

15. ČEBIŠOVLJEVI POLINOMI

Ako je zadata funkcija $f(x)$, odsečak interpolacije $[a, b]$ koji sadrži čvorove interpolacije i stepen n interpolacionog polinoma $P_n(x)$, onda se greška interpolacije $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ može zapisati u sledećem obliku

$$R_n(x) = K \cdot \Pi_{n+1}(x),$$

gde je $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Dakle, greška u ovim zadatim uslovima zavisi od izbora čvorova interpolacije. Sada se postavlja sledeći zadatak: Kako treba izabrati čvorove interpolacije x_i , $i = 0, n$, da bi greška interpolacije bila minimalna? Pokazano je da je za čvorove interpolacije najbolje uzeti nule Čebišovljevog (П. Л. Чебышев, 1821–1894) polinoma.

Čebišovljev polinom $T_n(x)$ se definiše na sledeći način:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Navedimo nekoliko prvih Čebišovljevih polinoma:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots \end{aligned}$$

Može se primetiti sledeće:

- 1) koeficijent uz x^n polinoma $T_n(x)$ je jednak 2^{n-1} , $n \geq 1$;
- 2) $T_{2n}(x)$ su parne funkcije;
- 3) $T_{2n+1}(x)$ su neparne funkcije;
- 4) za $|x| \leq 1$ je $|T_n(x)| \leq 1$.

Dokažimo osobinu 4). Ako u trigonometrijski identitet

$$\cos((n+1)X) = 2 \cdot \cos X \cdot \cos nX - \cos((n-1)X)$$

stavimo $X = \arccos x$, onda ćemo dobiti

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2 \cdot x \cdot \cos(n \cdot \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x),$$

pa možemo zaključiti da funkcija $\cos(n \cdot \arccos x)$ zadovoljava istu diferencnu jednačinu kao i $T_n(x)$. Kako je još i:

$$\cos(0 \cdot \arccos x) = 1 \equiv T_0(x), \quad \cos(1 \cdot \arccos x) = x \equiv T_1(x)$$

to je

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sada je jednostavno zaključiti da važi osobina 4).

Rekurentna relacija, diferencna jednačina,

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 = 2x\lambda - 1,$$

a odavde je

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Za $|x| \neq 1$ imamo da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pa je opšte rešenje diferencne jednačine

$$T_n(x) = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Iz početnih uslova $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$

nalazimo $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, pa je

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

što je još jedan mogući način zadavanja Čebišovljevih polinoma.

Iz jednačine

$$T_n(x) \equiv \cos(n \cdot \arccos x) = 0$$

dobijamo nule:

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, \overline{n-1}.$$

Tačke ekstremuma na segmentu $[-1, 1]$ su one tačke za koje je $|T_n(x)| = 1$, dakle:

$$x_{(k)} = \cos \frac{k}{n} \pi, \quad k = \overline{0, n}$$

i pri tome je

$$T_n(x_{(k)}) = \cos k\pi = (-1)^k.$$

Polinom

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} \cdot T_n(x) = x^n + \dots$$

za $x \in [-1, 1]$ najmanje odstupa od nule.

Teorema. Ako je $P_n(x) = x^n + \dots$, onda je

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je

$$\max |P_n(x)| < \max |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Posmatrajmo razliku

$$Q(x) = \bar{T}_n(x) - P_n(x);$$

očigledno je stepen polinoma $Q(x)$ najviše jednak $n - 1$ i pri tome je

$$\text{sign}(\bar{T}_n(x_{(k)}) - P_n(x_{(k)})) = \text{sign}((-1)^k \cdot 2^{1-n} - P_n(x_{(k)})) = (-1)^k, \quad k = \overline{0, n}$$

jer je $P_n(x_{(k)}) < 2^{1-n}$ za svako k . Na taj način imamo da polinom $Q(x)$ između svake dve uzastopne tačke $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ menja znak, odnosno, između $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ ima bar jednu nulu. Dakle, polinom Q ima bar n nula, a to je protivrečno, jer polinom Q ima najviše $n - 1$ nulu. Drugim rečima, mora biti

$$\max |P_n(x)| \geq \max |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Na taj način zaključujemo sledeće: od svih polinoma n -tog stepena koji imaju uz x^n koeficijent 1 najmanje odstupa od nule na segmentu $[-1, 1]$ Čebiševljev polinom $\bar{T}_n(x)$. ■

Ako posmatramo odsečak $[a, b]$, onda je odgovarajući polinom

$$\bar{T}_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n x^n + \dots$$

i

$$\bar{T}_n^{[a, b]}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot 2^{1-n} \cdot \bar{T}_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right) = x^n + \dots$$

Dakle, važi

$$\max_{x \in [a, b]} |P_n(x)| \geq \max_{x \in [a, b]} |\bar{T}_n^{[a, b]}(x)| = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n},$$

gde je $P_n(x) = x^n + \dots$ proizvoljan polinom.

Nule polinoma $\bar{T}_n^{[a,b]}(x)$ su

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Greška interpolacije je

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}$$