ne postoji

najmanji: ne postoji

maksimalni: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}$

minimalni: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

supremum: $\{1,2,3\}$

infimum: $\emptyset$

Stav: Najveći, najmanji, supremum i infimum (ako postoje) su jedinstveni, dok maksimalni i minimalni ne moraju biti.

1. Neka je na skupu:

a) $[0,\pi] \times [-,\pi]$

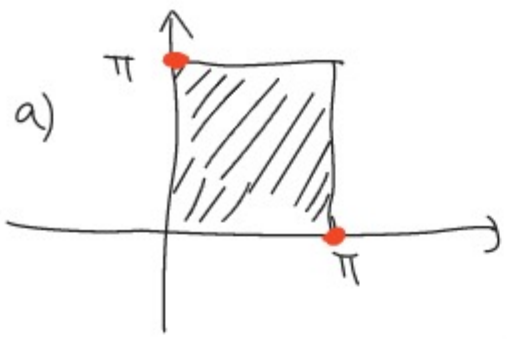
b) kružna površ sa centrom u $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ poluprečnika $\frac{\pi}{2}$

zadata relacija ρ sa:

$(x,y)\ \rho\ (z,w)$ akko $\cos x \leq \cos z$ i $y \leq w$.

Dokazati da je ρ poredak i naći najveći, najmanji, minimalni i maksimalni.

a)



$(x,y) \rho (z,w)$ akko

$\cos x \leq \cos z$ i $y \leq w$

[ali cos je opadajuća funkcija na $[0,\pi]$]

akko $x \geq z$ i $y \leq w$

$\geq$ i $\leq$ jesu relacije poretka

Lema: Neka je ρ poredak na A i σ poredak na B, tada je $\rho \times \sigma$ poredak na $A \times B$

$((a_1,b_1)\ \rho\times\sigma\ (a_2,b_2)$ akko $a_1 \rho a_2$ i $b_1 \sigma b_2)$

dokaz: dokažite da $\rho \times \sigma$ zadovoljava refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost

Po ovoj lemi, i relacija $\rho = \geq \times \leq$ jeste poredak.

Najveći: element (a,b) je najveći ako

$(x,y)\ \rho\ (a,b)$ za bilo koje $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$

$\Leftrightarrow$ $x \geq a$ i $y \leq b$ za bilo koje $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$

$\Rightarrow a = 0$ i $b = \pi$ $\Rightarrow$ $(0,\pi)$ je najveći, pa i jedinstven maksimalan

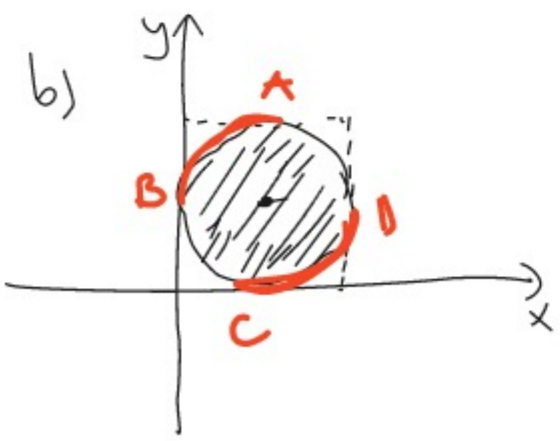
Najmanji: element (a,b) je najmanji ako

$(a,b)\ \rho\ (x,y)$ za bilo koje $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$

$\Leftrightarrow$ $a \geq x$ i $b \leq y$ za bilo koje $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$

$\Rightarrow a = \pi$ i $b = 0$ $\Rightarrow$ $(\pi,0)$ je najmanji, pa i jedinstven minimalan.

b)



krug $\subseteq [0,\pi] \times [0,\pi]$ (upisan krug u taj kvadrat)

$(x,y)\ \rho\ (z,w)$ akko

$\cos x \leq \cos z$ i $y \leq w$ akko

$x \geq z$ i $y \leq w$

Nemamo najveći, ali imamo beskonačno mnogo maksimalnih - sve točke sa luka $\overset{\frown}{AB}$

Nemamo najmanji, ali imamo beskonačno mnogo minimalnih - sve točke sa luka $\overset{\frown}{CD}$

miro

2. Odrediti najveći, najmanji, minimalni i maksimalni element skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ u odnosu na relaciju $|$.

Najmanji: 1 $\Rightarrow$ jedinstven minimalan je 1

Najveći: ne postoji

Maksimalni: 5, 6, 7, 8 jer ne dele ništa (osim sebe)

miro

Funkcije

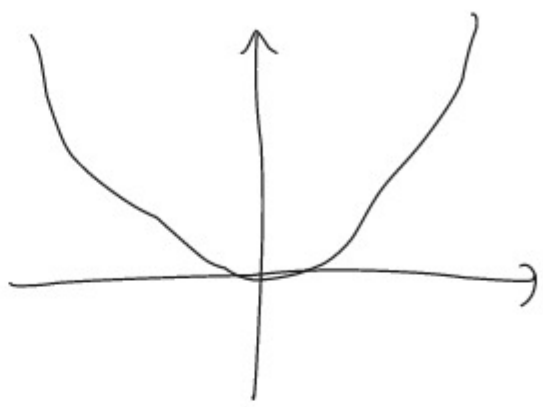
Def: Funkcija f iz skupa A u skup B ($f: A \to B$) je svaka relacija između elemenata skupa A i skupa B ($f \subseteq A \times B$) takva da $\forall a \in A \; \exists! b \in B$ za koje je $(a,b) \in f$ (ovo pišemo $b = f(a)$)

Def: Za $f: A \to B$ kažemo da je „1-1" (injektivna) ako $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
(ekvivalentno, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

Def: Za $f: A \to B$ kažemo da je „na" (surjektivna) ako $\forall b \in B \; \exists a \in A \quad f(a) = b$

Def: Za $f: A \to B$ kažemo da je bijekcija ako je „1-1" i „na".

Def: Za dve funkcije f i g kažemo da su jednake ($f = g$ ili $f \equiv g$) ako su im jednaki domeni, kodomeni i pravila dodele.



Primer: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$
Nije „1-1", ni „na"

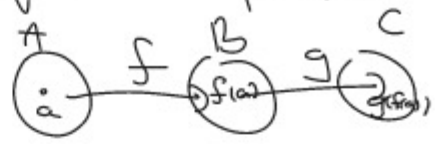
2) $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$f(x) = x^2$
Nije „1-1", jeste „na"

3) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$
Jeste „1-1", nije „na"

4) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
$f(x) = x^2$
bijekcija

miro

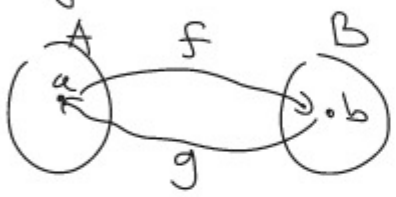
Def: $f: A \to B$, $g: B \to C$, tada pod funkcijom $g \circ f: A \to C$ podrazumevamo funkciju sa pravilom
$g \circ f(a) = g(f(a))$



Osobina: 1) $f \circ g \neq g \circ f$
2) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Def: Ako je A neki skup, tada pod identitetom na A podrazumevamo $Id_A: A \to A$ datu sa $Id_A(a) = a$.

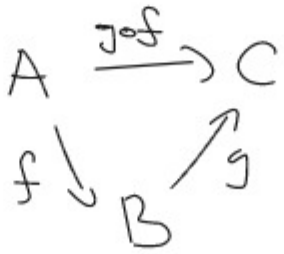
Stav: $f: A \to B$ bijekcija $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ takva da je $g \circ f = Id_A$ i $f \circ g = Id_B$. Funkciju g nazivamo inverzom funkcije f i pišemo $g = f^{-1}$



Stav: a) $f: A \to B$ je "1-1" $\Leftrightarrow \exists\, g: B \to A$ takva da je $g \circ f = Id_A$ ("levi inverz")
b) $f: A \to B$ je "na" $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ takva da je $f \circ g = Id_B$ (desni inverz)

Stav: $f: A \to B$, $g: B \to C$
a) f i g "1-1" $\Rightarrow$ gof "1-1"
b) f i g "na" $\Rightarrow$ gof "na"
c) f i g bijekcije $\Rightarrow$ gof bijekcija
d) gof "1-1" $\Rightarrow$ f "1-1"
e) gof "na" $\Rightarrow$ g "na"
f) gof bijekcija $\Rightarrow$ f "1-1" ; g "na"

dokaz:
a) $f: A \to B$
$g: B \to C$



Pretpostavimo da je
$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \Leftrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$
ali g je "1-1", pa je $f(a_1) = f(a_2)$
ali f je "1-1", pa je $a_1 = a_2$

miro

e) $g\circ f: A \to C$ „na"

$c \in C$ proizvoljno

$\exists a \in A$ tako da je $c = g\circ f(a) = g(f(a))$

$f(a)$ je element skupa B koji se funkcijom g slika u c

$f(a) \in B$

1. Dokazati da je $f: X \to Y$ „1-1" akko za bilo koji skup Z i bilo koje dve funkcije $g_1, g_2: Z \to X$ iz uslova $f\circ g_1 = f\circ g_2$ sledi uslov $g_1 = g_2$.

$\Rightarrow$: f „1-1"

I način:

Neka je $f\circ g_1 = f\circ g_2$

f ima levi inverz $h: Y \to X$ takva da $h\circ f = Id_X$

$$h\circ(f\circ g_1) = h\circ(f\circ g_2)$$
$$(h\circ f)\circ g_1 = (h\circ f)\circ g_2$$
$$Id_X \circ g_1 = Id_X \circ g_2$$
$$g_1 = g_2$$

II način: Neka su g_1 i $g_2: Z \to X$ takve da

$f\circ g_1 = f\circ g_2$

Ako je $z \in Z$ proizvoljno, mi znamo:

$f\circ g_1(z) = f\circ g_2(z)$

$f(g_1(z)) = f(g_2(z))$

f je „1-1", pa je $g_1(z) = g_2(z)$

$\Rightarrow g_1 = g_2$

$\Leftarrow$: Pps da f nije „1-1". To znači da postoje $x_1 \neq x_2$ takvi da $f(x_1) = f(x_2)$.

$Z = \{*\}$

$g_1(*) = x_1$ $\quad f(g_1(*)) = f(x_1)$

$g_2(*) = x_2$ $\quad f(g_2(*)) = f(x_2)$

$g_1 \neq g_2$ $\quad f\circ g_1 \equiv f\circ g_2$ ↯

Dakle, f jeste „1-1".

miro

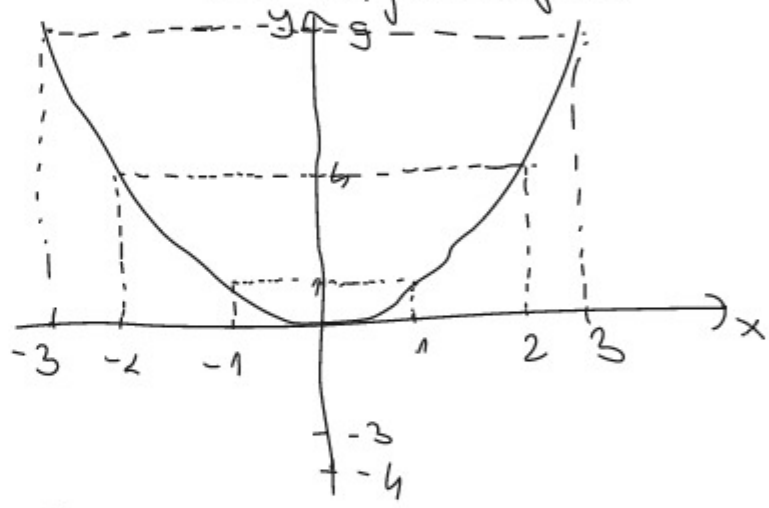
Direktna i inverzna slika skupa

Def: Ako $f: X \to Y$ i $A \subseteq X$, tada pod direktnom slikom skupa A podrazumevamo
$$f[A] = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq Y$$

Def: Ako $f: X \to Y$ i $B \subseteq Y$, tada pod inverznom slikom skupa B podrazumevamo
$$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subseteq X$$

Napomena: Inverzna slika skupa je definisana za svaku funkciju, a ne samo za bijekcije.

Primer: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



a) $f[[-2,1]] = [0,4]$
b) $f^{-1}[[-3,9]] = f^{-1}[[0,9]] = [-3,3]$
c) $f[f^{-1}[[-4,4]]] = f[f^{-1}[0,4]] = f[[-2,2]] = [0,4]$
d) $f^{-1}[f[[1,2]]] = f^{-1}[[1,4]] = [-2,-1] \cup [1,2]$

Stav: $f: X \to Y$
a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ (= važi ako je f „1-1")
b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ (= važi ako je f „na")
c) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$
d) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$
e) $f[A_1] \setminus f[A_2] \subseteq f[A_1 \setminus A_2]$
f) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$
g) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$
h) $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$

miro

2. Dokazati da je $f: X \to Y$ "1-1" akko za sve $A, B \subseteq X$ vazi $f[A \triangle B] = f[A] \triangle f[B]$

$\Rightarrow$: $f: X \to Y$ "1-1"

$\supseteq$: $f[A] \triangle f[B] = (f[A] \setminus f[B]) \cup (f[B] \setminus f[A])$

$\overset{e}{\subseteq}$ $f[A \setminus B] \cup f[B \setminus A] \overset{c)}{=} f[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = f[A \triangle B]$

$\subseteq$: $y \in f[A \triangle B] \Rightarrow \exists x \in A \triangle B$ takav da je $y = f(x) \Rightarrow$

$\exists x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ takav da je $y = f(x)$

$x \in A \setminus B$
$y = f(x)$

ili

$x \in B \setminus A$
$y = f(x)$

$x \in A$ i $x \notin B$
$y = f(x)$
$y = f(x) \in f[A]$
$y \notin f[B]$ jer je f "1-1", pa je x jedini element koji se saf slika u y, te ne moze postojati neko drugo $z \in B$ tako da je $f(z) = y$
$y \in f[A] \setminus f[B]$

$x \in B$ i $x \notin A$
$y = f(x)$
$y = f(x) \in f[B]$
$y \notin f[A]$

Po analogiji razmatranju

$y \in f[B] \setminus f[A]$

$y \in f[A] \setminus f[B]$ $\vee$ $y \in f[B] \setminus f[A]$

$y \in (f[A] \setminus f[B]) \cup (f[B] \setminus f[A])$

$y \in f[A] \triangle f[B]$.

$\Leftarrow$ pps da $f: X \to Y$ nije "1-1", tj. da postoje $x_1 \neq x_2$ tako da $f(x_1) = f(x_2) = y$

$A = \{x_1\}$
$B = \{x_2\}$

$f[A \triangle B] = f[\{x_1\} \triangle \{x_2\}] = f[\{x_1, x_2\}] = \{y\}$
$f[A] \triangle f[B] = f[\{x_1\}] \triangle f[\{x_2\}] = \{y\} \triangle \{y\} = \emptyset$

Dakle, f jeste "1-1".

miro

3. Neka je $f: X \to Y$. Dokazati da je f "1-1" akko
$\forall A \subseteq X$ i $\forall B \subseteq Y$ vrijedi
$f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] = A \setminus f^{-1}[B]$

$\Rightarrow$: f "1-1":
$f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] \overset{N}{=} f^{-1}[f[A]] \setminus f^{-1}[f[A] \cap B] \overset{6)}{=}$

$f^{-1}[f[A]] \setminus (f^{-1}[f[A]] \cap f^{-1}[B]) \overset{a)}{=} A \setminus (A \cap f^{-1}[B]) \overset{(*)}{=} A \setminus f^{-1}[B]$

$\lceil (*)$: $X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$
$x \in X \setminus (X \cap Y) \iff x \in X \wedge x \notin X \cap Y \iff$
$x \in X \wedge \neg (x \in X \wedge x \in Y) \iff$
$x \in X \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \iff$
$(x \in X \wedge x \notin X) \vee (x \in X \wedge x \notin Y) \iff$
$\bot \vee (x \in X \setminus Y) \iff x \in X \setminus Y$ $\rfloor$

$\Leftarrow$: Pps, da f nije "1-1".
Postoje $x_1 \neq x_2$ takvi da $f(x_1) = f(x_2) = y$

$A = \{x_1\}$
$B = \phi$

L: $f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)]$
$= f^{-1}[\{y\} \setminus (\{y\} \cap \phi)] =$
$f^{-1}[\{y\} \setminus \phi] = f^{-1}[\{y\}] \supseteq \{x_1, x_2\}$

D: $A \setminus f^{-1}[B] = \{x_1\} \setminus \phi = \{x_1\}$

L je bar dvočlan, a D je jednočlan $\Rightarrow D \neq L$ ↯

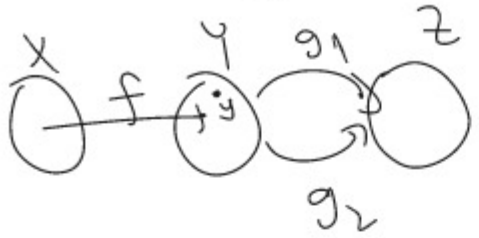
4. Dokazati da je $f: X \to Y$ "na" akko za svaki skup Z i funkcije $g_1, g_2: Y \to Z$ iz uvjeta da je $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ slijedi $g_1 = g_2$.

$\Rightarrow$: $f: X \to Y$ "na" $\Rightarrow \exists h: Y \to X$ takva da je
$f \circ h = Id_Y$
$g_1 \circ f = g_2 \circ f$
$(g_1 \circ f) \circ h = (g_2 \circ f) \circ h$
$g_1 \circ (f \circ h) = g_2 \circ (f \circ h)$
$g_1 \circ Id_Y = g_2 \circ Id_Y$
$g_1 = g_2$

miro

$\Leftarrow$: Pps $f: X \to Y$ nije "na"

$\exists y \in Y$ koje nije "slika nijednog" $x \in X$



$Z = \{a, b, c\}$

$g_1(y) = a$ $\quad$ $g_2(y) = b$

Sve ostale elemente iz Y i sa g_1 i sa g_2 slikamo u c

$g_1 \neq g_2$

$g_1(f(x)) = c$

$\neq$

y jer y nije slika nijednog elementa

$g_2(f(x)) = c$

$\neq$

y

$g_1 \circ f = g_2 \circ f = \text{const}_c$

Karakteristične funkcije

Neka je X ambijentalni skup (univerzum diskursa) i $A \subseteq X$

Definišemo

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$

sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

indikator funkcija

Primer: $X = \{0,1,2\}$ $\quad A = \{0,2\} \subseteq X$

$$\chi_A(0) = 1 \quad \chi_A(1) = 0 \quad \chi_A(2) = 1$$

Osobine:

1) $\chi_\emptyset(x) = 0 \quad \forall x \in X$
2) $\chi_X(x) = 1 \quad \forall x \in X$
3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$
4) $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$

} preko $\cap$ i ^{c} možemo izraziti sve ostale skupovne operacije jer je $\{1, \neg\}$ potpun sistem veznika

5) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_{A \cap B^c}(x) \overset{3)}{=} \chi_A(x) \cdot \chi_{B^c}(x) \overset{4)}{=}$

$$\chi_A(x)\left(1 - \chi_B(x)\right) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$$

6) $\chi_{A \cup B}(x) \overset{\text{De Morgan}}{=} \chi_{(A^c \cap B^c)^c}(x) \overset{4)}{=} 1 - \chi_{A^c \cap B^c}(x) \overset{3)}{=}$

$$1 - \chi_{A^c}(x)\chi_{B^c}(x) \overset{4)}{=} 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x)) =$$

$$1 - 1 + \chi_B(x) + \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$$

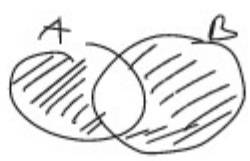
7) $\chi_{A \triangle B}(x) = \chi_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}(x) \overset{c)}{=} \chi_{A \setminus B}(x) + \chi_{B \setminus A}(x) - \chi_{A \setminus B}(x)\chi_{B \setminus A}(x)$

$$\overset{5)}{=} \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_B(x)\chi_A(x)$$
$$- (\chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x))(\chi_B(x) - \chi_B(x)\chi_A(x)) =$$

$$\chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$$
$$- \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A^2(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_B^2(x) - \chi_A^2(x)\chi_B^2(x)$$
$$\qquad \| \chi_A(x) \qquad\qquad \| \chi_B(x) \qquad \| \chi_A(x) \qquad \| \chi_B(x)$$

$\chi_A(x) \in \{0,1\}$, a $0^2 = 0$; $1^2 = 1$

$\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$



$$= \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)$$

miro

Posmatrajmo $\{0,1\}$ kao $\mathbb{Z}_2$ (skup ostataka pri deljenju sa 2) u kom računamo:

$0+0=0$ $\quad$ $0\cdot 0=0$

$0+1=1$ $\quad$ $0\cdot 1=0$

$1+0=1$ $\quad$ $1\cdot 0=0$

$1+1=0$ $\quad$ $1\cdot 1=1$

U $\mathbb{Z}_2$ važe osobine komutativnosti + i $\cdot$, asocijativnosti + i $\cdot$ i distributivnosti $\cdot$ prema + (računamo isto kao u $\mathbb{R}$)

U $\mathbb{Z}_2$ važi $a\cdot a = a$

U $\mathbb{Z}_2$ važi da je oduzimanje isto što i sabiranje

$a-b = a+(-b) = a+b$

($-b$: onaj element koji sabran sa b daje neutral za $+$ (tj. nulu))

Ako računamo u $\mathbb{Z}_2$, dobijamo pojednostavljenje formula:

$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_{A^c} = 1 + \chi_A$

$\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_A\chi_B$

$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B$

$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - \underbrace{2\chi_A\chi_B}_{\text{ovo je nula u } \mathbb{Z}_2} = \chi_A + \chi_B$

Nadalje koristimo ove formule

Stav: Ako je X univerzalni skup i $A, B \subseteq X$, tada

$A = B$ akko $\chi_A = \chi_B$

1. Dokazati da je $\underbrace{A\setminus(B\setminus C)}_{L} = \underbrace{(A\setminus B)\cup(A\cap C)}_{D}$

$\chi_L = \chi_{A\setminus(B\setminus C)} = \chi_A + \chi_A\chi_{B\setminus C} = \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C) =$

$\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C$

miro

$$\chi_D = \chi_{(A\setminus B)\cup(A\cap C)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\cap C} + \chi_{A\setminus B}\cdot\chi_{A\cap C} =$$

$$\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\,\chi_A\chi_C$$

$$= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C =$$

$$\chi_A + \chi_A\chi_B + \underbrace{\chi_A\chi_C + \chi_A\chi_C}_{=0} + \chi_A\chi_B\chi_C$$

$$= \underline{\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C}$$

Kako je $\chi_L = \chi_D$, to je $L = D$ po prethodnom stavu.

2. Naći potrebam i dovoljan(ekvivalentan) uslov da bi $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$.

$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$ akko $\chi_{(A\setminus B)\setminus C} = \chi_{A\setminus(B\setminus C)}$

akko $\chi_{A\setminus B} + \chi_{A\setminus B}\chi_C = \chi_A + \chi_A\chi_{B\setminus C}$

akko $\chi_A + \chi_A\chi_B + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_C = \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C)$

akko ~~χ_A~~ + ~~$\chi_A\chi_B$~~ + $\chi_A\chi_C$ + ~~$\chi_A\chi_B\chi_C$~~ = ~~χ_A~~ + ~~$\chi_A\chi_B$~~ + ~~$\chi_A\chi_B\chi_C$~~

akko $\chi_A\chi_C = 0$

akko $\chi_A\chi_C = \chi_\emptyset$

akko $\chi_{A\cap C} = \chi_\emptyset$

akko $\underline{A\cap C = \emptyset}$

3. Neka je A proizvoljan skup i X i Y skupovi za koje važi $A\cap X = A\cap Y$ i $A\cup X = A\cup Y$. Dokazati da je $X = Y$.

$A\cap X = A\cap Y \iff \chi_{A\cap X} = \chi_{A\cap Y} \iff \chi_A\cdot\chi_X \overset{(*)}{=} \chi_A\cdot\chi_Y$

$A\cup X = A\cup Y \iff \chi_{A\cup X} = \chi_{A\cup Y} \iff$

~~χ_A~~ + χ_X + $\chi_A\chi_X$ = ~~χ_A~~ + χ_Y + $\chi_A\chi_Y$

$\iff$ χ_X + ~~$\chi_A\chi_X$~~ = χ_Y + ~~$\chi_A\chi_Y$~~

Isti po (*)

$\iff$ $\chi_X = \chi_Y \iff X = Y$.

miro

4. Dokazati da je $A = B \cup C$ akko $A \triangle B = C \setminus B$.

$A \triangle B = C \setminus B$ akko

$\chi_{A \triangle B} = \chi_{C \setminus B}$ akko

$\chi_A + \chi_B = \chi_C + \chi_C \chi_B \quad / + \chi_B$ akko

$\chi_A + \underbrace{\chi_B + \chi_B}_{=0} = \chi_B + \chi_C + \chi_B \chi_C$ akko

$\chi_A = \chi_{B \cup C}$ akko

$A = B \cup C$

5. Neka su A, B, C neki skupovi i

$L = A \cap (B \cup C)$

$D = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

a) Dokazati da je $L = D$ akko $A \cap B \cap C = \emptyset$

b) Ispitati da li u opštem slučaju važi neka od inkluzija $L \subseteq D$, $D \subseteq L$.

a) $L = D$ akko $\chi_L = \chi_D$ akko

$\chi_{A \cap (B \cup C)} = \chi_{(A \cap B) \triangle (A \cap C)}$ akko

$\chi_A \cdot \chi_{B \cup C} = \chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap C}$ akko

$\chi_A (\chi_B + \chi_C + \chi_B \chi_C) = \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C$ akko

$\chi_L = \cancel{\chi_A \chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_C} + \chi_A \chi_B \chi_C = \cancel{\chi_A \chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_C} = \chi_D$

akko $\chi_A \chi_B \chi_C = 0 = \chi_\emptyset$

akko $\chi_{A \cap B} \chi_C = \chi_\emptyset$

akko $\chi_{A \cap B \cap C} = \chi_\emptyset$

akko $A \cap B \cap C = \emptyset$

b) Znamo da u opštem slučaju ne važe obe inkluzije $L \subseteq D$ i $D \subseteq L$ jer ako važe obe, tada je $L = D$, a u delu a) smo videli da je to ispunjeno akko $A \cap B \cap C = \emptyset$

Lema: $A \subseteq B$ akko $A \cap B = A$

miro

Stoga, računatemo $L \cap D$ tj. $\chi_{L \cap D} = \chi_L \cdot \chi_D$

$= (\chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C)(\chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C) =$

$= \chi_A \chi_B + \underbrace{\chi_A \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C}_{=0} + \chi_A \chi_C + \underbrace{\chi_A \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C}_{=0}$

$= \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C = \underbrace{\chi_D}$

Dobili smo da je $L \cap D = D$, pa je po prethodnoj lemi $D \subseteq L$.

6. Dokazati da je $A \cap (B \triangle C) = B$ akko $A \cap C = \emptyset$ i $B \subseteq A$.

$\Leftarrow$ Neka je $A \cap C = \emptyset$ i $B \subseteq A$

Na prethodnim vežbama je dokazano

$A \cap (B \triangle C) = \underbrace{(A \cap B)}_{B} \triangle \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset} = B \triangle \emptyset = B$

$\uparrow$ $\emptyset$ je neutral za $\triangle$

$\Rightarrow$ Neka je $A \cap (B \triangle C) = B$

1° $A \cap C = \emptyset$?

pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $y \in A \cap C$

$y \in A$ i $y \in C$

$\chi_A(y) = \chi_C(y) = 1$

$\chi_{A \cap (B \triangle C)} = \chi_B$

$\chi_A (\chi_B + \chi_C) = \chi_B$

$\chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C = \chi_B$

$\chi_A(y) \chi_B(y) + \chi_A(y) \chi_C(y) = \chi_B(y)$

$\quad 1 \qquad\qquad\quad 1 \quad 1$

$\cancel{\chi_B(y)} + 1 = \cancel{\chi_B(y)}$

$1 = 0$ ↯

Stoga, takvo y ne postoji, pa je $A \cap C = \emptyset$

miro

2° $B \subseteq A$?

pretpostavimo suprotno, da $B \not\subseteq A$, tj. da postoji $b \in B$ takav da $b \notin A$

$\chi_B(b) = 1$ $\chi_A(b) = 0$

Znamo $\chi_A(b) - \chi_B(b) + \chi_A(b)\,\chi_C(b) = \chi_B(b)$

$\chi_A(b) = 0$, $\chi_B(b) = 1$, $\chi_A(b) = 0$, $\chi_B(b) = 1$

$0 + 0 = 1$

$0 = 1$ ↯

Stoga, $B \subseteq A$.

miro

Kardinalnosti

Stav: Za dva konačna skupa A i B važi $|A| = |B|$ akko postoji bijekcija $f: A \to B$, a $|A| \leq |B|$ akko postoji „1-1" $f: A \to B$

Def: Skupovi A i B su iste kardinalnosti ($|A| = |B|$) akko postoji bijekcija $f: A \to B$, a skup A je manji od skupa B ($|A| \leq |B|$) akko postoji „1-1" $f: A \to B$

Teorema: Relacija jednakosti kardinalnosti je ekvivalencija, a relacija $\leq$ kardinalnosti je linearan poredak.

Bitne beskonačne kardinalnosti:
$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (prebrojiva beskonačnost)
$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (kontinuum)
$\mathfrak{c} > \aleph_0$

1. Dokazati da je $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0,1,2\}|$.
Konstruisaćemo bijekciju $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$
Imamo deljenje sa ostatkom u $\mathbb{N}$
$n = 3q + r \quad r \in \{0,1,2\}$
jedinstveno predstavljanje ($7 = 3 \cdot 2 + 1$)
$f(n) = (q, r)$

„1-1":
$f(n_1) = f(n_2)$
$f(n_1) = (q_1, r_1) \iff n_1 = 3q_1 + r_1$
$f(n_2) = (q_2, r_2) \iff n_2 = 3q_2 + r_2$
$(q_1, r_1) = (q_2, r_2) \Rightarrow q_1 = q_2$ i $r_1 = r_2$
$\Rightarrow 3q_1 + r_1 = 3q_2 + r_2$
$n_1 = n_2$

$\Rightarrow f$ jeste „1-1"

„na":
$(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$
$n = 3q + r$ se pri f slika u (q, r)

miro

Lema: Ako je $g: A \to B$ bijekcija i $h: C \to D$ bijekcija $\Rightarrow$ $g \times h : A \times C \to B \times D$ data sa

$$g \times h\,(a, c) = (g(a), h(c))$$

je isto bijekcija.

dokaz: „1-1":

$$g \times h(a_1, c_1) = g \times h(a_2, c_2)$$
$$(g(a_1), h(c_1)) = (g(a_2), h(c_2))$$
$$g(a_1) = g(a_2), \quad h(c_1) = h(c_2)$$

g i h su „1-1" $\Rightarrow a_1 = a_2$ i $c_1 = c_2$

$\Rightarrow (a_1, c_1) = (a_2, c_2)$

$\Rightarrow g \times h$ „1-1".

„na": $(b, d) \in B \times D$

g i h su „na"

$\Rightarrow \exists a \in A$ tdj $g(a) = b$ $\Rightarrow g \times h\,(a, c) = (b, d)$
$\exists c \in C$ tdj $h(c) = d$

$\Rightarrow g \times h$ je „na".

Indukcijom se dokazuje opštije:

Ako $f_1: A_1 \to B_1$, $f_2: A_2 \to B_2$, $\dots$, $f_n: A_n \to B_n$,

tada $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \to B_1 \times \dots \times B_n$

data $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n\,(a_1, a_2, \dots, a_n) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n))$

je isto bijekcija.

dokaz: pomoću prethodne leme.

2. Dokazati da je $|\mathbb{N} \setminus \{5\} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

Treba konstruisati bijekciju:

$$\mathbb{N} \setminus \{5\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Po prethodnom stavu, dovoljno je naći bijekciju $f: \mathbb{N} \setminus \{5\} \to \mathbb{N}$ i $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

1, 2, 3, 4, 6, 7, $\dots$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\dots$

$$f(n) = \begin{cases} n & n \in \{1, 2, 3, 4\} \\ n-1 & \text{inače} \end{cases}$$

miro

ideja: nenegativne cele brojeve $(0, 1, 2, \dots)$
slikamo u neparne prirodne, a
negativne cele u parne prirodne.

$0 \mapsto 1$ $\quad -1 \mapsto 2$

$1 \mapsto 3$ $\quad -2 \mapsto 4$

$2 \mapsto 5$ $\quad -3 \mapsto 6$

$3 \mapsto 7$ $\quad \vdots$

$\vdots$

$$g(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ -2n & n < 0 \end{cases}$$

Stav: Za svaki skup A je $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
Specijalno, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > |\mathbb{N}| = \aleph_0$

3. Dokazati da je $|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$, gde je
$\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ je konačan} \}$
Dokazaćemo $|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
tako što ćemo dokazati:

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$$
i
$$|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})|$$

jer nam tada antisimetričnost relacije $\leq$ daje jednakost.
Treba konstruisati „1-1" funkcije
$f: \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ i $g: \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$

$g: \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$
$g(n) = \{n\}$ ← konačan podskup od $\mathbb{N}$
g je očigledno „1-1"

$f: \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$
Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva, i
pritom važi jedinstvenost faktorizacije u $\mathbb{N}$
(svaki $n \in \mathbb{N}$ se na jedinstven način
predstavlja kao proizvod stepena prostih
$20 = 2^2 \cdot 5$)

miro

$\mathcal{P} = \{ p_1, p_2, p_3, \dots \}$ svi prosti brojevi

Ako je $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_k \} \subseteq \mathbb{N}$

$f(A) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot \dots \cdot p_{a_k}$

f je „1-1" zbog jedinstvenosti faktorizacije.

Def: Za skup A kažemo da je najviše prebrojiv ako je konačan, ili prebrojiv.

Stav: Ako je B neki beskonačan skup, a A najviše prebrojiv, tada je $|B \cup A| = |B|$.

Stav: Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiva.

4. Dokazati da je skup svih polinoma sa celobrojnim koeficijentima prebrojiv i da je skup svih algebarskih brojeva (nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima) prebrojiv

$$\mathbb{Z}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{ p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n \} \cup \{0\}$$

[za 0 polinom nije definisan stepen]

$\mathbb{Z}[x]$ je prebrojiva unija skupova $\{ p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n \}$ što je prebrojiv skup:

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

$a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$a_{n-1} \in \mathbb{Z}$

$\vdots$

$a_0 \in \mathbb{Z}$

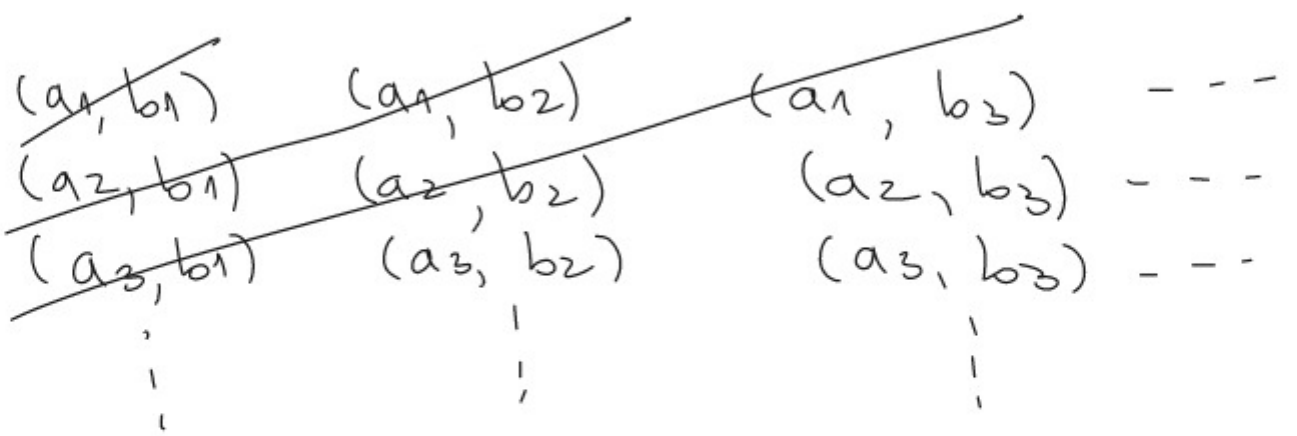
$$|\{ p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n \}| = |\underbrace{\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{\text{Dekartov proizvod prebrojivih skupova}}| = \aleph_0$$

Lema: Dekartov produkt prebrojivih skupova A i B je prebrojiv.

dokaz: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots\}$

$A \times B$:



Elemente ovog skupa možemo poredati u niz

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \dots$

Indukcijom dokazujemo da isto to vrijedi i za Dekartov produkt n prebrojivih skupova $\forall n \in \mathbb{N}$

Stoga, $\mathbb{Z}[x]$ je prebrojiva unija prebrojivih skupova, te je po prethodnom stavu $\mathbb{Z}[x]$ prebrojiv skup.

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]} \{ x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0 \}$$

$\{x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0\}$ je konačan skup jer je broj različitih nula u $\mathbb{C}$ je $\leq \deg(p)$

A je prebrojiva unija konačnih skupova

Lema: Prebrojiva unija konačnih skupova je najviše prebrojiva.

$A_1 = \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{k_1}\}$

$A_2 = \{a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{k_2}\}$

$\vdots$

$A_j = \{a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^{k_j}\}$

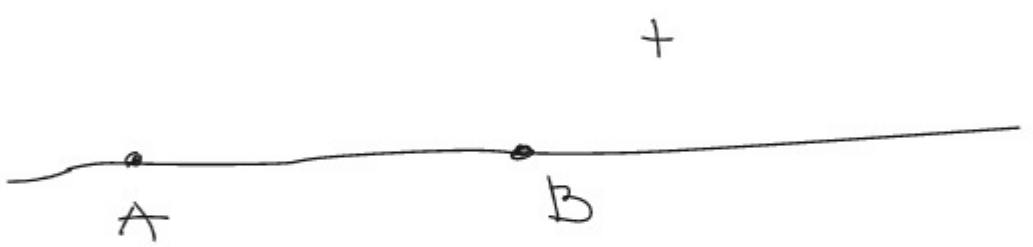
$\bigcup A_j$ se može $j \in \mathbb{N}$ poredati u niz $\Rightarrow$ ne dobijemo ništa veće od $\aleph_0$.

miro

Stoga, A je najviše prebrojiv.
Treba još dokazati da A nije konačan.
Međutim, svaki ceo broj $a \in \mathbb{Z}$ je algebarski jer je nula polinoma $x-a \in \mathbb{Z}[x]$.

5. Neka je $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ takav da za svake dve tačke $A, B \in S$ važi da je dužina duži AB racionalan broj. Dokazati da je $|S| \leq \aleph_0$.

Neka su $A, B \in S$ neke dve različite tačke (ako ne postoje dve različite tačke iz S, tada je $|S| \leq 1 \leq \aleph_0$)



Definišemo $f: S \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}$

$$f(C) = (d(A,C), d(B,C), \varepsilon_C)$$

$$\varepsilon_C = \begin{cases} 1 & C \text{ u gornjoj} \\ -1 & C \text{ u donjoj} \\ 0 & C \text{ na pravoj } AB \end{cases}$$

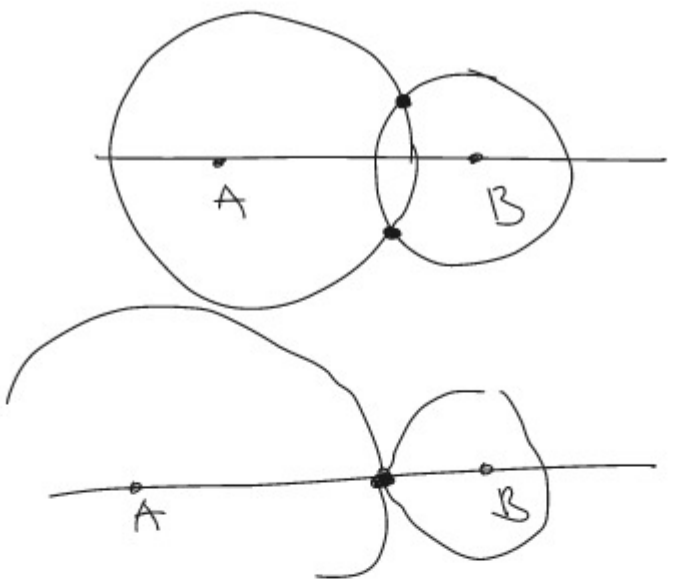
Skup $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}$ je prebrojiv skup jer je $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
Treba još dokazati da je f „1-1"

$$f(C) = f(D)$$

$$(d(A,C), d(B,C), \varepsilon_C) = (d(A,D), d(B,D), \varepsilon_D)$$

$d(A,C) = d(A,D) \Rightarrow C$ i D su na istoj kružnici sa centrom u A
$d(B,C) = d(B,D) \Rightarrow C$ i D su na istoj kružnici
$\varepsilon_C = \varepsilon_D$ sa centrom u B

miro



Ove dve kružnice imaju najviše 2 zajedničke tačke, od kojih je jedna u gornjoj, a druga u donjoj poluravni. Ali, tačke C i D su u istoj poluravni jer je $\varepsilon_C = \varepsilon_D$.
$\Rightarrow C = D$.

Dakle, f je "1-1".

Po definiciji je $|S| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}| = \aleph_0$.

6. Dokazati da postoji kontinuum mnogo podskupova $A_\gamma \subseteq \mathbb{N}$ takvih da je za $\gamma_1 \neq \gamma_2$ $A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2}$ konačan skup.

Svih podskupova od $\mathbb{N}$ ima baš c (jer je $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$), pa ni ne možemo naći više od kontinuum mnogo podskupova od $\mathbb{N}$.

Neka je x neki realan broj $\in (\frac{1}{10}, 1)$

$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ pri čemu $x_1 \geq 1$

Dodelimo mu
$A_x = \{ x_1, \overline{x_1 x_2}, \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}, \ldots \}$

Interval $(\frac{1}{10}, 1)$ je neprebrojiv $\Rightarrow$ konstruisali smo neprebrojivo mnogo skupova A_x.

$x \neq y$ $A_x \cap A_y$ je konačan skup jer ako bi bio beskonačan, tada bismo od svakog prirodnog broja n imali veći prirodan broj k takav da je

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_k} = \overline{y_1 y_2 \ldots y_k}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = y_1$
$x_2 = y_2$
$\vdots$
$x_k = y_k$

Ali k može biti beskonačno veliko $\Rightarrow$ x i y imaju isti decimalni zapis $\Rightarrow x = y$ $\lightning$

miro

Modeli

	sintaksa	semantika
iskazna	prirodna dedukcija	istinitosne vrednosti
predikatska	prirodna dedukcija	modeli

Def: Model jezika $\mathcal{L}$ je $\mathcal{M} = (D, S^{\mathcal{M}})$, gde je D neki skup, a $S^{\mathcal{M}}$ je interpretacija simbola koji su dati u jeziku $\mathcal{L}$.

Primer: $\mathcal{L} = \{p\}$ gde je p binarni relacijski simbol ($p(x,y)$ akko su x i y u relaciji)

$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}_0, p^{\mathcal{M}_1})$, gde je $p^{\mathcal{M}_1} = |$ (relacija deljivosti)

$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, p^{\mathcal{M}_2})$, gde je $p^{\mathcal{M}_2} = \geq$

$F = \exists x \forall y\, p(y,x)$ formula jezika $\mathcal{L}$

U $\mathcal{M}_1$: postoji element takav da ga svaki drugi element deli ($x = 0$)

U $\mathcal{M}_2$: postoji element koji je manji od svih elemenata X

Def: $For_{\mathcal{L}}$ je skup svih formula predikatske logike koje su zapisane na jeziku $\mathcal{L}$

Ako je $\mathcal{M} = (D, S^{\mathcal{M}})$ neki model jezika $\mathcal{L}$, tada je valuacija svaka funkcija

$v: Var \to D$

gde je Var skup promenljivih

miro

Primer: $\mathcal{L} = \{p\}$ gde je p binarni relacijski simbol

$M = (\mathbb{Z}, p^M)$ gde je $p^M = \leq$

$F = p(x,y)$

$x \leq y$

$v_1 : Var \to \mathbb{Z}$

$v_1(x) = 2$

$v_1(y) = 3$

$2 \leq 3$ ✓

$v_2 : Var \to \mathbb{Z}$

$v_2(x) = 3$

$v_2(y) = 2$

$3 \leq 2$ ×

Def: Ako je v neka valuacija, definišemo njoj pridruženu interpretaciju $\hat{v} : For_{\mathcal{L}} \to \{0,1\}$ na sledeći način:

1) $\hat{v}(\neg A) = \neg \hat{v}(A)$
2) $\hat{v}(A * B) = \hat{v}(A) * \hat{v}(B)$ gde je $*$ binarni logički veznik ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \underline{\vee}, \uparrow, \downarrow, --$)
3) $\hat{v}(\forall x A(x)) = 1$ akko za svako $d \in D$ $\hat{v}(A(d)) = 1$
4) $\hat{v}(\forall x A(x)) = 0$ akko postoji $d \in D$ $\hat{v}(A(d)) = 0$
5) $\hat{v}(\exists x A(x)) = 1$ akko postoji $d \in D$ $\hat{v}(A(d)) = 1$
6) $\hat{v}(\exists x A(x)) = 0$ akko je za svaki $d \in D$ $\hat{v}(A(d)) = 0$

Def: Model formule F na jeziku $\mathcal{L}$ je svaki model jezika $\mathcal{L}$ takav da je za svaku valuaciju v ispunjeno $\hat{v}(F) = 1$.

Def: Kontramodel formule F na jeziku $\mathcal{L}$ je svaki model jezika $\mathcal{L}$ koji nije model formule F (postoji valuacija v u kojoj je $\hat{v}(F) = 0$)

miro

Def: Formula je valjana ako je svaki model njenog jezika istovremeno i njen model.

1. Dokazati da je formula

$$p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$$

valjana.

$\mathcal{L} = \{p\}$, gde je p unarni relacijski simbol ("biti prost broj")

Pps, da data formula nije valjana, tj. da postoji kontramodel $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}})$ ove formule.
To znači da postoji valuacija

$$v: Var \to D$$

tako da je $\hat{v}(p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)) = 0$

$\hat{v}(p(x)) \Rightarrow \hat{v}(\exists x\, p(x)) = 0$

$\hat{v}(p(x)) = 1$

$p^{\mathbb{K}}(v(x)) = 1$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) = 0$

za svaki $d \in D$

$p^{\mathbb{K}}(d) = 0$

$v(x) = a \in D$

$p^{\mathbb{K}}(a) = 1$

Specijalno, kako $a \in D$

$p^{\mathbb{K}}(a) = 0$

↯

Dakle, formula jeste valjana.

2. Naći model i kontramodel formule

$$\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$$

$\mathcal{L} = \{p\}$ gde je p unarni relacijski simbol

Model:
Kad god je pretpostavka implikacije netačna, implikacija je tačna.
Pravim model tako da je $\exists x\, p(x)$ netačno.

$\mathbb{M} = (\{\alpha\}, p^{\mathbb{M}})$ gde je $p^{\mathbb{M}}(\alpha) = 0$

Ako je $v: Var \to \{\alpha\}$, tada v slika sve promenljive u α

miro

$\hat{v}(\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)) =$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) \Rightarrow \hat{v}(p(x)) =$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) \Rightarrow p^{\mathcal{M}}(v(x))$

$= \hat{v}(\exists x\, p(x)) \Rightarrow p^{\mathcal{M}}(\alpha)$

$= \quad 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \quad = 1$

Dakle, $\hat{v}(\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)) = 1$, tj. ovo jeste model.

Kontramodel:

Želimo da postoji valuacija $v: Var \to D$ za koju je

$\hat{v}(\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)) = 0$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) \Rightarrow \hat{v}(p(x)) = 0$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) \Rightarrow p^{\mathcal{K}}(v(x)) = 0$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) = 1$ $\qquad$ $p^{\mathcal{K}}(v(x)) = 0$

$\mathcal{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathcal{K}})$, gde je

$p^{\mathcal{K}}(\alpha) = 1$ $\qquad$ $p^{\mathcal{K}}(\beta) = 0$

$v: Var \to \{\alpha, \beta\}$

$v(x) = \beta$

$\hat{v}(\exists x\, p(x)) = 1$
jer je $p^{\mathcal{K}}(\alpha) = 1$

$p^{\mathcal{K}}(v(x)) = p^{\mathcal{K}}(\beta) = 0$

3. Dokazati da je formula F:
$(\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, q(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$
valjana.

$\mathcal{L} = \{p, q\}$, gde su p i q unarni relacijski simboli

Pps, da data F ima kontramodel.

$\mathcal{K} = (D, p^{\mathcal{K}}, q^{\mathcal{K}})$ tako da postoji valuacija $v: Var \to D$ za koju je

$\hat{v}(F) = 0$

$\hat{v}(\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, q(x)) \Leftrightarrow \hat{v}(\exists x\, (p(x) \Rightarrow q(x))) = 0$

$\hat{v}(L) \Leftrightarrow \hat{v}(D) = 0$

miro

1° $\hat{v}(L)=1$
$\hat{v}(D)=0$

a) $\hat{v}(\forall x p(x) \Rightarrow \exists x\, q(x))=1$
b) $\hat{v}(\exists x(p(x) \Rightarrow q(x)))=0$
Iz b), zaključujemo da je
$p^K(d) \Rightarrow q^K(d)=0$
za svako $d \in D$
Odavde je
$p^K(d)=1$ i $q^K(d)=0$
za svako $d \in D$
Specijalno $\hat{v}(\forall x p(x))=1$
Iz a)
$\hat{v}(\forall x p(x)) \Rightarrow \hat{v}(\exists x\, q(x))=1$
$1 \Rightarrow \hat{v}(\exists x\, q(x))=1$
Stoga, $\hat{v}(\exists x\, q(x))=1$
Postoji $d \in D$ za ko je je
$q^K(d)=1$

↯

2° $\hat{v}(L)=0$
$\hat{v}(D)=1$

a) $\hat{v}(\forall x p(x) \Rightarrow \exists x\, q(x))=0$
b) $\hat{v}(\exists x(p(x) \Rightarrow q(x)))=1$

Iz a) $\hat{v}(\forall x p(x)) \Rightarrow \hat{v}(\exists x\, q(x))=0$
$\hat{v}(\forall x p(x))=1$ $\hat{v}(\exists x\, q(x))=0$
$p^K(d)=1$ $q^K(d)=0$
za svako $d \in D$ za svako $d \in D$

Iz b) postoji $a \in D$ tj
$p^K(a) \Rightarrow q^K(a)=1$
$1 \Rightarrow q^K(a)=1$
Dakle, $q^K(a)=1$

↯

Dakle, F jeste valjana.

4. Nači kontramodel formule
F: $\underbrace{\exists x(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y))}_{L} \vee \underbrace{(\exists x \forall y(q(x,y) \Rightarrow r(x)) \wedge \forall x p(x))}_{D}$.

$\mathcal{L}=\{p, q, r\}$, gde su p i r unarni relacijski simboli a q je binarni relacijski simbol

Želimo $\hat{v}(F)=0$
$\hat{v}(L \vee D)=0$
$\hat{v}(L) \vee \hat{v}(D)=0$

$\hat{v}(L)=0$ $\hat{v}(D)=0$

$\hat{v}(\exists x(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y)))=0$
Za svako $d \in D$ je
$p^K(d) \Rightarrow \forall y\, q^K(d,y)=0$

Za svako $d \in D$ je
$p^K(d)=1$, a
$\forall y\, q^K(d,y)=0$

Za svako $d \in D$ je $\Rightarrow \hat{v}(\forall x p(x))=1$
$p^K(d)=1$, i
postoji $d' \in D$ za koje je
$q^K(d,d')=0$

$\hat{v}(\exists x \forall y(q(x,y) \Rightarrow r(x)) \wedge \forall x p(x))=0$
$\hat{v}(\exists x \forall y(q(x,y) \Rightarrow r(x))) \wedge \underbrace{\hat{v}(\forall x p(x))}_{1}=0$

$\hat{v}(\exists x \forall y(q(x,y) \Rightarrow r(x)))=0$

Za svako $d \in D$ je
$\forall y(q^K(d,y) \Rightarrow r(d))=0$

Za svako $d \in D$ je:
postoji $d' \in D$ takvo da je
$\underbrace{q^K(d,d')}_{q^K(d,d')=1} \Rightarrow \underbrace{r^K(d)}_{r^K(d)=0}=0$

Za svako $d \in D$ postoji $d' \in D$ tj
$q^K(d,d')=1$

Za svako $d \in D$ $r^K(d)=0$

miro

$$K = (\{\alpha, \beta\}, p^K, g^K, r^K)$$

$$p^K(\alpha) = p^K(\beta) = 1 \qquad r^K(\alpha) = r^K(\beta) = 0$$

$$g^K(\alpha,\alpha) = g^K(\beta,\beta) = 1$$
$$g^K(\alpha,\beta) = g^K(\beta,\alpha) = 0$$

miro