III NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

1. NUMERIČKO DIFERENCIRANJE ZASNOVANO NA DIFERENCIRANJU INTERPOLACIONOG POLINOMA FUNKCIJE

Jedan od mogućih načina rešavanja zadatka numeričkog diferenciranja sastoji se u sledećem. Na uočenom odsečku $[a, b]$ funkcija $f(x)$ se zameni, aproksimira interpolacionim polinomom $P_n(x)$, a zatim se stavi da je

(1) $$f'(x) \approx P_n'(x), \quad a \le x \le b.$$

Na analogan način se postupa i u slučaju nalaženja izvoda viših redova.

Ako je funkcija $f(x)$ dovoljno glatka i ako su rastojanja između čvorova dovoljno mala, može se očekivati da se $f'(x)$ i $P_n'(x)$ ne razlikuju mnogo na odsečku $[a, b]$. Ako je greška interpolacionog polinoma $P_n(x)$ jednaka

(2) $$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

onda će greška diferenciranja biti

(3) $$r_n(x) = R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x).$$

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata na skupu ekvidistantnih tačaka x_i $(i = \overline{0, n})$ odsečka $[a, b]$, tj. neka su date vrednosti funkcije $y_i = f(x_i)\ (i = \overline{0, n})$. Za nalaženje približnih vrednosti izvoda: $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$,... na uočenom odsečku $[a, b]$ najpre funkciju $y = f(x)$ zamenjujemo, aproksimiramo odgovarajućim interpolacionim polinomom. Neka je to, primera radi, prvi Njutnov interpolacioni polinom

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}u(u-1)(u-2) + \dots, \quad u = \frac{x - x_0}{h}$$

Kako je

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{du},$$

to će biti

(4) $$\boxed{\begin{aligned} y'(x) = \frac{1}{h}\Bigg[& \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2 - 6u + 2) + \\ & + \frac{\Delta^4 y_0}{12}(2u^3 - 9u^2 + 11u - 3) + \dots \Bigg]. \end{aligned}}$$

Dalje je

$$y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{d(y')}{du},$$

pa se iz (4) dobija

$$\boxed{y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0(u-1)+\frac{\Delta^4 y_0}{12}(6u^2-18u+11)+\ldots\right].} \tag{5}$$

Na analogan način se mogu približno izračunati izvodi proizvoljnog reda funkcije $y=f(x)$.

Postupak za približno nalaženje vrednosti izvoda korišćenjem drugog Njutnovog interpolacionog polinoma je identičan opisanom, a što se tiče Lagranževog interpolacionog polinoma izvodi se nalaze direktno.

Primer 1. Funkcija $y=f(x)$ je zadata tablicom

x	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
y	1.58365	1.68662	1.79744	1.91650	2.04424

Izračunati: a) $f'(0.40)$ i $f''(0.40)$; b) $f'(0.42)$; c) $f'(0.59)$.

Rešenje. Tablica konačnih razlika je

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.40	1.58365				
		10297			
0.45	1.68662		785		
		11082		39	
0.50	1.79744		824		−3
		11906		36	
0.55	1.91650		860		
		12774			
0.60	2.04424				

a) $u=(x-x_0)/h=(0.40-0.40)/0.05=0$; primenom prve Njutnove interpolacione formule dobijamo:

$$f'(0.40)=\frac{1}{0.05}\left[0.10297-\frac{0.00785}{2}+\frac{0.00039}{3}-\frac{-0.00003}{4}\right]=1.98365;$$

$$f''(0.40)=\frac{1}{0.05^2}\left[0.00785-0.00039+\frac{11}{12}(-0.00003)\right]=2.97300.$$

b) $u=(x-x_0)/h=(0.42-0.40)/0.05=0.4$, pa primenom prve Njutnove interpolacione formule dobijamo:

$$f'(0.42)=\frac{1}{0.05}\left[0.10297+\frac{0.00785}{2}(2\cdot 0.4-1)+\frac{0.00039}{6}(3\cdot 0.4^2-\right.$$

$$\left.-6\cdot 0.4+2)+\frac{-0.00003}{12}(2\cdot 0.4^3-9\cdot 0.4^2+11\cdot 0.4-3)\right]=2.04380\,.$$

c) Ovde koristimo drugu Njutnovu interpolacionu formulu:

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1}+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2}(2v+1)+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{6}(3v^2+6v+2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta^4 y_{n-4}}{12}(2v^3+9v^2+11v+3)+\cdots\right],\quad v=\frac{x-x_n}{h}\,.$$

Kako je u konkretnom slučaju $v=(0.59-0.60)/0.05=-0.2$, to je

$$f'(0.59)=\frac{1}{0.05}\left[0.12774+\frac{0.00860}{2}(2\cdot(-0.2)+1)+\frac{0.00036}{6}(3\cdot(-0.2)^2+\right.$$

$$\left.+6\cdot(-0.2)+2)+\frac{-0.00003}{12}(2\cdot(-0.2)^3+9\cdot(-0.2)^2+11\cdot(-0.2)+3)\right]=$$

$$=2.60745.\ \blacktriangle$$

2. NUMERIČKO DIFERENCIRANJE ZASNOVANO NA TEJLOROVOM RAZVOJU FUNKCIJE

Kod primene formula za numeričko diferenciranje susrećemo se s dva oprečna zahteva: da bi greška aproksimacije funkcije $y = f(x)$ interpolacionim polinomom $P_n(x)$ bila manja, korak h treba smanjiti, a smanjenje koraka h dovodi do povećanja uticaja grešaka polaznih podataka i grešaka zaokruglji-vanja (zbog deljenja malom vrednošću h). Zbog toga se opravdano postavlja pitanje izbora optimalne vrednosti h_0 koraka h. Razmotrimo ovo pitanje na jednom primeru.

Primer 2. Ako su vrednosti $y_i = f(x_i)$ funkcije $y = f(x)$ zadate s tačnošću ε_i $(i=\overline{0,n})$ i ako je $f(x) \in C^2[x_0, x_n]$, pri čemu je ispunjen uslov $|f''(x)| \le M_2 < \infty$, naći optimalnu vrednost h_0 koraka h za numeričko diferen-ciranje pomoću formule

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}.$$

Rešenje. Kako je

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2, \quad \xi \in (x_0, x_1),$$

to je

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h,$$

tj. greška metode je

$$\boxed{r_1(h) = -\frac{f''(\xi)}{2!}h, \quad \xi \in (x_0, x_1),}$$

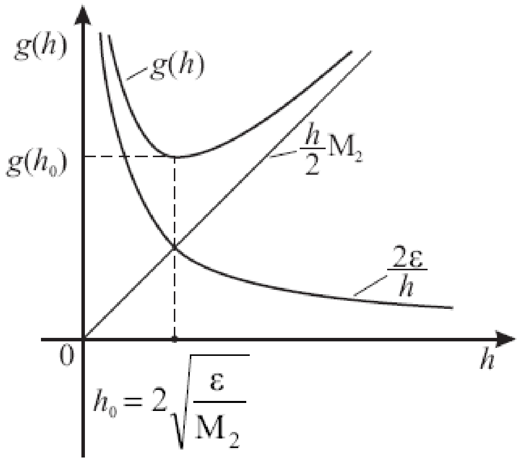
pa je $|r_1(h)| \le \frac{h}{2}M_2$. Kako su vrednosti y_0 i y_1 zadate s tačnošću ε_0 i ε_1, res-pektivno, to možemo uzeti $\varepsilon = \max(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, pa je greška zaokrugljivanja

$$\boxed{r_2(h) = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{h} \le \frac{2\varepsilon}{h},}$$

Ukupna greška je

$$|r(h)| \le |r_1(h)| + |r_2(h)| \le \frac{h}{2}M_2 + \frac{2\varepsilon}{h} = g(h).$$

Treba naći vrednost h_0 koraka h za koju je $g(h)$ minimalno (sl. 1).



Sl. 1

Redom računamo:

$$g'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2\varepsilon}{h^2}; \quad g'(h) = 0;$$

$h_0 = 2\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{M_2}}$ – optimalna vrednost koraka h;

$\min|g(h) - g(h_0)| = 2\sqrt{\varepsilon M_2}$.

Dakle, optimalna vrednost h_0 koraka h je

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}},$$

a najmanja greška je

$$2\sqrt{\varepsilon \cdot M_2}\ . \ \blacktriangle$$