II INTERPOLACIJA

0. OPŠTE O INTERPOLACIJI FUNKCIJA

U matematici i njenim primenama vrlo česti su zadaci sledećeg oblika:

a) Poznate su vrednosti $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ neke funkcije $y = f(x)$, gde $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$, $n \in N$ i konačan je broj, a *nije poznat* analitički oblik funkcije $f(x)$. Potrebno je izračunati približne vrednosti funkcije $f(x)$ za vrednosti argumenta x koje su različite od datih vrednosti x_i.

b) Poznate su vrednosti $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ neke funkcije $y = f(x)$, gde $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$, $n \in N$ i konačan je broj, a *poznat* je analitički oblik funkcije $f(x)$ ali je *vrlo komplikovan*. Potrebno je izračunati približne vrednosti funkcije $f(x)$ za vrednosti argumenta x koje su različite od datih vrednosti x_i.

Ako treba izračunati vrednost funkcije $f(x)$ za neko x, $x_0 < x < x_n$, $x \neq x_i$ onda se taj zadatak zove *interpolacija* (interpoler = umetnuti, franc.). Prema tome, reč interpolacija označavaće postupak nalaženja vrednosti neke funkcije $y = f(x)$ za $x \in [a,b]$ i $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 0, \overline{n-1}$, na osnovu tabele

x	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_i)$	...	$f(x_n)$

Ako treba izračunati vrednost funkcije $f(x)$ za neko $x < x_0$ ili $x > x_n$, onda se zadatak zove *ekstrapolacija*.

Zadatak interpolacije se sastoji u sledećem. Umesto poznate funkcije $y = f(x)$, zadate tablično ili analitičkim izrazom (ako se izračuna određen broj vrednosti te funkcije, ona se i u ovom slučaju može smatrati zadatom tablično), treba konstruisati jednostavniju funkciju $F(x; a_0, a_1, ..., a_n)$, gde su a_i $(i = \overline{0,n})$ neki parametri, pomoću koje se mogu lakše nalaziti vrednosti funkcije $f(x)$. Te vrednosti se nalaze približno ali s potrebnom tačnošću. Pri tome se zahteva da su zadovoljeni uslovi

(1) $$\boxed{F(x_j; a_0, a_1, ..., a_n) = f(x_j), \quad j = \overline{0,n}.}$$

Uslovi (1) se koriste za određivanje parametara a_i $(i=\overline{0,n})$.

Kao što se vidi postavlja se sledeći zadatak. Neka je na segmentu $[a, b]$ zadata mreža

(2) $$\boxed{\overline{\omega}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b\}}$$

i na njoj vrednosti funkcije $f(x)$:

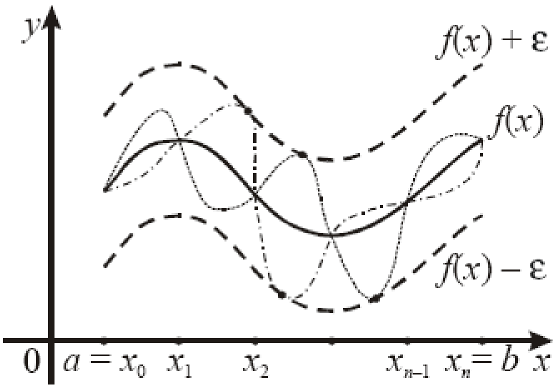
(3) $$\boxed{f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_i)=y_i, \ldots, f(x_n)=y_n.}$$

Treba konstruisati funkciju $F(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ koja se poklapa sa funkcijom $f(x)$ u tačkama x_i, $(i=\overline{0,n})$ – čvorovima mreže $\overline{\omega}$, tj.

(4) $$F(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n)=y_i,\quad (i=\overline{0,n}).$$

Ovako formulisan zadatak interpolacije može imati jedinstveno rešenje, imati konačno ili beskonačno mnogo rešenja ili nemati rešenje. Zbog toga se postavljaju dodatni uslovi. Prirodno je zahtevati da funkcija $F(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ u ostalim tačkama $x\in[a,b]$, $x\neq x_i$, $i=\overline{0,n}$, dobro aproksimira funkciju $f(x)$, dakle da bude

(5) $$|f(x)-F(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)|\leq\varepsilon,$$



Sl. 1

gde je $\varepsilon>0$ dopustiva greška aproksimacije. Nejednakost (5) se može geometrijski interpretirati kao na sl. 1. Ako je ε manje, onda je aproksimacija tačnija, bolja.

Prirodno je, takođe, zahtevati da je funkcija F (koju, inače, zovemo *interpolacionom funkcijom*) jednostavna za računanje.

Ako interpolaciona funkcija F *nelinearno* zavisi od neodređenih parametara $a_0, a_1, \ldots, a_n$, onda je nazivamo *nelinearnom* interpolacionom funkcijom (u tom slučaju nalaženje parametara $a_0, a_1, \ldots, a_n$ iz uslova (4) je najčešće vrlo teško), a ukoliko F zavisi *linearno* od neodređenih parametara $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tada se radi o *linearnoj* interpolacionoj funkciji. U ovom kratkom kursu će se razmatrati samo linearne interpolacione funkcije koje se, po pravilu, traže u obliku uopštenog polinoma, tj. u obliku

$$(6)\qquad \boxed{F(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x)},$$

gde su funkcije $g_k(x)$ zadate i linearno nezavisne (u protivnom bi se broj članova u zbiru i broj parametara mogao smanjiti), a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ neodređeni koeficijenti. Iz (4), imajući u vidu (6), se dobija

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x_i) = y_i\,, \quad i = \overline{0, n}\,,$$

tj. dobija se sistem od $(n+1)$–ne jednačine za određivanje $(n+1)$–nog koeficijenta a_i, $(i = \overline{0, n})$. Ako je sistem funkcija $g_k(x)$ tako izabran da je za proizvoljan izbor čvorova $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ različita od nule determinanta sistema (7), tj.

$$D(g) = \begin{vmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

i ako su zadate vrednosti y_i, $(i = \overline{0, n})$, onda su sistemom (7) jednoznačno određeni koeficijenti a_i, $(i = \overline{0, n})$, odnosno, jednoznačno je određena interpolaciona funkcija (6).

Za linearno nezavisne funkcije $g_k(x)$ najčešće se biraju: stepene funkcije $1, x, x^2, \ldots, x^n$ – tada je interpolaciona funkcija

$$\boxed{F(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_n) \equiv P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n},$$

dakle, algebarski polinom stepena n; trigonometrijske funkcije 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ..., $\sin nx$, $\cos nx$ – tada je interpolaciona funkcija

$$\boxed{\begin{aligned} F(x;\, a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \equiv T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx, \end{aligned}}$$

dakle, trigonometrijski polinom stepena n; eksponencijalne funkcije: 1, e^{px}, e^{qx}, ..., e^{tx}, gde su p, q, ..., t različite konstante, i tako dalje.

Radi lakšeg računanja u praksi se najčešće koriste algebarski polinomi; dakle, interpolacionu funkciju (6) tražićemo u obliku

$$(8)\qquad \boxed{F(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_n) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k},$$

gde se koeficijenti, saglasno uslovu (4), odnosno (7), dobijaju iz sistema linearnih algebarskih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0, \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1, \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Determinanta sistema (9)

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}
$$

je Vandermondova (A. T. Wandermonde, 1735–1796) determinanta, i njena vrednost je

$$
\boxed{D = \prod_{n \ge k > m \ge 0} (x_k - x_m) \neq 0,}
$$

jer su čvorovi x_i, $(i = \overline{0, n})$ međusobno različiti. Dakle, interpolacioni polinom (8) postoji i jedinstven je, ali postoji mnogo formi zapisivanja tog polinoma. Svaka od tih formi nosi poseban naziv, pa imamo: I i II Njutnov interpolacioni polinom, I i II Gausov interpolacioni polinom, Beselov interpolacioni polinom, itd; svaki od njih ima izvesne pogodnosti u numeričkom smislu u nekim situacijama.

Posebno je značajno pitanje ocene greške aproksimacije

$$
f(x) \approx P_n(x). \tag{10}
$$

Da je aproksimacija (10) uopšte moguća opravdavaju sledeće teoreme, koje je dao Vajerštras (K. Weierstrass, 1815–1897) 1855. god.

Teorema 1. Ako je $f(x) \in C[a, b]$, onda za proizvoljno maleno $\varepsilon > 0$ postoji takav polinom $P_n(x)$ da za svako $x \in [a, b]$ važi sledeća nejednakost

$$
| f(x) - P_n(x) | < \varepsilon .
$$

Teorema 2. Ako je $f(x) \in C[0, 2\pi]$ i periodična s periodom 2π, onda za proizvoljno maleno $\varepsilon > 0$ postoji takav trigonometrijski polinom $T_n(x)$ da za svako $x \in (-\infty, \infty)$ važi nejednakost

$$
| f(x) - T_n(x) | < \varepsilon .
$$

Osnovna pitanja teorije interpolacije su:

1) pogodno formiranje interpolacionog polinoma za zadati izbor sistema linearno nezavisnih funkcija $g_k(x)$;

2) nalaženje ocene greške aproksimacije $f(x) \approx F(x; a_0, a_1, ..., a_n)$;

3) optimalan izbor čvorova interpolacije u smislu minimizacije greške interpolacije;

4) analiza uticaja grešaka približnih vrednosti funkcije u čvorovima interpolacije;

5) ispitivanje konvergencije niza interpolacionih polinoma ka funkciji $f(x)$ kada broj čvorova interpolacije neograničeno raste.

1. LAGRANŽEV INTERPOLACIONI POLINOM

Neka je na segmentu $[a, b]$ zadato $n + 1$ različitih čvorova: $x_0, x_1, ..., x_n$ i neka su $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, vrednosti funkcije $y = f(x)$ u tim čvorovima. Treba konstruisati interpolacioni polinom $L_n(x)$, stepena ne većeg od n, takav da je

$$\boxed{L_n(x_i) = y_i\,, \quad i = \overline{0, n}\,.} \tag{1}$$

Dakle, traži se polinom $L_n(x)$ koji prolazi kroz tačke $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0, n}$. Postavljeni zadatak se može rešiti na sledeći način. Konstruišimo, prvo, pomoćni polinom $p_i(x)$ n–tog stepena koji je jednak nuli za $x = x_j$, $j \neq i$, a jednak jedinici za $x = x_i$, tj.

$$\boxed{p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i, \end{cases}} \tag{2}$$

gde je δ_{ij} Kronekerov (L. Kronecker, 1823–1891) simbol. Dakle, treba konstruisati polinom $p_i(x)$ koji se anulira u n tačaka: $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Kako je polinom svojim nulama određen do na konstantan faktor, to je

$$p_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)\,, \tag{3}$$

gde je C_i konstanta. Stavimo li $x = x_i$ u (3), dobićemo

$$1 = p_i(x_i) = C_i (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)\,,$$

odnosno

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}\,,$$

pa je

$$\boxed{p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}}\,. \tag{4}$$

Traženi interpolacioni polinom ima oblik

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \cdot y_i\,.} \tag{5}$$

Očigledno je da je polinom $L_n(x)$ stepena ne višeg od n; zbog uslova (2) je

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x_j)\cdot y_i = p_j(x_j)\cdot y_j = y_j\,,\quad j=\overline{0,n}\,,$$

tj. ispunjen je uslov (1), odnosno, polinom $L_n(x)$ prolazi kroz sve tačke $M_i(x_i,y_i)$, $i=\overline{0,n}$. Uvrstimo li (4) u (5), dobićemo

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\cdot y_i\,.}\tag{6}$$

Ovaj interpolacioni polinom se zove Lagranžev (L. J. Lagrange, 1736–1813) interpolacioni polinom.

Lagranžev interpolacioni polinom (6) može se zapisati u kraćem, „kondenzovanijem“ obliku. Da bismo to učinili, uvedimo oznaku

$$\prod\nolimits_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)\cdots(x-x_n)\,.\tag{7}$$

Diferencirajući (7) po x i stavljajući $x=x_i$ dobijamo

$$\prod\nolimits_{n+1}'(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)\,.\tag{8}$$

Uvrstimo li (7) i (8) u formulu (6), dobićemo

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i)\prod_{n+1}'(x_i)}\cdot y_i\,,$$

ili

$$\boxed{L_n(x)=\prod\nolimits_{n+1}(x)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\prod_{n+1}'(x_i)}\,.}\tag{9}$$

Dokažimo još i jedinstvenost Lagranževog interpolacionog polinoma. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\tilde{L}_n(x)$ polinom različit od polinoma $L_n(x)$, stepena ne višeg od n i takav da je

$$\tilde{L}_n(x_i)=y_i\,,\quad i=\overline{0,n}\,.$$

Tada polinom

$$Q_n(x)=L_n(x)-\tilde{L}_n(x)$$

ima stepen ne viši od n i anulira se u $n+1$ tački: $x_0,x_1,\ldots,x_n$, a to je moguće ako i samo ako je $Q_n(x)\equiv 0$, tj. $L_n(x)\equiv\tilde{L}_n(x)$.

Primer 1. Funkcija $y=f(x)$ je zadata tabelom

x	0	1	2	4
y	1	4	13	73

a) Naći Lagranžev interpolacioni polinom $L_3(x)$.

b) Izračunati približnu vrednost funkcije $f(x)$ za $x=3$.

Rešenje. a) Traženi interpolacioni polinom je

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(x-4)} \cdot 4 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} \cdot 13 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \cdot 73,$$

ili, posle sređivanja,

$$L_3(x) = x^3 + 2x + 1.$$

b) $f(3) \approx L_3(3) = 34$. ▲

2. OPŠTA OCENA GREŠKE INTERPOLACIJE

Postavlja se pitanje ocene greške

(1) $$R_n(x) = f(x) - L_n(x)\,.$$

Kako su vrednosti y_i funkcije $y = f(x)$ približne, to se javlja dopunska greška. Osim toga, u procesu računanja zbog grešaka zaokrugljivanja javlja se nova greška. Prva greška, greška $R_n(x)$, je greška metode, druga je neotklonjiva greška a treća je greška zaokrugljivanja. Ovde ćemo proučiti grešku metode, koja se, ponekad, naziva ostatkom interpolacije.

Postupak nalaženja izraza za $R_n(x)$ je sličan postupku nalaženja ostatka Tejlorove formule. Pođimo, dakle, od pomoćne funkcije

(2) $$F(z) = f(z) - L_n(z) - \frac{(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}\cdot R_n(x)\,,$$

gde je z realna promenljiva, x neka fiksirana vrednost u $[x_0, x_n]$, različita od x_i, $i=\overline{0,n}$. Pretpostavimo da je $f(x)\in C^{n+1}[x_0,x_n]$; tada je, očigledno, i $F(x)\in C^{n+1}[x_0,x_n]$. Može se primetiti da se funkcija $F(x)$ anulira u $n+2$ tačke: $x_0, x_1, ..., x_n, x$. Ove tačke određuju n + 1 podsegment segmenta $[x_0, x_n]$. Primenivši na svakom od tih podsegmenata Rolovu (M. Rolle, 1652–1719) teoremu zaključujemo da funkcija $F'(z)$ ima najmanje $n+1$ nulu u $[x_0, x_n]$. Primenivši na analogan način Rolovu teoremu redom na $F'(z)$, $F''(z)$, ..., $F^{(n+1)}(z)$ zaključujemo da $F^{(n+1)}(z)$ ima bar jednu nulu u $[x_0, x_n]$; neka je $z=\xi\in(x_0,x_n)$ i $F^{(n+1)}(\xi)=0$. Osim toga,

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}[(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)] = (n+1)!\,.$$

Na taj način se dobija

(3) $$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}\cdot R_n(x)\,.$$

Stavivši $z = \xi$ u (3) dobija se

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}\cdot R_n(x)\,,$$

odakle je

(4) $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,,\quad \xi\in(x_0,x_n)$$

ili

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{n+1}(x)\,, \quad \xi \in (x_0, x_n)\,,}$$

gde je

$$\prod_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,.$$

Ako je moguće naći maksimum $(n+1)$–vog izvoda funkcije $f(x)$ na $[x_0, x_n]$, tj.

$$\max|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}\,, \quad x \in [x_0, x_n]\,,$$

onda se iz (4) dobija

$$\boxed{|R_n(x)| \;=\; |f^{(n+1)}(x) - L_n(x)| \;\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{n+1}(x)\right|.} \tag{5}$$

Primer 1. Funkcija $y = 1/(1+x^2)$ je zadata tablicom

x	0.0	0.1	0.3	0.5
y	1.00	0.99	0.92	0.80

Naći Lagranžev interpolacioni polinom $L_3(x)$ i proceniti grešku.

Rešenje. Traženi interpolacioni polinom je

$$L_3(x) = \frac{(x-0.1)(x-0.3)(x-0.5)}{(0.0-0.1)(0.0-0.3)(0.0-0.5)}\cdot 1.00 + \frac{(x-0.0)(x-0.3)(x-0.5)}{(0.1-0.0)(0.1-0.3)(0.1-0.5)}\cdot 0.99 +$$
$$+\frac{(x-0.0)(x-0.1)(x-0.5)}{(0.3-0.0)(0.3-0.1)(0.3-0.5)}\cdot 0.92 + \frac{(x-0.0)(x-0.1)(x-0.3)}{(0.5-0.0)(0.5-0.1)(0.5-0.3)}\cdot 0.80,$$

ili, posle sređivanja, $L_3(x) = \frac{5}{12}x^3 - x^2 - \frac{1}{240}x + 1$.

Ocenimo grešku. Da bismo izbegli neposredno izračunavanje četvrtog izvoda, iskoristićemo činjenicu da je

$$[1/(1+x^2)]^{(k)} = [\operatorname{arctg} x^{(k+1)}] = k!\cos^{k+1} A \cdot \sin(k+1)\left(A + \frac{\pi}{2}\right),$$

gde je $A = \operatorname{arc\,tg} x$. Na taj način imamo za $x \in [0.0, 0.5]$

$$|1/(1+x^2)^{(4)}| \le \max\left|4!\cos^5 A \cdot \sin\left(5\left(A + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right| = 4!$$

pa je

$$|R_3(x)| \le \frac{4!}{4!}|x(x-0.1)(x-0.3)(x-0.5)|\,, \quad x \in [0.0, 0.5]\,. \;\blacktriangle$$

3. KONAČNE RAZLIKE FUNKCIJA

Neka je data mreža ekvidistantnih tačaka, čvorova, argumenta x: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, ..., $x_i = x_0 + ih$, ..., gde je priraštaj argumenta x ili korak $h = x_{i+1} - x_i = \text{const.}$ i $h \neq 0$ (i = 0, 1, 2, ...). Neka su poznate vrednosti $y_i = f(x_i)$ funkcije $y = f(x)$ u čvorovima x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Konačne razlike prvog reda funkcije $f(x)$ su:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \ldots;$$

Konačne razlike drugog reda funkcije $f(x)$ su:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ \ldots;$$

Uopšte, konačne razlike n–tog reda funkcije $f(x)$ su:

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0,\ \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1,\ \ldots,\ \Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i,\ \ldots$$

Navedimo neke osobine konačnih razlika:

a) Ako je $f(x) = u(x) + v(x)$, onda je $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$;

b) Ako je $f(x) = k \cdot u(x)$, gde je k konstanta, onda je $\Delta(ku) = k\Delta u$;

c) $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y = \Delta^n(\Delta^m y)$, gde su m i n celi nenegativni brojevi, pri čemu po definiciji stavljamo $\Delta^0 y = y$.

d) Ako je $f(x) = P_n(x)$ – polinom n–tog stepena, onda je $\Delta P_n(x)$ polinom $(n-1)$–vog stepena.

Dokaz ove činjenice je zaista jednostavan. Naime, po definiciji imamo

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = [a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x+h) + a_n] -$$
$$-[a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n] = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

gde je $b_0 = n \cdot h \cdot a_0$;

Analogno zaključujemo:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x) = c_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + c_{n-2},$$

gde je $c_0 = (n-1) \cdot h \cdot b_0 = n(n-1) \cdot h^2 a_0$;

$$\Delta^3 P_n(x) = \Delta^2 P_n(x+h) - \Delta^2 P_n(x) = d_0 x^{n-3} + d_1 x^{n-4} + \cdots + d_{n-3},$$

gde je $d_0 = (n-2) \cdot h \cdot c_0 = n(n-1)(n-2) \cdot h^3 a_0$;

i na kraju $\Delta^n P_n(x) = n! h^n a_0$; za $k > n$, $\Delta^k P_n(x) = 0$.

Dakle, n–te razlike polinoma n–tog stepena su konstantne, a razlike višeg reda od n su jednake nuli.

Teorema 1. Ako je $f(x) \in C^n[x_i, x_{i+n}]$, onda postoji takva tačka $\xi \in (x_i, x_{i+n})$ da je

(1) $$\Delta^n f_i = \Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\xi),\quad n \in N.$$

Konačne razlike je pogodno smestiti u tablicu; tablice mogu biti dijagonalne

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	...
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

i horizontalne (donje i gornje).

Primer 1. Sastaviti dijagonalnu tablicu konačnih razlika za funkciju $f(x) = x^3 + 9x^2 + 8x + 7$ na odsečku [0, 1] uzimajući korak $h = 0.2$; vrednosti funkcije izračunati s tačnošću $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

Rešenje. Tablica konačnih razlika je

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.0	7.0000			
		1.9680		
0.2	8.9860		7680	
		2.7360		480
0.4	11.7040		8160	
		3.5520		480
0.6	15.2560		8640	
		4.4160		480
0.8	19.6720		9120	
		5.3280		
1.0	25.0000			

Kod sastavljanja tablica konačnih razlika mogu se napraviti tzv. omaške. Razmotrimo problem uticaja omaške, njeno prostiranje u tablicama, otkrivanje i otklanjanje. Neka smo umesto vrednosti y_i omaškom uzeli vrednost $y_i + \varepsilon$, gde je $\varepsilon = (y_i + \varepsilon) - y_i$. Veoma lako se može uočiti zakonitost prostiranja omaške.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
$\vdots$	$\vdots$					
x_{i-4}	y_{i-4}	$\vdots$				
		Δy_{i-4}	$\vdots$			
x_{i-3}	y_{i-3}		$\Delta^2 y_{i-4}$	$\vdots$		
		Δy_{i-3}		$\Delta^3 y_{i-4}$	$\vdots$	
x_{i-2}	y_{i-2}		$\Delta^2 y_{i-3}$		$\Delta^4 y_{i-4}+\varepsilon$	...
		Δy_{i-2}		$\Delta^3 y_{i-3}+\varepsilon$		
x_{i-1}	y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2}+\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-3}-4\varepsilon$	...
		$\Delta y_{i-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-2}-3\varepsilon$		
x_i	$y_i+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{i-1}-2\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-2}+6\varepsilon$	
		$\Delta y_i-\varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-1}+3\varepsilon$		
x_{i+1}	y_{i+1}		$\Delta^2 y_i+\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-1}-4\varepsilon$	
		Δy_{i+1}		$\Delta^3 y_i-\varepsilon$		
x_{i+2}	y_{i+2}		$\Delta^2 y_{i+1}$		$\Delta^4 y_i+\varepsilon$	
		Δy_{i+2}		$\Delta^3 y_{i+1}$	$\vdots$	
x_{i+3}	y_{i+3}		$\Delta^2 y_{i+2}$	$\vdots$		
		Δy_{i+3}	$\vdots$			
x_{i+4}	y_{i+4}	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$					

Na osnovu te zakonitosti ona se može otkriti i otkloniti. Posmatrajmo dijagonalnu tablicu. Iz tablice se vidi da se omaška širi „lepezasto“ i da su koeficijenti uz ε u koloni $\Delta^k y$, ustvari, binomni koeficijenti binoma $(a-b)^k$, $k = 0, 1, 2, ...$ Može se primetiti da se omaška ne može otkriti sabiranjem kolone $\Delta^k y$, $k = 1, 2, 3, ...,$ jer se uticaji ε–na potiru. Međutim, u kolonama parnih razlika najveći uticaj omaške ε je upravo u onom horizontalnom redu gde je omaška učinjena. Koristeći ovu činjenicu i činjenicu da se očekuje da se razlike dovoljno visokog reda neznatno razlikuju, omaška se može otkriti, izračunati i otkloniti.

Primer 2. U sledećoj tablici vrednosti funkcije $y = f(x)$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	1.00000	1.05127	1.10517	1.16203	1.22140	1.28403	1.34986	1.41907	1.49182

učinjena je omaška. Otkriti i otkloniti omašku.

Rešenje. Tablica konačnih razlika je

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	
0.0	1.00000					
		5127				
0.1	1.05127		263			
		5390		33		
0.2	1.10517		296		–78	-4ε
		5686		–45		
0.3	1.16203		251		120	$+6\varepsilon$
		5937		75		
0.4	1.22140		326		–81	-4ε
		6263		–6		
0.5	1.28403		320		24	$+\varepsilon$
		6583		18		
0.6	1.34986		338		–2	
		6921		16		
0.7	1.41907		354			
		7275				
0.8	1.49182					

Uočavamo „nepravilno“ ponašanje četvrtih razlika; najizrazitije odstupanje od očekivanih razlika je u redu $x = 0.3$ – dakle, umesto vrednosti y_3 upisana je omaškom vrednost $y_3 + \varepsilon = 1.16203$. Sada redom nalazimo: očekivana razlika četvrtog reda (srednja vrednost) je

$$\overline{\Delta}^4 y = \frac{-78+120-81+24-2}{5} \cdot 10^{-5} \approx -3 \cdot 10^{-5};$$

dalje imamo (izostavljajući faktor 10^{-5}):

$$-78 = -3 - 4\varepsilon_1,\ \ \varepsilon_1 = 19,\ \ 120 = -3 + 6\varepsilon_2,\ \ \varepsilon_2 = 20,$$

$$-81 = -3 - 4\varepsilon_3,\ \ \varepsilon_3 = 20,\ \ 24 = -3 + \varepsilon_4,\ \ \varepsilon_4 = 27,$$

pa uzimamo

$$\varepsilon = \frac{19+20+20+27}{4} \cdot 10^{-5} = 22 \cdot 10^{-5},$$

tj. ispravljena vrednost je $y_3 = 1.16181$. ▲

S povećanjem reda konačnih razlika uticaj početnih grešaka je sve veći i veći.

Znači da su konačne razlike sve manje i manje a uticaj početnih grešaka je sve veći i veći. Ako se dogodi da je bar za neko i

$$|\Delta^m y_i| < 2^m \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k},$$

tj. ako je bar neka izračunata konačna razlika m–tog reda manja od maksimalno moguće greške te razlike, onda su tablice konačnih razlika od razlika tog reda pa dalje *nekorektne*.

4. PRVI NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM

Neka su $y_i = f(x_i)$ zadate vrednosti funkcije $y = f(x)$ u ekvidistantnim čvorovima interpolacije x_i, $i = \overline{0, n}$. Treba naći interpolacioni polinom $P_n(x)$ koji zadovoljava uslove

$$F(x_i; a_0, a_1, \dots, a_n) \equiv P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}, \tag{1}$$

tj. koji prolazi kroz tačke $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Potražimo interpolacioni polinom u sledećem obliku

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Saglasno ranije rečenom redom dobijamo za $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$x = x_0 : y_0 = P_n(x_0) = a_0, \text{ pa je } a_0 = y_0;$$

$$x = x_1 : y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \text{ pa je } a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h};$$

$$x = x_2 : y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2};$$

analogno dobijamo

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}, \dots, a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, \dots, a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Zamenom ovih vrednosti u (2) dobijamo

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{3}$$

što nazivamo prvi Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove.

Ako u (3) uvedemo smenu

$$\frac{x - x_0}{h} = u \quad \text{ili} \quad x = x_0 + hu, \tag{4}$$

dobićemo

$$P_n(x_0 + hu) = P_n(u) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u-1)\cdots(u - n + 1), \tag{5}$$

što je najčešći oblik zapisivanja prvog Njutnovog interpolacionog polinoma.

Ponekad se zapisuje i u obliku

$$P_n(x_0 + hu) = \binom{u}{0}\Delta^0 y_0 + \binom{u}{1}\Delta^1 y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{u}{n}\Delta^n y_0.$$

Iz samog izvođenja sledi da je stepen polinoma najviše n i da je polinom jedinstven. Nije teško primetiti da interpolacioni polinom $P_n(x)$ prelazi u Tejlorov polinom kada $x_{i+1} - x_i = h \to 0$; dakle, prvi Njutnov interpolacioni polinom (3), odnosno (5), pogodno je koristiti oko tačke $x = x_0$ – u početku tablica: *interpolaciju unapred* i za ekstrapolaciju za $x < x_0$ – *ekstrapolaciju unazad*.

Greška prvog Njutnovog interpolacionog polinoma se dobija iz opšte formule za grešku interpolacije:

(6) $$R_n(x_0 + hu) = R_n(u) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(u-1)\cdots(u-n)\,,\ \xi \in (x_0, x_n)\,,\ u = \frac{x - x_0}{h}\,,$$

ili

(6') $$R_n(x_0 + hu) = R_n(u) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} u(u-1)\cdots(u-n)\,.$$

Primer 1. Konstruisati prvi Njutnov interpolacioni polinom za funkciju $y = f(x)$ zadatu sledećom tablicom

x	0	1	2	3	4
y	2.00000	2.08008	2.15443	2.22398	2.28943

Izračunati približnu vrednost $f(0.5)$. Proceniti grešku $f(x) - P_3(x)$.

Rešenje. Tablica konačnih razlika je

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	2.00000				
		8008			
1	2.08008		–573		
		7435		93	
2	2.15443		–480		–23
		6955		70	
3	2.22398		–410		
		6545			
4	2.28943				

Interpolacioni polinom je

$$P_4(u) = 2.00000 + \frac{0.08008}{1!} u + \frac{-0.00573}{2!} u(u-1) + \frac{0.00093}{3!} u(u-1)(u-2) +$$
$$+ \frac{-0.00023}{4!} u(u-1)(u-2)(u-3),$$

gde je $u = \dfrac{x - 0}{1} = x$.

Približna vrednost je $f(0.5) \approx P_4(0.5) = 2.04082$.
Greška je

$$|R_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \approx \frac{|\Delta^4 y_0|}{4!} |x(x-1)(x-2)(x-3)| =$$

$$= \frac{0.00023}{4!} |x(x-1)(x-2)(x-3)|. \ \blacktriangle$$

5. DRUGI NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM

Neka su $y_i = f(x_i)$ zadate vrednosti funkcije $y = f(x)$ u ekvidistantnim čvorovima interpolacije x_i, $i = \overline{0, n}$. Treba naći interpolacioni polinom $P_n(x)$ koji zadovoljava uslove

(1) $$F(x_i; a_0, a_1, ..., a_n) \equiv P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$$

tj. koji prolazi kroz tačke $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Potražimo interpolacioni polinom u sledećem obliku

(2) $$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

Analogno izvođenju prvog Njutnovog interpolacionog polinoma dobijamo redom za $x = x_i$, $i = n, n-1, ..., 1, 0$:

$$x = x_n : y_n = P_n(x_n) = a_0 \text{, pa je } a_0 = y_n;$$

$$x = x_{n-1} : y_{n-1} = P_n(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) \text{, pa je } a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h};$$

dalje dobijamo

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2},\ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3},\ ...,\ a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i},\ ...,\ a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Zamenom ovih vrednosti u (2) dobijamo

(3) $$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1),$$

što nazivamo drugi Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove.

Ako u (3) uvedemo smenu

(4) $$\frac{x - x_n}{h} = v \text{ ili } x = x_n + hv$$

dobićemo

(5) $$P_n(x_0 + hu) = P_n(v) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}v(v+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}v(v+1)\cdots(v+n-1)$$

što je najčešći oblik zapisivanja drugog Njutnovog interpolacionog polinoma.

Iz samog izvođenja sledi da je stepen polinoma najviše jednak n i da je polinom jedinstven.

Greška drugog Njutnovog interpolacionog polinoma se dobija iz opšte formule za grešku interpolacije:

(6) $$\boxed{R_n(x_0+hv)=R_n(v)=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}v(v+1)\cdots(v+n)\,,\ \xi\in(x_0,x_n)\,,\ v=\frac{x-x_n}{h}\,,}$$

ili

(6') $$\boxed{R_n(x_0+hv)=R_n(v)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}v(v+1)\cdots(v+n)\,.}$$

6. TABLICA CENTRALNIH RAZLIKA

Njutnove interpolacione formule koriste, kao što smo videli, tablične vrednosti funkcije koje se nalaze samo s jedne strane izabrane vrednosti funkcije: prva Njutnova interpolaciona formula koristi vrednosti na početku tablice: $y_0, y_1, y_2, \ldots$, a druga na kraju tablice: $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$ Dakle, one su na neki način „jednostrane" i to predstavlja njihov nedostatak. U mnogim slučajevima pokazuju se korisnijim interpolacione formule koje koriste vrednosti funkcije s obe strane izabrane početne vrednosti funkcije. Najčešće se koriste konačne razlike iz tablice konačnih razlika koje se nalaze u vrsti u kojoj se nalazi izabrana početna, nulta vrednost funkcije i konačne razlike iznad ili ispod te vrste ili i iznad i ispod te vrste.

Radi izvođenja odgovarajućih interpolacionih formula napravićemo tzv. tablicu centralnih razlika.

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata svojim vrednostima $y_i = f(x_i)$ u jednako razmaknutim čvorovima $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, korak h je konstantan, različit od nule. Konačne razlike (v. tablicu): Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-2}$, $\Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2}$, ... su centralne razlike.

Odgovarajuće interpolacione formule se zovu interpolacione formule sa centralnim razlikama. Najčešće se koriste: Gausove interpolacione formule, Stirlingova i Beselova interpolaciona formula.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$							
x_{-4}	y_{-4}	$\vdots$						
		Δy_{-4}	$\vdots$					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$	$\vdots$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$	$\vdots$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	$\vdots$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	$\vdots$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$	
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$	$\dots$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	$\vdots$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	$\vdots$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	$\vdots$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	$\vdots$				
		Δy_3	$\vdots$					
x_4	y_4	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$							

7. GAUSOVE INTERPOLACIONE FORMULE

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata svojim vrednostima $y_i = f(x_i)$ u $\boxed{\text{jednako razmaknutim čvorovima}}$ $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, korak h je konstantan, različit od nule. Treba konstruisati interpolacioni polinom $P(x)$, stepena $\leq 2n$, takav da bude

$$P(x_i) = y_i\,,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\,. \tag{1}$$

Potražimo interpolacioni polinom u sledećem obliku

$$\begin{aligned}P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ &\quad + a_{2n-1}(x - x_{-n+1})\cdots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) + \\ &\quad + a_{2n}(x - x_{-n+1})\cdots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n).\end{aligned} \tag{2}$$

Koeficijente a_i, $i = \overline{0, 2n}$, određujemo na uobičajeni način, dakle, iz uslova (1).

Na taj način dobijamo

$$a_0 = y_0\,,\quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}\,,\quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}\,,\quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}\,,\quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}\,, \ldots,$$

$$a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!h^{2n-1}}\,,\quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}\,.$$

Ako uvedemo novu promenljivu smenom

$$\frac{x - x_0}{h} = u\,,$$

dobićemo

$$
\boxed{
\begin{aligned}
P(x_0+hu) = y_0 &+ \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}u(u^2-1^2) + \\
&+ \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}u(u^2-1^2)(u-2) + \frac{\Delta^5 y_{-2}}{5!}u(u^2-1^2)(u^2-2^2) + \cdots + \\
&+ \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!}u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots[u^2-(n-1)^2] + \\
&+ \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!}u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots[u^2-(n-1)^2](u-n),
\end{aligned}
}
\tag{3}\quad (G_1)
$$

što predstavlja prvu Gausovu interpolacionu formulu ili Gausovu interpolacionu formulu za interpolaciju *unapred*. Primetimo da ona sadrži centralne razlike

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\underline{x_0\ \ y_0} & & & & \Delta^2 y_{-1} & & & & \Delta^4 y_{-2} & & & & \Delta^6 y_{-3} \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
& & \underline{\Delta y_0} & & & & \underline{\Delta^3 y_{-1}} & & & & \underline{\Delta^5 y_{-2}} & & & & \cdots
\end{array}
$$

Ako potražimo interpolacionu formulu u sledećem obliku

$$
\begin{aligned}
P(x) = a_0 &+ a_1(x-x_0) + a_2(x-x_{-1})(x-x_0) + \\
&+ a_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + \\
&+ a_4(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \\
&+ a_{2n-1}(x-x_{-n+1})\cdots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + \\
&+ a_{2n}(x-x_{-n})\cdots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

na analogan način, koristeći uslov (1), dobijamo drugu Gausovu interpolacionu formulu ili Gausovu interpolacionu formulu za interpolaciju *unazad*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
P(x_0+hu) = y_0 &+ \frac{\Delta y_{-1}}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}(u+1)u + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}u(u^2-1^2) + \\
&+ \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}(u+2)u(u^2-1^2) + \frac{\Delta^5 y_{-3}}{5!}u(u^2-1^2)(u^2-2^2) + \cdots + \\
&+ \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!}u(u^2-1^2)(u^2-1^2)\cdots[u^2-(n-1)^2] + \\
&+ \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!}(u+n)u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots[u^2-(n-1)^2],
\end{aligned}
}
\tag{5}\quad (G_2)
$$

$u = \dfrac{x-x_0}{h}$.

Primetimo da ona sadrži centralne razlike

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Delta y_{-1} & & & & \Delta^3 y_{-2} & & & & \Delta^5 y_{-3} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\
\underline{x_0 \;\; y_0} & & & & \underline{\Delta^2 y_{-1}} & & & & \underline{\Delta^4 y_{-2}} & & & & \underline{\Delta^6 y_{-3}}
\end{array}$$

U sledećoj tabeli centralnih razlika naznačene su vrednosti koje se koriste u Gausovim interpolacionim formulama: G_1, G_2 i G_3.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	
$\vdots$	$\vdots$							
x_{-4}	y_{-4}							
		Δy_{-4}						
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$					
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		G_2
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$	
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$		G_1
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$		G_3
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		$\Delta^6 y_{-1}$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_{-0}$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$			
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$				
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$					
		Δy_4						
x_5	y_5							
$\vdots$	$\vdots$							

Radi izvođenja Beselove interpolacione formule biće nam potrebna i Gausova interpolaciona formula za interpolaciju unazad ali kada se uzmu početne vrednosti $x = x_1$ i $y = y_1$, odnosno kada se koriste centralne razlike

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Delta y_0 & & & & \Delta^3 y_{-1} & & & & \Delta^5 y_{-2} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\
\underline{x_1 \; y_1} & & & & \underline{\Delta^2 y_0} & & & & \underline{\Delta^4 y_{-1}} & & & & \underline{\Delta^6 y_{-2}}
\end{array}
$$

Dakle, treća Gausova interpolaciona formula je

$$
\begin{aligned}
y = y_1 + (u-1)\Delta y_0 + u(u-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} + \\
+ u(u^2-1)(u-2)\frac{\Delta^4 y_{-1}}{4!} + u(u^2-1)(u-2)(u-3)\frac{\Delta^5 y_{-2}}{5!} + \cdots
\end{aligned} \tag{6} \quad (G_3)
$$

Primer 1. Funkcija $y = f(x)$ je zadata tablicom

x	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56
$f(x)$	0.778801	0.770974	0.763074	0.755104	0.747067	0.738968	0.730811

Izračunati $f(0.532)$.

Rešenje. Sastavimo tablicu konačnih, centralnih razlika.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.50	0.778801			
		−7827		
0.51	0.770974		−73	
		−7900		3
0.52	0.763074		−70	
		−7970		3
0.53	0.755104		−67	
		−8037		5
0.54	0.747067		−62	
		−8099		4
0.55	0.738968		−58	
		−8157		
0.56	0.730811			

Kako je $x = 0.532$ najbliže vrednosti 0.53, to uzimamo da je $x_0 = 0.53$, pa je

$$
u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.532 - 0.53}{0.01} = 0.2 .
$$

Na osnovu formule G_1 (u tablici podvučene vrednosti) nalazimo

$$\begin{aligned} f(0.532) &\approx P(0.532) = 0.755107 + \frac{-0.008037}{1!}\cdot 0.2 + \\ &+\frac{-0.000067}{2!}\cdot 0.2\cdot(0.2-1) + \frac{-0.000005}{3!}\cdot 0.2\cdot(0.2^2-1^2) = \\ &= 0.755104 - 0.001607 + 0.000005 - 0.00000 = 0.753502. \end{aligned}$$

Na osnovu formule G_2 (u tablici isprekidano podvučene vrednosti) nalazimo

$$\begin{aligned} f(0.532) &\approx P(0.532) = 0.755107 + \frac{-0.007970}{1!}\cdot 0.2 + \\ &+\frac{-0.000067}{2!}\cdot 0.2\cdot(0.2+1) + \frac{-0.000003}{3!}\cdot 0.2\cdot(0.2^2-1^2) = \\ &= 0.755104 - 0.001594 - 0.000008 - 0.00000 = 0.753502. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

8. STIRLINGOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Ako uzmemo aritmetičku sredinu prve i druge Gausove interpolacione formule (G_1 i G_2), dobićemo Stirlingovu interpolacionu formulu

$$
\boxed{
\begin{aligned}
P(u) = {} & y_0 + u\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2} + \\
& + \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2} + \\
& + \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots + \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\cdot \\
& \cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2} + \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},
\end{aligned}
}
\tag{1}
$$

gde je $u = \dfrac{x-x_0}{h}$.

Stirlingova formula koristi razlike u tablici u redu u kojem se nalaze x_0 i redu iznad i redu ispod njega.

Greška Stirlingove interpolacione formule je:

$$R_n = \frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}u(u^2-1)(u^2-2^2)(u^2-3^2)\cdots(u^2-n^2),\quad \xi\in[x_{-n},x_n],$$

$$\boxed{R_n = \frac{\Delta^{2n+1}y_{-n-1}+\Delta^{2n+1}y_{-n}}{2(2n+1)!}u(u^2-1)(u^2-2^2)(u^2-3^2)\cdots(u^2-n^2).}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
$\vdots$	$\vdots$								
x_{-4}	y_{-4}								
		Δy_{-4}							
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$						
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$					
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$				
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-2}}$		$\boldsymbol{\Delta^5 y_{-3}}$		$\boldsymbol{\Delta^7 y_{-4}}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^4 y_{-2}}$		$\boldsymbol{\Delta^6 y_{-3}}$		$\boldsymbol{\Delta^8 y_{-4}}$
		$\boldsymbol{\Delta y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^5 y_{-2}}$		$\boldsymbol{\Delta^7 y_{-3}}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$		$\Delta^8 y_{-3}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$		$\Delta^7 y_{-2}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		$\Delta^6 y_{-1}$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_{-0}$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$				
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$					
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$						
		Δy_4							
x_5	y_5								
$\vdots$	$\vdots$								

9. BESELOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Ako uzmemo aritmetičku sredinu Gausovih interpolacionih formula G_3 i G_1, dobićemo Beselovu interpolacionu formulu

$$\begin{aligned}P(u) = {} & \frac{y_0+y_1}{2} + (u-\tfrac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \frac{u(u-\frac{1}{2})(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ & + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{u(u-\frac{1}{2})(u^2-1)(u-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \\ & + \frac{u(u^2-1)(u^2-4)(u-3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots + \\ & + \frac{u(u^2-1)(u^2-4)\cdots(u-n)(u+n-1)}{(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\ & + \frac{u(u-\frac{1}{2})(u^2-1)(u^2-4)\cdots(u-n)(u+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}.\end{aligned}$$

Beselova interpolaciona formula za $u = \dfrac{1}{2}$ je jednostavna

$$P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \frac{y_0+y_1}{2} - \frac{1}{8}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} -$$

$$-\frac{5}{1024}\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2}{2^{2n}(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}.$$

i koristi se za interpolaciju u središtu intervala (x_0, x_1).

Iz načina izvođenja zaključuje se da Beselova interpolaciona formula predstavlja interpolacioni polinom koji se poklapa s funkcijom $f(x)$ u $2n+2$ tačke.

Greška Beselove interpolacione formule je

$$R_n = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} u(u-1)(u+1)(u-2)\cdots(u-n)(u+n)(u-n-1),\ \xi \in (x_{-n}, x_{n+1})$$

ili

$$R_n = \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} u(u-1)(u+1)(u-2)\cdots(u-n)(u+n)(u-n-1).$$

Praktično uputstvo je: za $|u| \le 0.25$ koristi se Stirlingova a za $0.25 \le u \le 0.75$ Beselova interpolaciona formula.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
$\vdots$	$\vdots$								
x_{-4}	y_{-4}								
		Δy_{-4}							
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$						
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$					
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$				
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		$\Delta^7 y_{-4}$	
x_0	y_0		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^4 y_{-2}}$		$\boldsymbol{\Delta^6 y_{-3}}$		$\boldsymbol{\Delta^8 y_{-4}}$
	– – –	$\boldsymbol{\Delta y_0}$	– – –	$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$	– – –	$\boldsymbol{\Delta^5 y_{-2}}$	– – –	$\boldsymbol{\Delta^7 y_{-3}}$	– – –
x_1	y_1		$\boldsymbol{\Delta^2 y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^4 y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^6 y_{-2}}$		$\boldsymbol{\Delta^8 y_{-3}}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$		$\Delta^7 y_{-2}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		$\Delta^6 y_{-1}$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_{-0}$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$				
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$					
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$						
		Δy_4							
x_5	y_5								
$\vdots$	$\vdots$								

Primer 1. Data je tablica vrednosti funkcije $y = f(x)$ (v. tablicu). Izračunati $f(1.7489)$.

Rešenje. Tablica konačnih razlika je

x	e^{-x}	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1.72	0.1790661479				
		−17817379			
1.73	0.1772844100		177285		
		−17640094		−1762	
1.74	$\underline{0.1755204006}$		$\underline{175523}$		$\underline{+13}$
		$\underline{-17464571}$		$\underline{-1749}$	
1.75	$\underline{0.1737739435}$		$\underline{173774}$		$\underline{+22}$
		−17290797		−1727	
1.76	0.1720448638		172047		+15
		−17118750		−1712	
1.77	0.1703329988		170335		
		−16948415			
1.78	0.1686381473				

Ovde je $u = \dfrac{1.7489 - 1.74}{0.01} = 0.89$ i $u - \dfrac{1}{2} = 0.39$, pa je

$$f(1.7489) = \frac{0.1755204006 + 0.1737739435}{2} + 0.39(-17464571) \cdot 10^{-10} +$$
$$+ \left(\frac{0.39^2 - 0.25}{2}\right)\left(\frac{175523 + 173774}{2}\right) \cdot 10^{-10} + 0.39\left(\frac{0.39^2 - 0.25}{6}\right) \cdot$$
$$\cdot (-1749) \cdot 10^{-10} + \frac{(0.39^2 - 0.25)(0.39^2 - 2.25)}{24}\left(\frac{13 + 22}{2}\right) \cdot 10^{-10} =$$
$$= 0.17464717205 - 0.00068111827 - 0.00000085490 +$$
$$+ 0.00000000111 + 0.00000000001;$$

$f(1.7489) = 0.1739652000$. ▲

10. INVERZNA INTERPOLACIJA

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata tablično

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Postupak nalaženja argumenta x koji odgovara zadatoj vrednosti y funkcije $y = f(x)$, koja nije data u tablici, naziva se *inverzna* ili *obratna* interpolacija. Postoji više načina za rešavanje ovog zadatka.

Neka su čvorovi interpolacije ekvidistantni: $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$, h je različito od nule i konstantno. Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ monotona i da se zadata vrednost y^* nalazi između y_0 i y_1. Zamenjujući y^* u prvom Njutnovom interpolacionom polinomu dobija se

$$y^* = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u(u-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u(u-1)\cdots(u-n+1)$$

odakle je

$$u = \frac{y^* - y_0}{\Delta y_0} - \frac{1}{\Delta y_0}\left[\frac{\Delta^2 y_0}{2!} u(u-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u(u-1)\ldots(u-n+1)\right] \qquad (1)$$

($\Delta y_0 \neq 0$ zbog monotonosti funkcije $y = f(x)$), što možemo zapisati na sledeći način

$$u = F(u), \qquad (2)$$

gde je

$$\boxed{F(u) = \frac{y^* - y_0}{\Delta y_0} - \frac{1}{\Delta y_0}\left[\frac{\Delta^2 y_0}{2!} u(u-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u(u-1)\ldots(u-n+1)\right].}$$

Sada se formira niz uzastopnih aproksimacija (iteracija): $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$ $u^{(m)}, \ldots$ uzimajući za prvu, početnu aproksimaciju

$$u^{(0)} = \frac{y^* - y_0}{\Delta y_0}$$

i primenjujući metodu iteracije

$$u^{(m+1)} = F(u^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Ako je $F(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$, h dovoljno malo i $[a, b]$ sadrži sve čvorove interpolacije, onda iterativni proces (3) konvergira, tj. postoji

$$\lim_{m \to \infty} u^{(m)} = u,$$

gde je u tražena vrednost, odnosno $x = x_0 + hu$.

Praktično se iterativni postupak produžava sve dok se ne poklope dve uzastopne aproksimacije na potreban broj dekadnih znakova, tj. dok se u granicama zadate tačnosti ne postigne da je

$$u^{(k)} = u^{(k-1)};$$

tada se stavi da je

$$u \approx u^{(k)} \quad \text{ili} \quad x^* = x_0 + hu^{(k)}.$$

Ako se zadata vrednost y^* nalazi pri kraju tablice, onda se na potpuno analogan način dobija odgovarajuće x^* korišćenjem drugog Njutnovog interpolacionog polinoma.

Ako se zadata vrednost y^* nalazi u sredini tablice, onda se na potpuno analogan način dobija odgovarajuće x^* korišćenjem tzv. interpolacionih formula sa centralnim razlikama: Gausovih, Stirlingove, Beselove, ...

Zadatak inverzne interpolacije u slučaju neekvidistantnih vrednosti argumenta: $x_0, x_1, ..., x_n$ se može rešiti primenom Langraževe interpolacione formule. Za to je dovoljno uzeti y za nezavisnu promenljivu a x posmatrati kao funkciju od y, tj. $x = g(y)$. Naravno, potrebno je pretpostaviti postojanje inverzne funkcije. Dakle, zadatak inverzne interpolacije rešavamo primenom formule

(4) $$\boxed{x = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(y)}{(y - y_i)\Pi'_{n+1}(y_i)} \cdot x_i,}$$

gde je

$$\Pi_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_n).$$

Primer 1. U sledećoj tablici date su vrednosti funkcije $f(x)$

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
y	0.36788	0.30119	0.24660	0.20190	0.16530

Naći onu vrednost x za koju je $f(x) = 0.31664$.

Rešenje. Čvorovi su jednako razmaknuti, funkcija je monotono opadajuća i $y_0 = 0.36788$, $y^* = 0.31664$, $y_1 = 0.30119$. Sastavimo tablicu konačnih razlika. Koristićemo prvi Njutnov interpolacioni polinom.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.0	$\underline{0.36788}$				
		$\underline{-6669}$			
1.2	0.30119		$\underline{1210}$		
		–5459		$\underline{-221}$	
1.4	0.24660		989		$\underline{42}$
		–4470		–179	
1.6	0.20190		810		
		–3660			
1.8	0.16530				

Redom računamo:

$$u^{(0)} = \frac{0.31664 - 0.36788}{-0.06669} = 0.76833, \quad x^{(0)} = x_0 + hu^{(0)} = 1.15367;$$

$$u^{(1)} = 0.76833 - \frac{1}{-0.06669} \cdot \left[\frac{0.01210}{2!} \cdot 0.76833 \cdot (0.76833 - 1) + \frac{-0.00221}{3!} \cdot \right.$$

$$\cdot 0.76883 \cdot (0.76833 - 1)(0.76833 - 2) + \frac{0.00042}{4!} \cdot 0.76833 \cdot (0.76833 - 1) \cdot$$

$$\left. \cdot (0.76833 - 2)(0.76833 - 3) \right] = 0.75084, \qquad x^{(1)} = x_0 + hu^{(1)} = 1.15017, \text{itd.}$$

Na kraju se dobija: $x^* = 1.15$. ▲

11. PODELJENE RAZLIKE FUNKCIJA

Pretpostavka da su čvorovi interpolacije jednako razmaknuti – ekvidistantni sužava oblast primene mnogih interpolacionih formula s konačnim razlikama. Naime, podaci dobijeni eksperimentalnim putem najčešće nisu ekvidistantni. Radi toga ćemo, na određen način, uopštiti pojam konačnih razlika uvodeći podeljene ili količničke razlike – razlike s promenljivim korakom i izvesti interpolacione formule s takvim razlikama.

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata tabličnim vrednostima $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, gde su $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$, nejednako razmaknuti čvorovi, dakle,

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h_i \neq 0 , \quad i = \overline{0, \overline{n-1}},$$

i h_i nisu jednaki među sobom.

Podeljene razlike prvog reda su:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = \overline{0, \overline{n-1}},$$

što ćemo obeležavati na sledeće načine: $f[x_i, x_{i+1}]$ ili $[x_i, x_{i+1}]$ ili $\delta(x_i, x_{i+1})$ ili, kratko, δ^1 (čita se: malo delta jedan). Tako imamo, na primer:

$$\boxed{\delta(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad \delta(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ldots}$$

Podeljene razlike drugog reda su:

$$\boxed{\frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}) - \delta(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = \overline{0, \overline{n-2}},}$$

što ćemo obeležavati na sledeće načine: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ ili $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ ili $\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ ili, kratko, δ^2 (čita se: malo delta dva). Tako imamo, na primer:

$$\delta(x_0, x_1, x_2) = \frac{\delta(x_1, x_2) - \delta(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \quad \delta(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta(x_2, x_3) - \delta(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots$$

Uopšte, podeljene razlike k–tog reda su:

$$\boxed{\frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}) - \delta(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = \overline{0, \overline{n-k}},}$$

što ćemo obeležavati na sledeće načine: $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ ili $[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ ili $\delta(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$ ili, kratko, δ^k (čita se: malo delta ka).

Podeljene razlike se obično zapisuju u obliku tablice podeljenih razlika, i na taj način se postiže preglednost. Tablice su sledećeg oblika, analogno tablicama konačnih razlika.

x	y	δ^1	δ^2	...	δ^n
x_0	y_0				
		$\delta(x_0, x_1)$			
x_1	y_1		$\delta(x_0, x_1, x_2)$		
		$\delta(x_1, x_2)$			
x_2	y_2		$\delta(x_1, x_2, x_3)$		
		$\delta(x_2, x_3)$			
x_3	y_3		$\delta(x_2, x_3, x_4)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\delta(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
x_{n-3}	y_{n-3}		$\delta(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2})$		
		$\delta(x_{n-3}, x_{n-2})$			
x_{n-2}	y_{n-2}		$\delta(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})$		
		$\delta(x_{n-2}, x_{n-1})$			
x_{n-1}	y_{n-1}		$\delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
		$\delta(x_{n-1}, x_n)$			
x_n	y_n				

Primer 1. Sastaviti tablicu podeljenih razlika za funkciju $y = f(x)$ zadatu tablično

x	0.00	0.20	0.35	0.40	0.50	0.54
y	1.000000	1.408000	1.742875	1.864000	2.125000	2.237464

Rešenje.

x	y	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4
0.00	1.000000				
		2.040000			
0.20	1.408000		0.550000		
		2.232500		1.000000	
0.35	1.742875		0.950000		0.000000
		2.422500		1.000000	
0.40	1.864000		1.250000		0.000000
		2.610000		1.000000	
0.50	2.125000		1.440000		
		2.811600			
0.54	2.237464				

▲

Navedimo neke osobine podeljenih razlika:

1) Podeljene razlike zbira funkcija jednake su zbiru podeljenih razlika sabiraka.
2) Podeljene razlike razlike funkcija jednake su razlici podeljenih razlika umanjenika i umanjioca.
3) Konstantan faktor se može izvući ispred podeljene razlike.
4) Podeljene razlike su simetrične funkcije svojih argumenata, tj.

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}) = \delta(x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}) =$$
$$= \delta(x_{i+2}, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{i+k}) = \ldots$$

Važe i sledeće leme.

Lema 1. Ako je $y = P_n(x)$ polinom n–tog stepena, onda su podeljene razlike prvog reda polinomi (n–1)–tog stepena.

Dokaz. Na osnovu Bezuovog stava imamo

$$P_n(x) = (x - x_i) \cdot P_{n-1}(x) + P_n(x_i),$$

a odavde je

$$\frac{P_n(x) - P_n(x_i)}{x - x_i} = P_{n-1}(x),$$

tj. $P_n[x, x_i] = \delta(x, x_1) = P_{n-1}(x)$. ■

Posledica 1. Podeljene razlike n–tog reda polinoma n–tog stepena $P_n(x)$ su konstantne, tj. $P_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = C$, $C = \text{const}$.

Posledica 2. Podeljene razlike m–tog reda, gde je $m > n$, polinoma n–tog stepena $P_n(x)$ su jednake nuli. Zaista, razlika $(n + 1)$–vog reda je

$$P_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{P_n[x, x_1, \ldots, x_n] - P_n[x, x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x} = \frac{C - C}{x_n - x} = 0$$

i sve razlike reda višeg od $(n + 1)$–vog su, očigledno, jednake nuli.

Lema 2. Podeljena razlika k–tog reda je

$$\delta(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{y_i}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})\ldots(x_i - x_{i+k})} +$$
$$+ \frac{y_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})\cdots(x_{i+1} - x_{i+k})} + \cdots +$$
$$+ \frac{y_{i+k}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1})\cdots(x_{i+k} - x_{i+k-1})}.$$

12. VEZA IZMEĐU KONAČNIH I PODELJENIH RAZLIKA FUNKCIJA

Pretpostavimo da su čvorovi interpolacije $x_0, x_1, ..., x_n$ jednako razmaknuti, tj. pretpostavimo da je $x_{i+1} - x_i = h$, h – konstantno. Nađimo vezu između konačnih i podeljenih razlika. Radi toga posmatraćemo tablice konačnih razlika

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$y_1 - y_0$			
$x_0 + h$	y_1		$y_2 - 2y_1 + y_0$		
		$y_2 - y_1$		$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	
$x_0 + 2h$	y_2		$y_3 - 2y_2 + y_1$		$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$
		$y_3 - y_2$		$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$	
$x_0 + 3h$	y_3		$y_4 - 2y_3 + y_2$		$y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1$
		$y_4 - y_3$		$y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$	
$x_0 + 4h$	y_4		$y_5 - 2y_4 + y_3$		$y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2$
		$y_5 - y_4$		$y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$	
$x_0 + 5h$	y_5		$y_6 - 2y_5 + y_4$		
		$y_6 - y_5$			
$x_0 + 6h$	y_6				

i tablicu podeljenih razlika s konstantnim korakom h

x	y	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4
x_0	y_0				
		$\frac{y_1 - y_0}{h}$			
$x_0 + h$	y_1		$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h \cdot h}$		
		$\frac{y_2 - y_1}{h}$		$\frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 2h$	y_2		$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h \cdot h}$		$\frac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{4h \cdot 3h \cdot 2h \cdot h}$
		$\frac{y_3 - y_2}{h}$		$\frac{y_4 - 3y_3 + 3y_2 + y_1}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 3h$	y_3		$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{2h \cdot h}$		$\frac{y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1}{4h \cdot 3h \cdot 2h \cdot h}$
		$\frac{y_4 - y_3}{h}$		$\frac{y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 4h$	y_4		$\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{2h \cdot h}$		$\frac{y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2}{4h \cdot 3h \cdot 2h \cdot h}$
		$\frac{y_5 - y_4}{h}$		$\frac{y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 5h$	y_5		$\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{2h \cdot h}$		
		$\frac{y_6 - y_5}{h}$			
$x_0 + 6h$	y_6				

Na osnovu prethodnih tablica zaključujemo da je:

$$\delta^1 y_0 = \delta(x_0, x_0 + h) = \delta(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \;\; \delta^1 y_1 = \frac{\Delta y_1}{h}, \ldots;$$

$$\delta^2 y_0 = \delta(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \delta(x_0, x_1, x_2) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h \cdot h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2},$$

$$\delta^2 y_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{2! h}, \ldots$$

$$\delta^3 y_0 = \delta(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h) = \delta(x_0, x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3h \cdot 2! h^2} = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3}, \;\; \delta^3 y_1 = \frac{\Delta^3 y_1}{3! h^3}, \ldots;$$

$$\delta^4 y_0 = \delta(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, x_0 + 4h) = \delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$$= \frac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{4h \cdot 3! h^3} = \frac{\Delta^4 y_0}{4! h^4}, \;\; \delta^4 y_1 = \frac{\Delta^4 y_1}{4! h^4}, \ldots;$$

i, u opštem slučaju, važi

$$\boxed{\delta^n y_k = \delta(x_k, x_k + h, x_k + 2h, \ldots, x_k + nh) = \frac{\Delta^n y_k}{n! h^n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

13. NJUTNOV INTERPOLACION POLINOM S PODELJENIM RAZLIKAMA

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata tablicom

x	x_0	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

pri čemu su čvorovi interpolacije $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$, među sobom različiti. Njutnovi interpolacioni polinomi, a takođe i drugi interpolacioni polinomi s podeljenim razlikama, mogu se jednostavno napisati koristeći relaciju između podeljenih i konačnih razlika

$$\delta^n y_k = \delta(x_k, x_k + h, x_k + 2h, \ldots, x_k + nh) = \frac{\Delta^n y_k}{n! h^n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

što prepuštamo čitaocu. Ovde ćemo izvesti samo I Njutnov interpolacioni polinom na nešto drugačiji način. Neka je $L_n(x)$ Lagranžev interpolacioni polinom n–tog stepena, dakle, $L_n(x) = y_i$, $i = \overline{0,n}$. Podeljene razlike $(n+1)$–vog reda polinoma $L_n(x)$ je, kao što je poznato, su

(1) $$L_n[x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \equiv 0.$$

Na osnovu definicije podeljenih razlika imamo

$$\frac{L_n(x) - L_n(x_0)}{x - x_0} = L_n[x, x_0],$$

a odavde je

(2) $$L_n(x) = L_n(x_0) + L_n[x, x_0](x - x_0),$$

i analogno iz

$$\frac{L_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - L_n[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]}{(x - x_k)} = L_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

imamo

(3) $$\begin{gathered} L_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] = \\ L_n[x_0, x_1, \ldots, x_k] + L_n[x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k](x - x_k), \\ k = \overline{1,n}. \end{gathered}$$

Koristeći formulu (3) iz formule (2) dobijamo

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_n(x_0) + L_n[x, x_0] \cdot (x - x_0) = \\ &= L_n(x_0) + \{L_n[x_0, x_1] + L_n[x, x_0, x_1](x - x_1)\} \cdot (x - x_0) = \\ &= L_n(x_0) + L_n[x_0, x_1](x - x_0) + L_n[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) = \end{aligned}$$

$$= L_n(x_0) + L_n[x_0, x_1](x - x_0) + \{L_n[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ L_n[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)\}(x - x_0)(x - x_1) =$$
$$= L_n(x_0) + L_n[x_0, x_1](x - x_0) + L_n[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ L_n[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$$
$$= \ldots = L_n(x_0) + L_n[x_0, x_1](x - x_0) + L_n[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ L_n[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) +$$
$$+ L_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Međutim, $L_n[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \equiv 0$, pa imamo

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} L_n(x) = L_n(x_0) + L_n[x_0, x_1](x - x_0) + L_n[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + L_n[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}}$$

što predstavlja prvi Njutnov interpolacioni polinom s podeljenim razlikama.

Greška formule (4) je

$$(5) \qquad \boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad \xi \in [a, b].}$$

Primer 1. Naći prvi Njutnov interpolacioni polinom za funkciju $y = f(x)$ zadatu tabelom

x	-1	0	2	3	5	6
y	2	4	26	58	194	310

14. TRIGONOMETRIJSKE INTERPOLACIONE FORMULE

Ako je funkcija $y = f(x)$ periodična, onda se primenjuju trigonometrijske interpolacione formule. Najčešće se koriste Gausova i Ermitova trigonometrijska interpolaciona formula.

Gausova trigonometrijska interpolaciona formula glasi

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(x-x_2)\cdots\sin\frac{1}{2}(x-x_n)}{\sin\frac{1}{2}(x_0-x_1)\sin\frac{1}{2}(x_0-x_2)\cdots\sin\frac{1}{2}(x_0-x_n)}\,y_0 + \\ & + \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_2)\cdots\sin\frac{1}{2}(x-x_n)}{\sin\frac{1}{2}(x_1-x_0)\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2)\cdots\sin\frac{1}{2}(x_1-x_n)}\,y_1 + \\ & + \cdots + \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(x-x_{n-1})}{\sin\frac{1}{2}(x_n-x_0)\sin\frac{1}{2}(x_n-x_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})}\,y_n . \end{aligned}}$$

Ermitova trigonometrijska interpolaciona formula glasi

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\cdots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\cdots\sin(x_0-x_n)}\,y_0 + \\ & + \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\cdots\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\cdots\sin(x_1-x_n)}\,y_1 + \\ & + \cdots + \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)\cdots\sin(x-x_{n-1})}{\sin(x_n-x_0)\sin(x_n-x_1)\cdots\sin(x_n-x_{n-1})}\,y_n . \end{aligned}}$$

15. ČEBIŠOVLJEVI POLINOMI

Ako je zadata funkcija $f(x)$, odsečak interpolacije $[a,b]$ koji sadrži čvorove interpolacije i stepen n interpolacionog polinoma $P_n(x)$, onda se greška interpolacije $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ može zapisati u sledećem obliku

$$R_n(x)=K\cdot\Pi_{n+1}(x),$$

gde je $\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Dakle, greška u ovim zadatim uslovima zavisi od izbora čvorova interpolacije. Sada se postavlja sledeći zadatak: Kako treba izabrati čvorove interpolacije x_i, $i=\overline{0,n}$, da bi greška interpolacije bila minimalna? Pokazano je da je za čvorove interpolacije najbolje uzeti nule Čebišovljevog (П. Л. Чебышёв, 1821–1894) polinoma.

Čebišovljev polinom $T_n(x)$ se definiše na sledeći način:

$$\boxed{T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x),\quad n=1,2,3,\dots}$$

Navedimo nekoliko prvih Čebišovljevih polinoma:

$$\begin{aligned}
&T_0(x)=1,\\
&T_1(x)=x,\\
&T_2(x)=2x^2-1,\\
&T_3(x)=4x^3-3x,\\
&T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\\
&T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,\dots
\end{aligned}$$

Može se primetiti sledeće:

1) koeficijent uz x^n polinoma $T_n(x)$ je jednak 2^{n-1}, $n\ge 1$;

2) $T_{2n}(x)$ su parne funkcije;

3) $T_{2n+1}(x)$ su neparne funkcije;

4) za $|x|\le 1$ je $|T_n(x)|\le 1$.

Dokažimo osobinu 4). Ako u trigonometrijski identitet

$$\cos((n+1)X)=2\cdot\cos X\cdot\cos nX-\cos((n-1)X)$$

stavimo $X=\arccos x$, onda ćemo dobiti

$$\cos((n+1)\arccos x)=2\cdot x\cdot\cos(n\cdot\arccos x)-\cos((n-1)\arccos x),$$

pa možemo zaključiti da funkcija $\cos(n\cdot\arccos x)$ zadovoljava istu diferencnu jednačinu kao i $T_n(x)$. Kako je još i:

$$\cos(0\cdot\arccos x)=1\equiv T_0(x)\,,\quad \cos(1\cdot\arccos x)=x\equiv T_1(x)$$

to je

$$\boxed{T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)\,,\quad n=0,1,2,\dots}$$

Sada je jednostavno zaključiti da važi osobina 4).

Rekurentna relacija, diferencna jednačina,

$$T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)\,,\quad n=0,1,2,\dots$$

ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2=2x\lambda-1\,,$$

a odavde je

$$\lambda_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2-1}\,.$$

Za $|x|\neq 1$ imamo da je $\lambda_1\neq\lambda_2$, pa je opšte rešenje diferencne jednačine

$$T_n(x)=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n\,,\quad n=0,1,2,\dots,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Iz početnih uslova $T_0(x)=1$ i $T_1(x)=x$ nalazimo $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$, pa je

$$\boxed{T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],\quad n=0,1,2,\dots,}$$

što je još jedan mogući način zadavanja Čebišovljevih polinoma.

Iz jednačine

$$T_n(x)\equiv\cos(n\cdot\arccos x)=0$$

dobijamo nule:

$$\boxed{x_k=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\,,\quad k=0,1,\dots,\overline{n-1}\,.}$$

Tačke ekstremuma na segmentu [–1, 1] su one tačke za koje je $|T_n(x)|=1$, dakle:

$$x_{(k)}=\cos\frac{k}{n}\pi\,,\quad k=\overline{0,n}$$

i pri tome je

$$T_n(x_{(k)})=\cos k\pi=(-1)^k\,.$$

Polinom

$$\boxed{\overline{T}_n(x)=2^{1-n}\cdot T_n(x)=x^n+\cdots}$$

za $x\in[-1,1]$ najmanje odstupa od nule.

Teorema. Ako je $P_n(x) = x^n + \cdots$, onda je

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad n \geq 1 .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je

$$\max |P_n(x)| < \max |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1] .$$

Posmatrajmo razliku

$$Q(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x) ;$$

očigledno je stepen polinoma $Q(x)$ najviše jednak $n - 1$ i pri tome je

$$\operatorname{sign}(\overline{T}_n(x_{(k)}) - P_n(x_{(k)})) = \operatorname{sign}((-1)^k \cdot 2^{1-n} - P_n(x_{(k)})) = (-1)^k, \quad k = \overline{0, n}$$

jer je $P_n(x_{(k)}) < 2^{1-n}$ za svako k. Na taj način imamo da polinom $Q(x)$ između svake dve uzastopne tačke $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ menja znak, odnosno, između $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ ima bar jednu nulu. Dakle, polinom Q ima bar n nula, a to je protivurečno, jer polinom Q ima najviše $n - 1$ nulu. Drugim rečima, mora biti

$$\max |P_n(x)| \geq \max |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1] .$$

Na taj način zaključujemo sledeće: od svih polinoma n–tog stepena koji imaju uz x^n koeficijent 1 najmanje odstupa od nule na segmentu [–1, 1] Čebišovljev polinom $\overline{T}_n(x)$. ∎

Ako posmatramo odsečak $[a, b]$, onda je odgovarajući polinom

$$\overline{T}_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n x^n + \cdots$$

i

$$\overline{T}_n^{[a,b]}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot 2^{1-n} \cdot \overline{T}_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = x^n + \cdots$$

Dakle, važi

$$\max_{x\in[a,b]} |P_n(x)| \geq \max_{x\in[a,b]} |\overline{T}_n^{[a,b]}(x)| = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} ,$$

gde je $P_n(x) = x^n + \cdots$ proizvoljan polinom.

Nule polinoma $\overline{T}_n^{[a,b]}(x)$ su

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = \overline{0, \overline{n-1}}.$$

Greška interpolacije je

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$